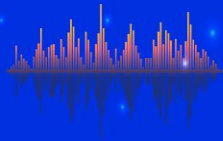


Vibrations & Ondes



Résumés de cours

Exercices et Problèmes corrigés

Sujets de concours des écoles d'ingénieurs

N.MAGHLAOUI



Adresse mail : n.maghlaoui@g.essa-alger.dz



Chaine youtube : https://www.youtube.com/channel/UC4Je_iuu-eDrX7w-sdTRuGA



Groupe facebook : <https://www.facebook.com/groups/501139563755290>



Avant-propos

Cet ouvrage est dédié aux étudiants de deuxième année des classes préparatoires en sciences et techniques et des filières ST-SM des universités. Il propose des résumés de cours en physique 3 et 4 ainsi que des recueils d'exercices et problèmes, intitulé vibrations et ondes.

Le document reste fidèle au programme officiel, il a pour but de servir de guide de préparation pour les examens, ainsi que le concours d'accès aux écoles supérieures.

Il est le fruit d'une expérience de plusieurs années acquises dans l'enseignement de cette discipline tant au niveau du cours que des travaux dirigés et pratiques.

Des résumés de cours, des exercices et problèmes corrigés ainsi que des sujets d'examens sont présentés dans ce document, afin de permettre aux étudiants d'accroître leurs aptitudes.

Le document s'articule autour de quatre parties, un choix basé sur les trois thématiques abordées dans le programme officiel, vibrations mécaniques, ondes mécaniques et enfin ondes électromagnétiques.

Chaque partie, commence par un rappel de cours, suivi d'exercices d'applications. Enfin, je termine par des exercices et problèmes corrigés, extraits de sujets d'examens.

Dans la première partie, vibrations mécaniques, je commence par présenter les définitions de base, d'un oscillateur linéaire et la condition d'oscillation, tout en introduisant le formalisme de Lagrange, à travers des exemples et contre exemples. Des notions telles que le degré de liberté et les coordonnées généralisées sont introduites. Les oscillations étudiées sont linéaires et de faibles amplitudes. Une série d'exercices propose un nombre de systèmes, variés permettant à l'étudiant de s'exercer suffisamment. Des systèmes simples aux plus compliquées, j'ai pour ambition de pousser l'étudiant à se poser les questions relatives à son niveau et au sujet.

La maîtrise de l'outil mathématique me permet, par la suite, d'aborder des phénomènes physiques liés à l'oscillation, l'amortissement, la résonance et l'anti résonance, dans le cas de systèmes à un puis deux degrés de liberté.

La deuxième partie concerne les ondes mécaniques, dans laquelle, il est indispensable de définir les notions de base, sur la propagation des ondes en général. J'introduis les ondes mécaniques par l'étude de la propagation des ondes transversales le long d'une corde. Un résumé est dédié à des définitions telles que, l'équation d'onde de d'Alembert, la solution en onde plane sinusoïdale, la vitesse de l'onde et de particule, la force en un point et l'impédance de la corde. Je termine ce résumé par les coefficients de réflexion et de transmission, relatifs aux phénomènes de propagations d'ondes dans des milieux finis.

Après avoir introduit les notions d'ondes par l'étude de la corde vibrante, j'entame, les ondes élastiques dans les milieux. En premier lieu, j'aborde la thématique des ondes acoustiques (élastiques) dans les fluides. Dans le cas d'une propagation unidimensionnelle, un résumé autour des équations fondamentales de l'hydrodynamique, de la continuité et l'équation d'état est présenté. Cela permet l'établissement de l'équation de d'Alembert pour une onde acoustique. La solution en ondes planes sinusoïdale est aussi introduite. Cela permet de s'appuyer sur les acquis du chapitre précédent (corde vibrante), tout en les renforçant les prérequis des étudiants. Je termine ce chapitre, par les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude puis en énergie. Un exemple d'application qui est l'effet Doppler est aussi intégré au document.

En deuxième phase, la propagation des ondes élastiques dans les solides homogènes, isotropes et non absorbants est abordée. Les notions d'ondes ont été introduites précédemment, cette partie introduit la propagation d'ondes longitudinale et transversale dans les solides, le module d'Young et le coefficient de glissement, qui sont à l'origine du phénomène de propagation dans les solides, sont définis. Ainsi je définis la vitesse d'onde longitudinale et transversale, l'impédance, les coefficients de réflexion et de transmission.

La troisième partie, est consacrée à la propagation des ondes électromagnétiques. J'aborde ce chapitre par la propagation dans le vide. Dans lequel, je commence par donner les équations de Maxwell. Les quatre équations permettent d'établir l'équation de propagation d'onde, puis la solution en onde plane sinusoïdale est proposée. La structure de l'onde est donnée, et les différents états de polarisation sont décrits. Je termine par les énergies et le vecteur de Poynting. Ce dernier permet de nous renseigner au sujet de la direction d'écoulement de l'énergie et de calculer la puissance de l'onde électromagnétique.

En second lieu, nous abordons la propagation dans les milieux linéaires, homogènes et isotropes. Je commence par la propagation dans les plasmas. Afin d'étudier la fréquence de plasma et le phénomène de dispersion, les plasmas sont supposés parfaitement dilués et constitués de charges non relativistes. Par la suite je présente la propagation dans les diélectriques et les métaux. Les phénomènes de propagation, d'absorption, d'onde évanescente ainsi que l'épaisseur de peau sont mis en évidence.

Par la suite un résumé sur les phénomènes de réflexion et de réfractions est présenté. Dans ce cadre, je commence par donner les équations de passage entre deux milieux linéaires, isotropes et homogènes, avant d'établir les lois de la réfraction. Les coefficients de réflexion et de transmission sont établis, et les phénomènes physiques de réfraction totale (angle de Brewster) sont abordés. La réflexion totale sur un conducteur parfait et la pression de radiation du champ électromagnétique est aussi présentée. Des exercices sur la réflexion des ondes électromagnétiques sur du cuivre, ou la réflexion à l'interface de deux diélectriques parfaits sont proposés.

La dernière partie de ce chapitre est consacrée à la propagation du champ électromagnétique dans les guides d'ondes, le cas particulier, du guide d'onde infini, à section rectangulaire est abordé. Les phénomènes de mode de propagation, de fréquence de coupure, de dispersion et d'onde évanescente sont présentés.

Une série d'exercices extraits de sujets d'examens vient clôturer la partie ondes électromagnétiques, le but étant de renforcer les acquis du cours est consacrée à cette thématique.

Enfin, dans la dernière partie de cet ouvrage une série de sujets d'examens corrigés est proposée, certains ont fait l'objet de sujets de concours d'accès aux écoles supérieures de sciences et technologie. L'objectif étant de préparer les étudiants au concours d'accès aux écoles supérieures.

Table des matières :

1. Vibrations mécaniques.

- Oscillations libres puis forcées des systèmes à 1 degré de liberté. 02
 - Résumé de cours. 03
 - Exercices corrigés. 18
- Oscillations libres puis forcées des systèmes à 2 degrés de liberté. 37
 - Résumé de cours. 38
- Exercices et problèmes corrigés. 44

2. Ondes mécaniques.

- **Ondes transversales le long d'une corde.** 95
 - Résumé de cours. 96
- Exercices et problèmes corrigés. 99

- **Ondes acoustiques dans les fluides.** 124
 - Résumé de cours. 125
- Exercices et problèmes corrigés. 129

- **Ondes élastiques dans les solides.** 149
 - Résumé de cours. 150
- Exercices et problèmes corrigés. 153

3. Ondes électromagnétiques.

- Ondes électromagnétiques dans le vide. 159
 - Résumé de cours. 160
- Ondes électromagnétiques dans les milieux linéaires homogènes et isotropes. 163
 - Résumé de cours. 164
- Réflexion et réfraction entre deux milieux. 169
 - Résumé de cours. 170
- Propagation guidée entre deux plans métalliques parallèles-Application au guide d'onde infini à section rectangulaire. 178
 - Résumé de cours. 179
- Exercices et problèmes corrigés. 182

4. Sujets de concours et examens corrigés.

216

5. Annexe.

291

- Annexe A : Rappels mathématiques. 292
- Annexe B : Compléments de mécanique. 296

Oscillations libres puis forcées des systèmes à 1 degré de liberté

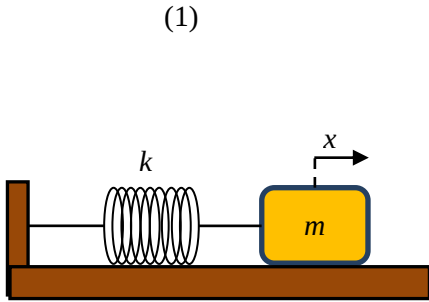
Résumé de cours

1. Définitions générales

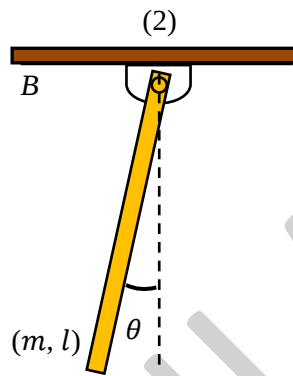
Oscillateur linéaire : tout système physique dont l'évolution au cours du temps de sa grandeur physique est décrite par une fonction sinusoïdale de fréquence dépendante des caractéristiques du système.

Coordonnées généralisées : Nous définissons les coordonnées généralisées comme l'ensemble des variables nécessaires pour décrire l'évolution dans le temps du système mécanique.

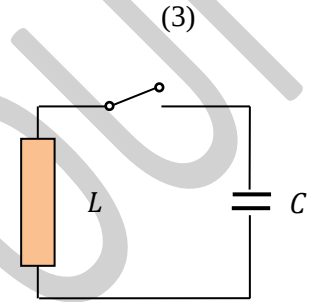
Exemple



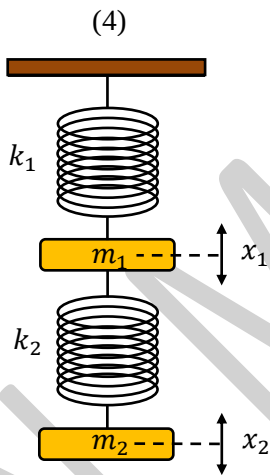
Coordonnée généralisée
 $x(t)$



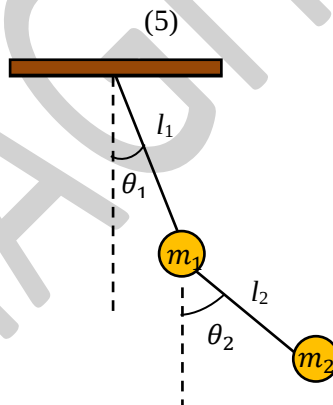
Coordonnée généralisée
 $\theta(t)$



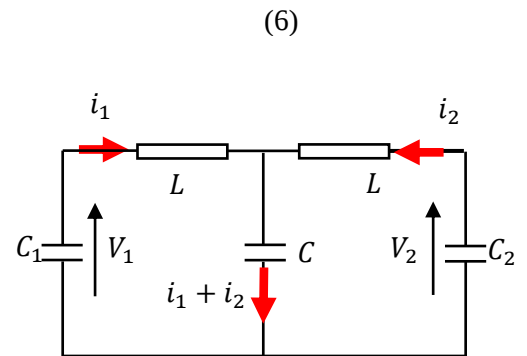
Coordonnée généralisée charge
 $q(t)$ ou tension $V(t)$



Coordonnées généralisées
 $x(t)$ et $x_2(t)$



Coordonnées généralisées
 $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$



Coordonnées généralisées
 $q_1(t), q_2(t)$ ou $V_1(t), V_2(t)$

Equilibre et condition d'oscillation :

Dans le cas d'un système conservatif où les forces dérivent d'un potentiel, la condition d'équilibre est :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q=q_{eq}} = 0$$

Pour qu'un système puisse osciller, il doit satisfaire à la condition d'oscillation (Condition de stabilité) :

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q=q_{eq}} > 0$$

2. Oscillations de systèmes à 1 degré de liberté libre et non amortis

Soit q la coordonnée généralisée décrivant le comportement d'un système physique, U et T sont respectivement les énergies potentiel et cinétique de ce dernier. Un oscillateur linéaire présente les caractéristiques suivantes :

- Une énergie potentielle proportionnelle à q^2 .

$$U = \frac{1}{2} b q^2$$

- Une énergie cinétique proportionnelle à $\dot{q}^2$.

$$T = \frac{1}{2} a \dot{q}^2$$

Dans ce cas les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

L étant le Lagrangien du système définit par : $L = T - U$

L'équation donnant l'évolution du système est :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \omega_0 = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

avec $\omega_0^2 > 0$

La solution d'une telle équation est $q(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

A et φ sont des constantes que l'on détermine à partir des conditions initiales.

Il est à noter, que dans le cas d'un pendule simple oscillant à des amplitudes élevées, le mouvement n'est plus harmonique et est décrit par l'équation suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

La période d'oscillation est donnée par la formule de Borda :

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$

où T_0 représente la période propre du pendule dans le cas des faibles amplitudes.

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

et θ_0 l'amplitude d'oscillation.

La représentation graphique des fonctions $y = \sin \theta$ et $y = \theta$ (Figure 1), montre que l'approximation des faibles amplitudes ($\sin \theta = \theta$) est justifiée dans le cas des angles inférieurs à 0.25 rad ($\sim 15^\circ$).

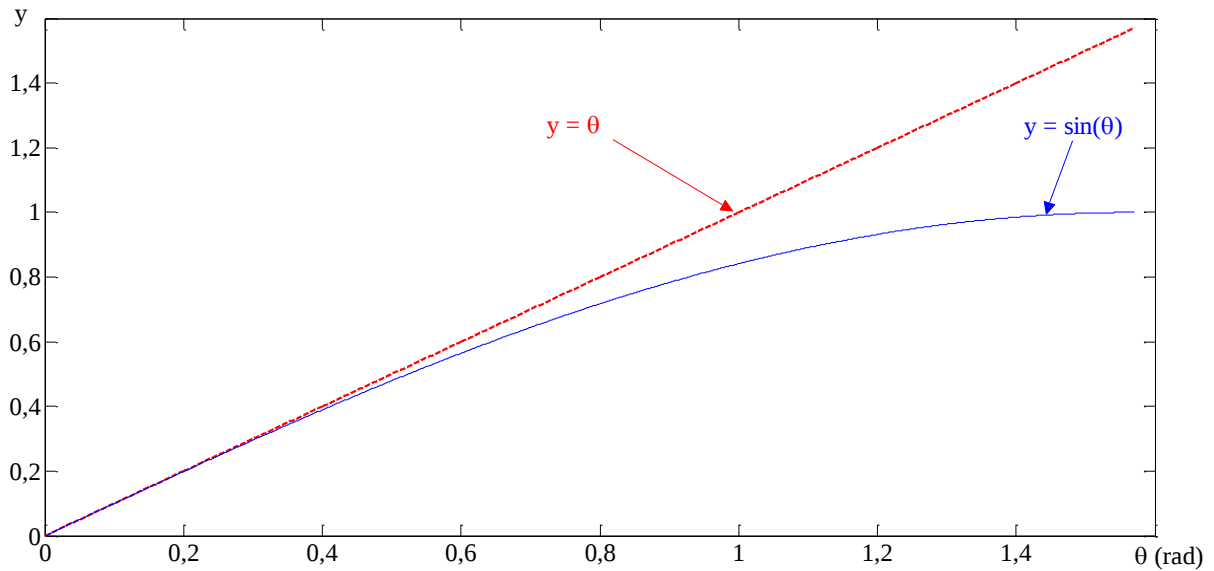
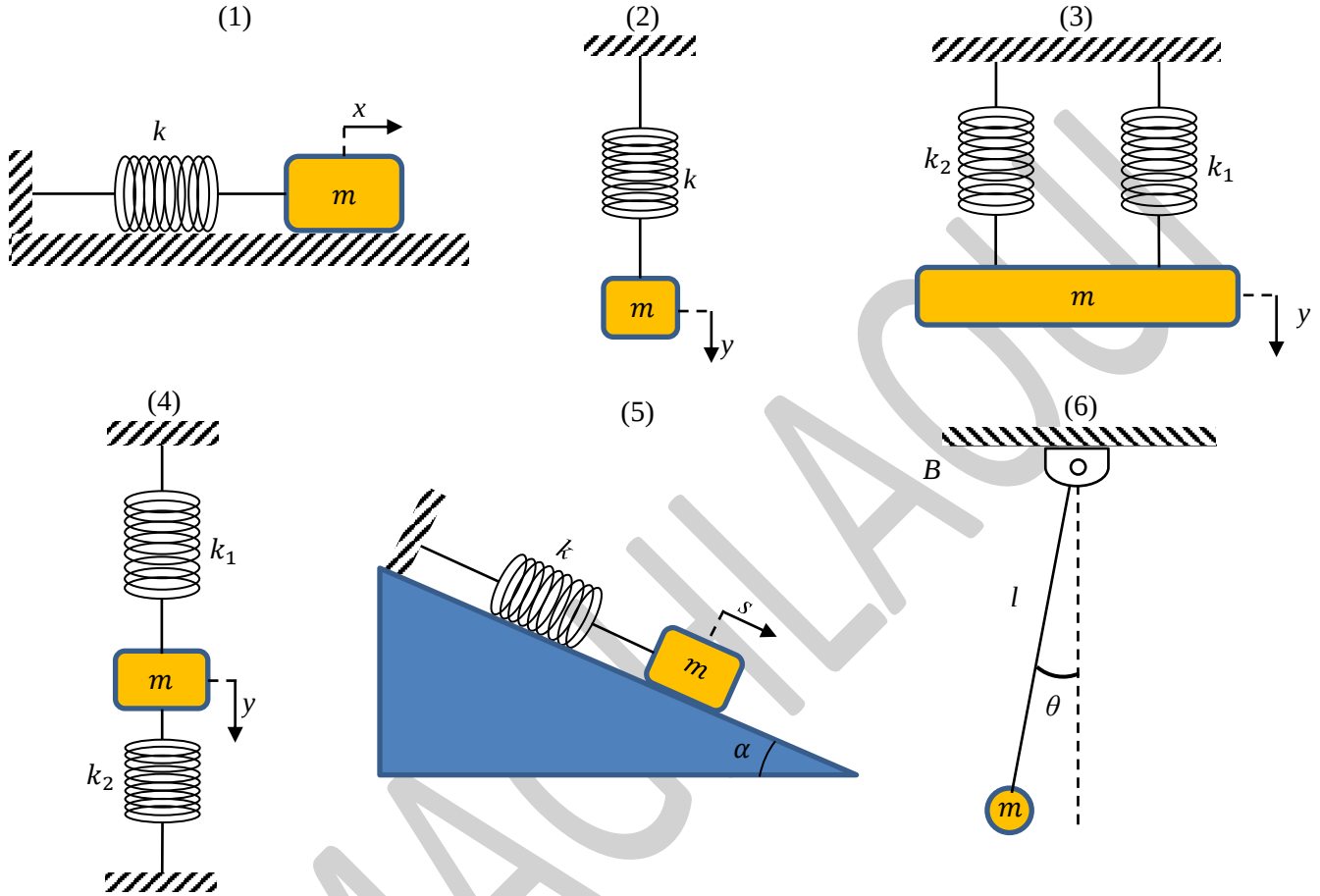


Figure 1

Exercices d'applications

1. Soit différents systèmes mécaniques, schématisés sur les figures ci-dessous, nous étudions le cas des oscillations libres et de faibles amplitudes. Les ressorts sont de masses négligeables et nous négligeons toute force de frottement (air, contact etc...). Calculer les périodes d'oscillations dans les systèmes suivants :



Les énergies potentielles des différents systèmes sont respectivement :

$$U_1 = \frac{1}{2} kx^2 + kx\Delta\ell + \frac{1}{2} k\Delta\ell^2$$

$$U_2 = \frac{1}{2} k(y + \Delta\ell)^2 - mgy = \frac{1}{2} ky^2 + y(k\Delta\ell - mg) + \frac{1}{2} k\Delta\ell^2$$

$$\begin{aligned} U_3 &= \frac{1}{2} k_1(y + \Delta\ell_1)^2 + \frac{1}{2} k_2(y + \Delta\ell_2)^2 - mgy \\ &= \frac{1}{2} (k_1 + k_2)y^2 + y(k_1\Delta\ell_1 + k_2\Delta\ell_2 - mg) + \frac{1}{2} k_1\Delta\ell_1^2 + \frac{1}{2} k_2\Delta\ell_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_4 &= \frac{1}{2} k_1(y + \Delta\ell_1)^2 + \frac{1}{2} k_2(y + \Delta\ell_2)^2 - mgy \\ &= \frac{1}{2} (k_1 + k_2)y^2 + y(k_1\Delta\ell_1 + k_2\Delta\ell_2 - mg) + \frac{1}{2} k_1\Delta\ell_1^2 + \frac{1}{2} k_2\Delta\ell_2^2 \end{aligned}$$

$$U_5 = \frac{1}{2} k(s + \Delta\ell)^2 - mgs \sin \alpha = \frac{1}{2} ks^2 + s(k\Delta\ell - mg \sin \alpha) + \frac{1}{2} k\Delta\ell^2$$

$$U_6 = -mg\ell \cos \theta = mg\ell \frac{\theta^2}{2} - mg\ell$$

1. En utilisant les conditions d'équilibre :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q=0} = 0$$

Nous avons :

- Le système 1 est un oscillateur avec $\Delta\ell = 0$.
- Le système 2 est un oscillateur avec $k\Delta\ell - mg = 0$.
- Le système 3 est un oscillateur avec $k_1\Delta\ell_1 + k_2\Delta\ell_2 - mg = 0$.
- Le système 4 identique au système 3.
- Le système 5 est un oscillateur avec $k\Delta\ell - mg \sin \alpha = 0$.
- Le système 6 est un oscillateur.

Cela permet de simplifier les expressions des énergies potentielles :

$$U_1 = \frac{1}{2}kx^2$$

$$U_2 = \frac{1}{2}ky^2$$

$$U_3 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)y^2$$

$$U_4 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)y^2$$

$$U_5 = \frac{1}{2}ks^2$$

$$U_6 = -mg\ell \cos \theta = mg\ell \frac{\theta^2}{2} - mg\ell$$

Les énergies cinétiques sont respectivement :

$$T_1 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

$$T_4 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

$$T_5 = \frac{1}{2}m\dot{s}^2$$

$$T_6 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

Nous obtenons les équations suivantes :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{Système 1})$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{Système 2})$$

$$\ddot{y} + \frac{(k_1 + k_2)}{m}y = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}, T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \quad (\text{Système 3})$$

$$\ddot{y} + \frac{(k_1 + k_2)}{m} y = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}, T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \quad (\text{Système 4})$$

$$\ddot{s} + \frac{k}{m} s = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (\text{Système 5})$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (\text{Système 6})$$

2. Un cylindre homogène, de masse m et de rayon r roule sans glisser sur une surface circulaire de rayon R (Figure ci-dessous). Calculer la pulsation propre du mouvement dans le cas des oscillations de faibles amplitudes.

Energie potentielle

$$U = -mg(R - r) \cos \theta \approx mg(R - r) \frac{\theta^2}{2}$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2} m(R - r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_G (\dot{\phi} - \dot{\theta})^2$$

Nous avons :

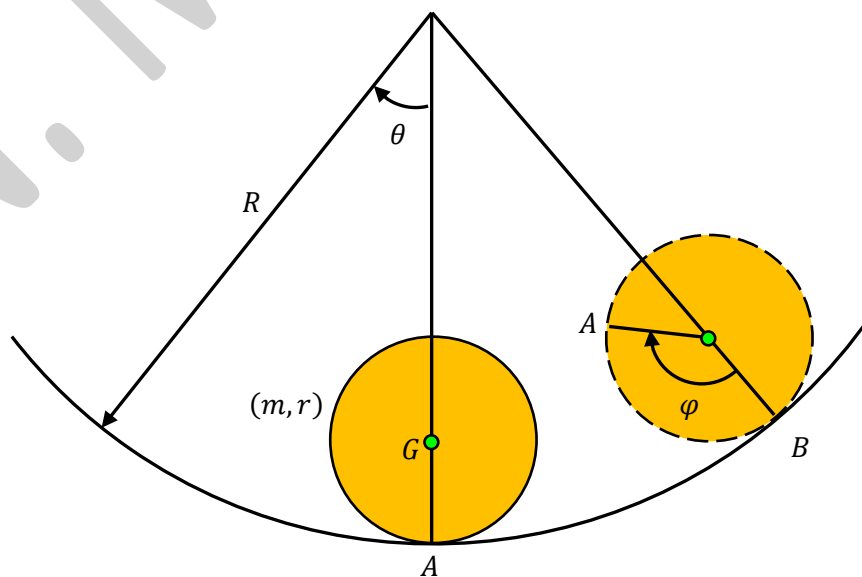
$$\begin{aligned} AB = R\theta = r\phi &\Rightarrow \phi = \frac{R}{r}\theta \\ T &= \frac{1}{2} m(R - r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} \left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[m(R - r)^2 + \frac{mr^2}{2} \left(\frac{R}{r} - 1\right)^2 \right] \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

L'équation du mouvement est :

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R - r)} \theta = 0$$

La pulsation propre est :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{3(R - r)}}$$



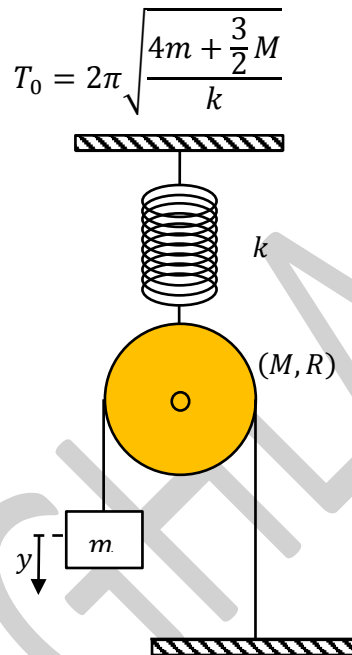
3. Une poulie de masse M et de rayon R est accroché à un bâti fixe par un ressort de raideur k . Une masse m est accrochée à une corde supposée inextensible (Figure ci-dessous). Déterminer la période d'oscillation dans le cas des faibles amplitudes.

Nous avons la relation suivante :

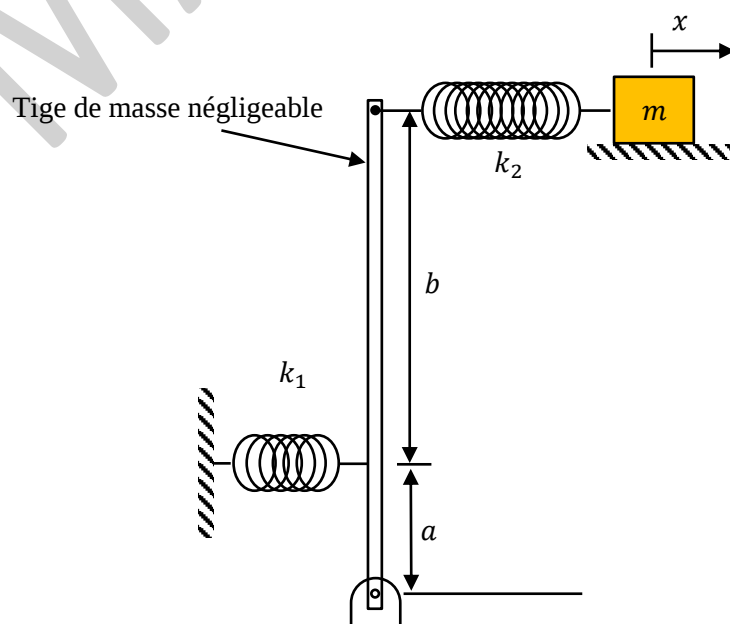
$$(y = 2R\theta)$$

$$T = T_M + T_m = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_G\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{3}{2}M\right)\dot{y}^2$$

$$U = \frac{1}{2}k\frac{y^2}{4}$$



4. Le système ci-dessous représente une tige de masse négligeable, accrochée à une masse m par l'intermédiaire du ressort k_2 et à un bâti fixe par l'intermédiaire d'un ressort k_1 . La masse m oscille sans frottement sur un plan horizontal. Déterminer la période d'oscillation dans le cas des faibles amplitudes.



L'énergie cinétique est :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

L'énergie potentielle est :

$$U = \frac{1}{2} k_1 (a\theta)^2 + \frac{1}{2} k_2 [x - (a + b)\theta]^2$$

La condition d'équilibre permet de trouver :

$$\theta = \frac{k_2(a + b)}{[k_1 a^2 + k_2(a + b)^2]} x$$

Cela nous permet de trouver :

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{k_1 k_2 a^2}{k_1 a^2 + k_2(a + b)^2} \right] y^2$$

La période des oscillations est :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{m \frac{k_1 a^2 + k_2(a + b)^2}{k_1 k_2 a^2}}$$

3. Oscillations libres de systèmes à 1 degré de liberté amortis

En plus des énergies cinétiques et potentiels décrites précédemment, nous avons la fonction de dissipation D qui est proportionnelle à $\dot{q}^2$. Cette fonction traduit le phénomène d'amortissement.

$$D = \frac{1}{2} c \dot{q}^2, c = \alpha \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \right]^2$$

$\vec{r}$ étant le vecteur déplacement

α représente le coefficient de frottement.

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \omega_0 = \sqrt{\frac{b}{a}} \text{ et } \delta = \frac{c}{2a}$$

Nous distinguons 3 cas.

Cas 1 ($\delta > \omega_0$)

Pas d'oscillation, le mouvement est apériodique (Figure 2). Dans ce cas la solution s'écrit :

$$q(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

$$r_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

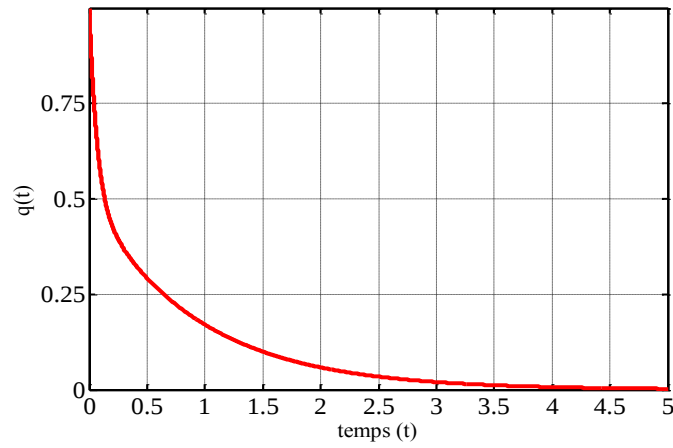


Figure 2

Cas 2 ($\omega_0 = \delta$)

Nous distinguons les prémices d'une oscillation, c'est le régime critique (Figure 3). Dans ce cas la solution s'écrit :

$$q(t) = (A + Bt)e^{-\delta t}$$

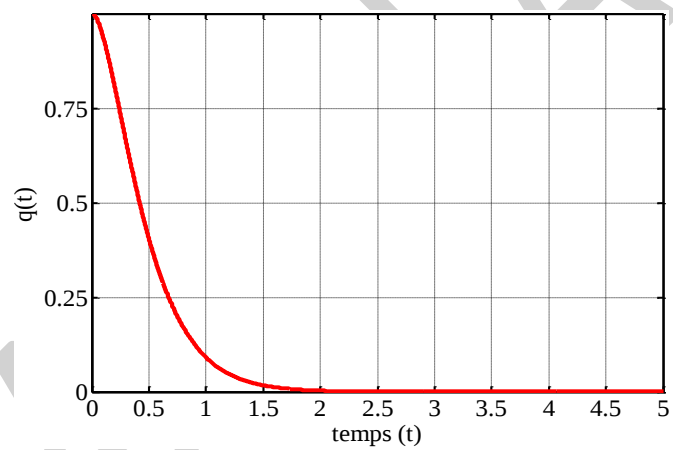


Figure 3

Cas 3 ($\delta < \omega_0$)

Nous avons un mouvement oscillatoire avec une diminution d'amplitude, le mouvement est dit pseudopériodique (Figure 4). Dans ce cas la solution s'écrit :

$$q(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

A , B et φ sont des constantes que l'on détermine à partir des conditions initiales.

ω_a représente la pseudo-pulsation.

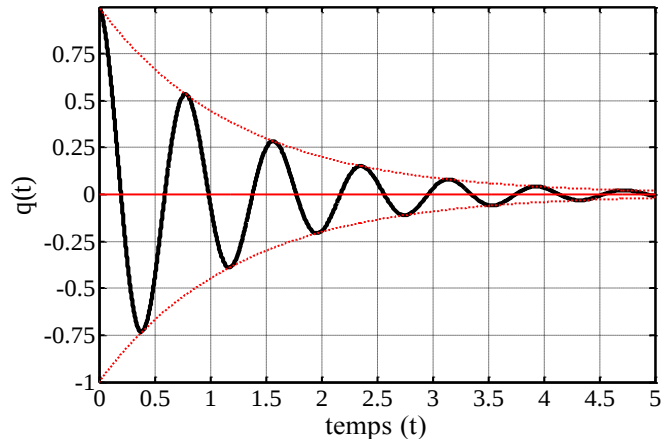


Figure 4

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$$

T_a représente la pseudo-période.

Le décrement logarithmique D est :

$$D = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{q(t)}{q(t + nT_a)} \right) = \delta T_a$$

$q(t)$ étant l'amplitude à un instant t et $q(t + nT_a)$ l'amplitude à un instant $t + nT_a$.

n est un nombre naturel qui représente le nombre de période qu'il y a entre les deux instants.

Le décrement logarithmique et la pseudo-période permettent de remonter aux caractéristiques du système.

Le coefficient de qualité est :

$$Q = \frac{\pi}{D}$$

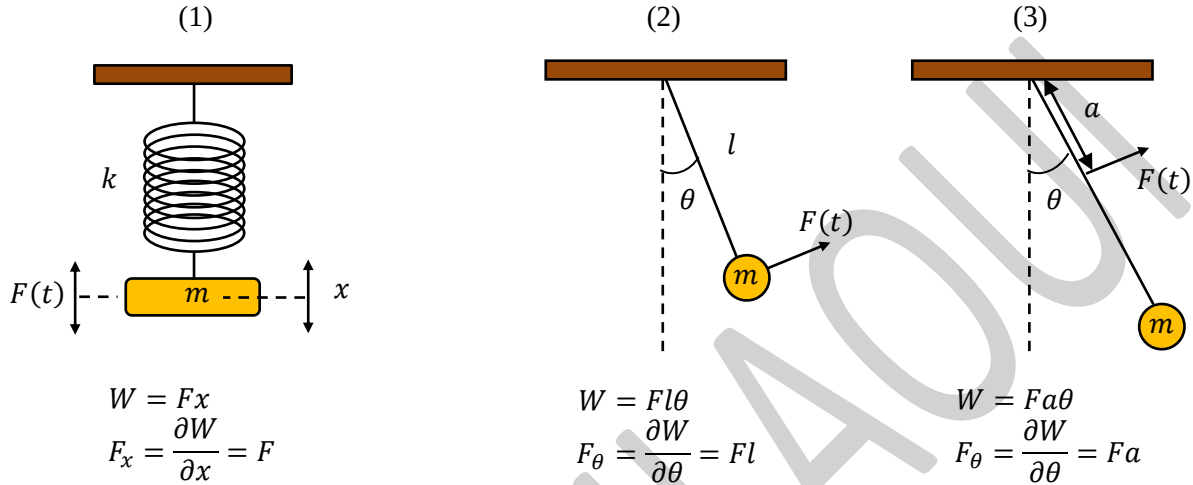
4. Oscillations forcées de systèmes à 1 degré de liberté

Les énergies cinétiques potentielles ainsi que la fonction de dissipation étant décrite précédemment, l'équation de Lagrange en présence de forces extérieures est :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q}$$

W représente la somme des travaux des forces extérieures.

Exemple (Les forces sont parallèles aux déplacements à tout instant t) :



La forme de l'équation obtenue est :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{F(t)}{c}$$

c est une constante qui dépend des caractéristiques du système.

Dans le cas d'une force sinusoïdale $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$

La solution générale est la somme de deux termes, une solution homogène qui tend vers zéro et une solution particulière qui est la solution dans le régime permanent. Comme le second membre est sinusoïdal alors la solution est sinusoïdale et de même pulsation (Figure 5).

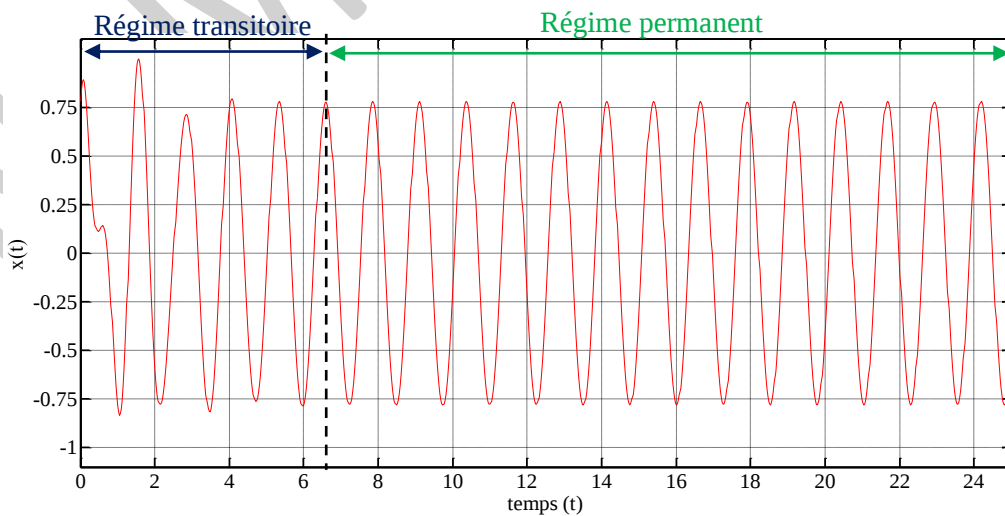


Figure 5

De ce fait : $q(t) = q_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$.

d'où : $\dot{q} = i\omega q$ et $\ddot{q} = -\omega^2 q$.

En remplaçant dans l'équation de mouvement nous obtenons :

$$q = \frac{\frac{F(t)}{c}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}$$

$$q_0 = \frac{\frac{F_0}{c}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$\varphi = -\text{Arctg}\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

La fonction $q_0(\omega)$ passe par un maximum pour une pulsation $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ (Figure 6).

Cette pulsation est appelée pulsation de résonance.

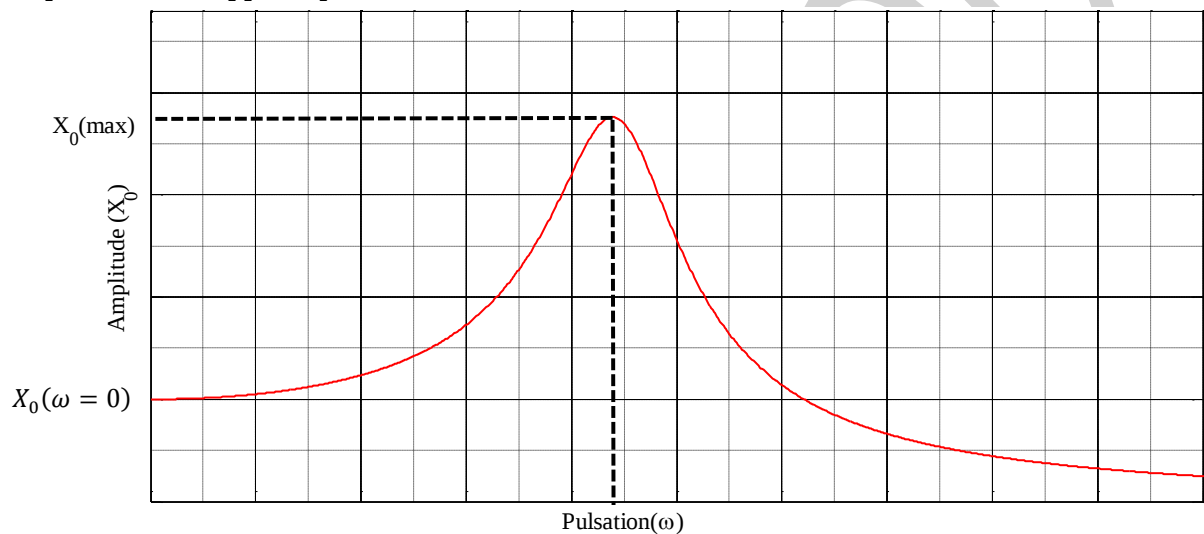


Figure 6 : Courbe de résonance en amplitude

Impédance mécanique du système

Nous appelons l'impédance mécanique le rapport :

$$Z = \frac{F(t)}{v(t)}$$

$F(t)$ représente la force appliquée au système.

$v(t)$ représente la vitesse du point d'application de la force.

L'impédance dépend des caractéristiques mécaniques du système, mais aussi de la pulsation de la force extérieure.

Impédances usuelles

Amortisseur α : $Z_\alpha = \alpha$

Masse m : $Z_m = jm\omega$

Ressort k : $Z_k = k/j\omega$

L'étude de l'impédance nous renseigne sur le comportement du système.

Puissances fournies-Puissances dissipées

Nous définissons la puissance fournie instantanée comme le produit de la force extérieure par la vitesse du point d'application de la force.

$$P_f = C F(t) \dot{q}(t) = C F_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi)$$

C est une constante qui dépend du problème

Nous définissons la puissance dissipée instantanée comme le produit de la force d'amortissement par la vitesse de déformation de l'amortisseur

$$P_{ab} = F_\alpha(t) v_\alpha(t) = \alpha [v_\alpha(t)]^2$$

La puissance moyenne est définie comme suit :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P(t) dt$$

T représente la période.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La résonance en puissance est obtenue pour $\omega = \omega_0$ (Figure 7).

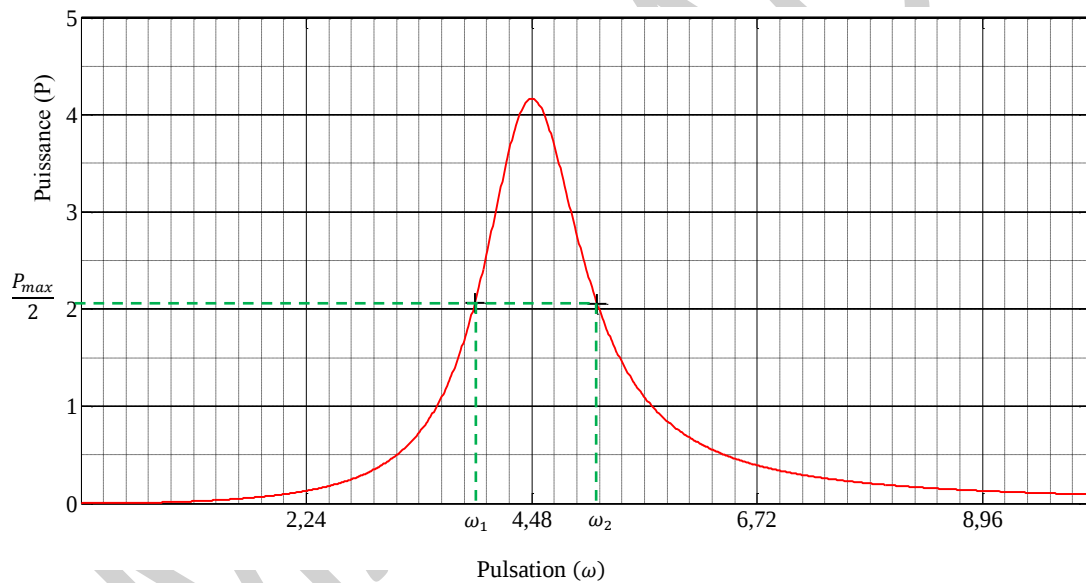


Figure 7 : Courbe de résonance en puissance

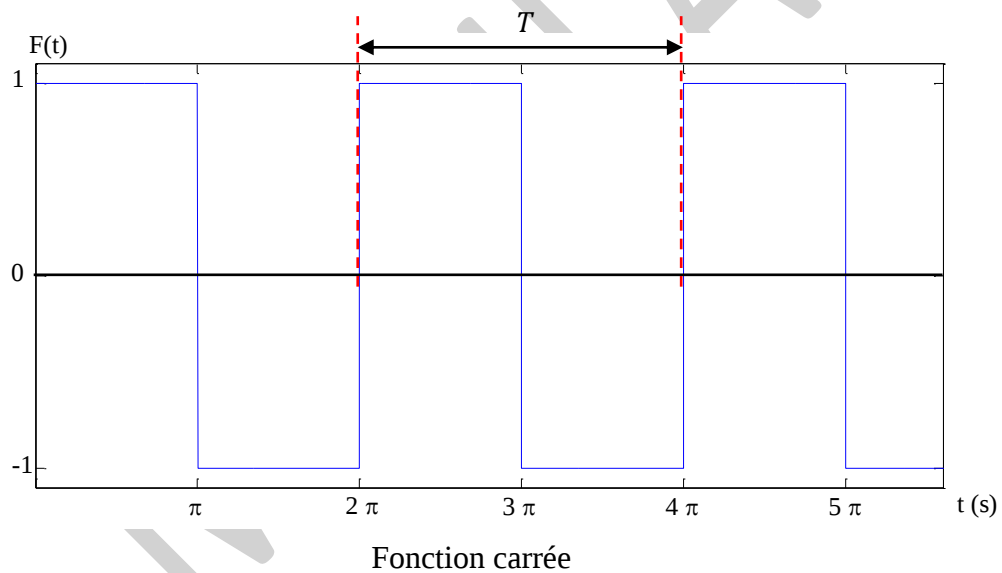
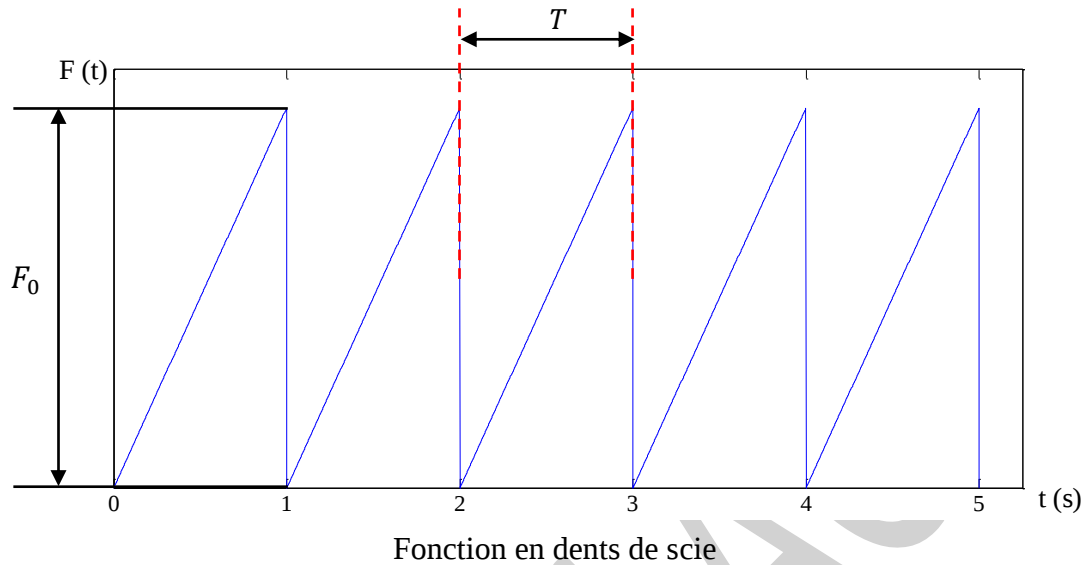
Nous définissons le coefficient de qualité par

$$Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega}$$

avec :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\delta$$

Dans le cas d'une excitation périodique de période T (Figures ci-dessous), non harmonique (non sinusoïdale), la fonction $F(t)$ peut-être écrite comme une superposition d'une infinité d'harmoniques (fonctions sinusoïdales).



$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

où $\omega = 2\pi/T$, n est un entier positif, a_n et b_n sont les coefficients de Fourier. Ces coefficients sont définis par :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\omega t) dt$$

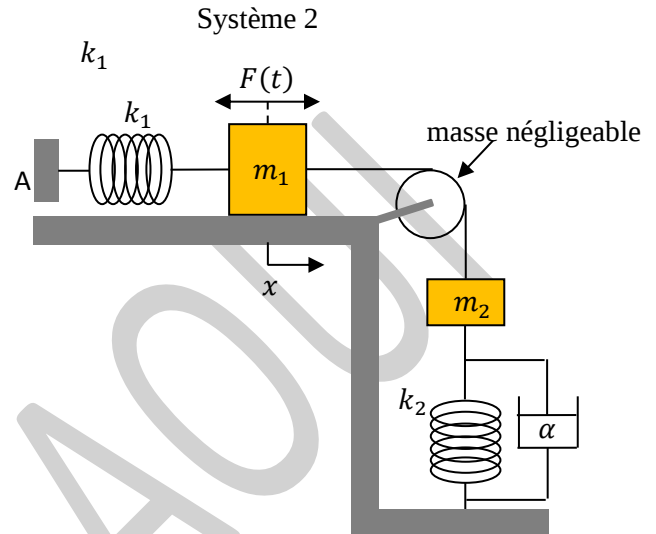
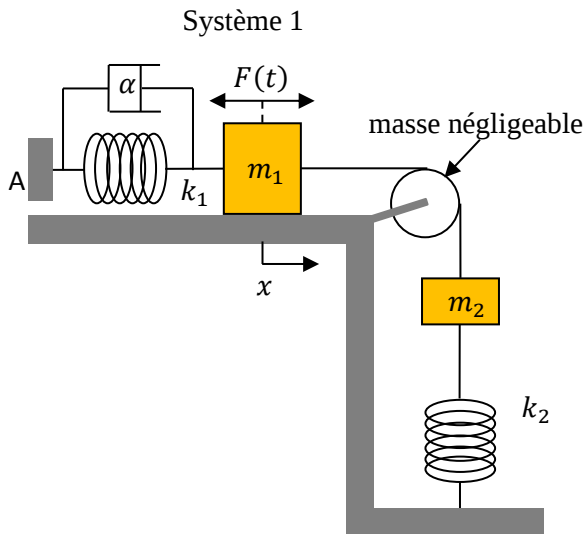
a_0 représente la valeur moyenne de la fonction $F(t)$ sur la période T .

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt$$

La solution de l'équation différentielle de mouvement s'écrit comme une superposition des solutions pour chaque harmonique. La pulsation $\omega_1 = \omega$, correspond à l'harmonique de rang 1, appelée aussi fondamentale.

Exercices corrigés

Soit 36 systèmes mécaniques (voir figures ci-dessous). Dans le cas des mouvements de faibles amplitudes, établissez les équations du mouvement.



Système 1 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x^2 + C$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot x$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + \alpha\dot{x} + (k_1 + k_2)x = F$$

Système 2 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x^2 + C$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

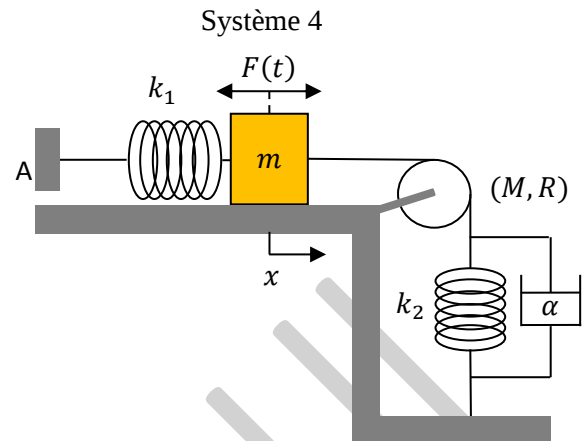
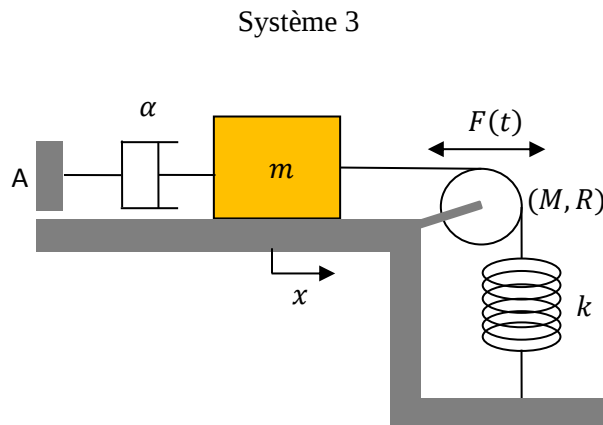
Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot x$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + \alpha\dot{x} + (k_1 + k_2)x = F$$



Système 3 :

$$x = R\theta$$

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)\dot{x}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot R\theta = Fx$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$\left(m + \frac{M}{2}\right)\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F$$

Système 4 :

$$x = R\theta$$

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x^2 + C$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)\dot{x}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

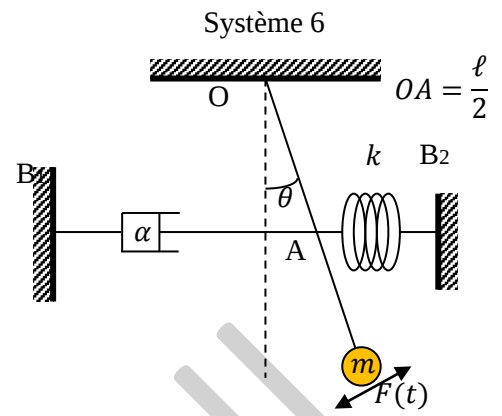
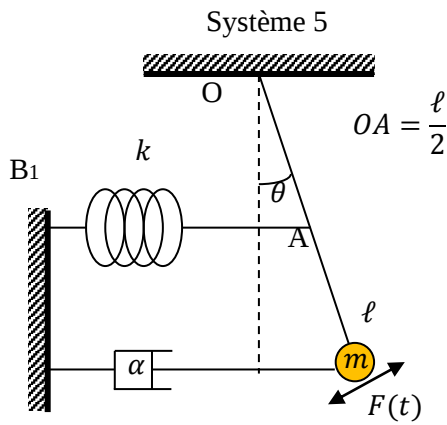
Travail de la force extérieure

$$W = Fx$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$\left(m + \frac{M}{2}\right)\ddot{x} + \alpha\dot{x} + (k_1 + k_2)x = F$$



Système 5 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k\left(\frac{\ell}{2}\theta\right)^2 + mg\ell\frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2}\left(k\frac{\ell^2}{4} + mg\ell\right)\theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha(\ell\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\alpha\ell^2\dot{\theta}^2$$

Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot \ell\theta$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$m\ell^2\ddot{\theta} + \alpha\ell^2\dot{\theta} + \left(k\frac{\ell^2}{4} + mg\ell\right)\theta = F\ell$$

Système 6 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k\left(\frac{\ell}{2}\theta\right)^2 + mg\ell\frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2}\left(k\frac{\ell^2}{4} + mg\ell\right)\theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\ell}{2}\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\alpha\frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}^2$$

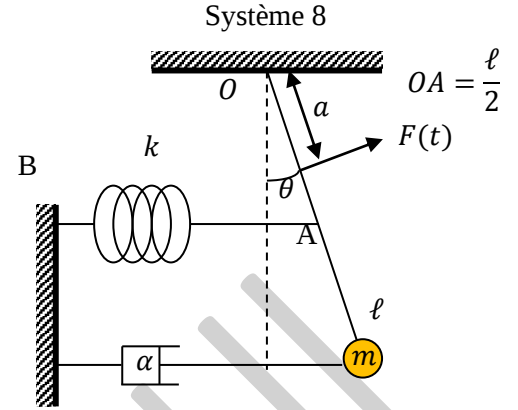
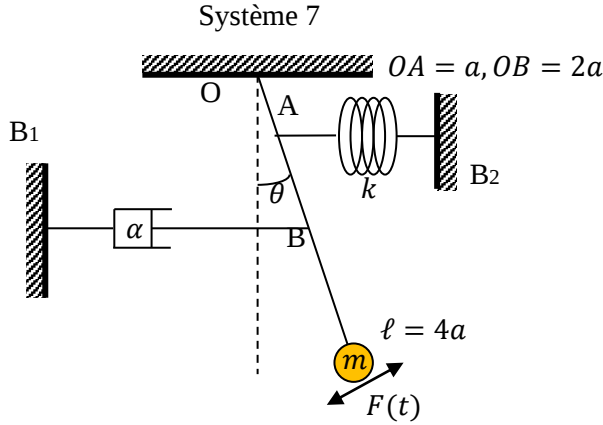
Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot \ell\theta$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$m\ell^2\ddot{\theta} + \alpha\frac{\ell^2}{4}\dot{\theta} + \left(k\frac{\ell^2}{4} + mg\ell\right)\theta = F\ell$$



Système 7 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k(a\theta)^2 + mg\ell \frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2}(ka^2 + mg4a)\theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m(16a^2)\dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\ell}{2}\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\alpha(4a^2)\dot{\theta}^2$$

Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot \ell\theta = F \cdot 4a\theta$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$16ma^2\ddot{\theta} + 4\alpha a^2\dot{\theta} + (ka^2 + 4mga)\theta = 4Fa$$

Système 8 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k\left(\frac{\ell}{2}\theta\right)^2 + mg\ell \frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2}\left(k\frac{\ell^2}{4} + mg\ell\right)\theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha(\ell\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\alpha\ell^2\dot{\theta}^2$$

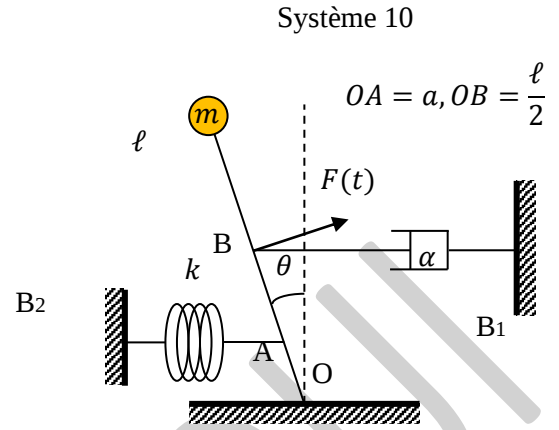
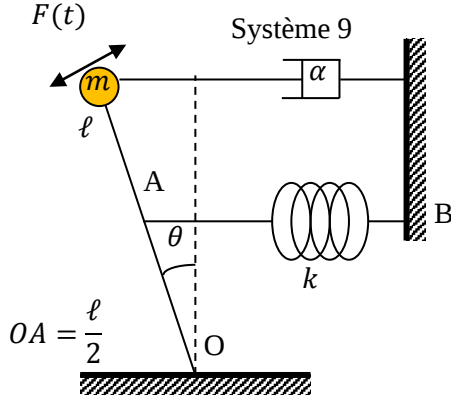
Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot a\theta$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$m\ell^2\ddot{\theta} + \alpha\ell^2\dot{\theta} + \left(k\frac{\ell^2}{4} + mg\ell\right)\theta = Fa$$



Système 9 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k\left(\frac{\ell}{2}\theta\right)^2 - mg\ell\frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2}\left(k\frac{\ell^2}{4} - mg\ell\right)\theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha(\ell\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\alpha\ell^2\dot{\theta}^2$$

Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot \ell\theta$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$m\ell^2\ddot{\theta} + \alpha\ell^2\dot{\theta} + \left(k\frac{\ell^2}{4} - mg\ell\right)\theta = F\ell$$

Système 10 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k(a\theta)^2 - mg\ell\frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2}(ka^2 - mg\ell)\theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\ell}{2}\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\alpha\frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}^2$$

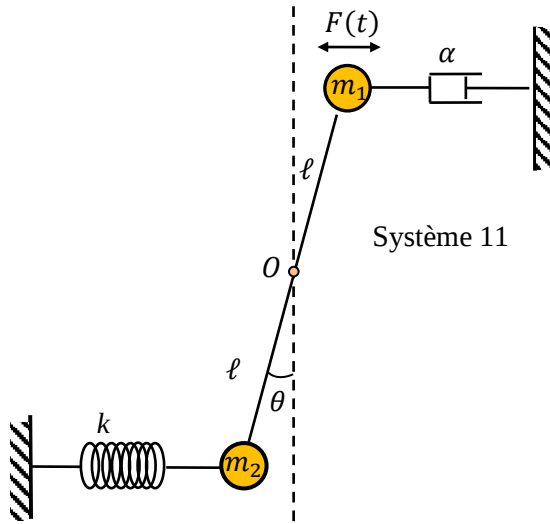
Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot \frac{\ell}{2}\theta$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$m\ell^2\ddot{\theta} + \alpha\frac{\ell^2}{4}\dot{\theta} + (ka^2 - mg\ell)\theta = F\frac{\ell}{2}$$



Système 11 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k(\ell\theta)^2 - m_1g\ell\frac{\theta^2}{2} + m_2g\ell\frac{\theta^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(k\ell^2 + m_2g\ell - m_1g\ell)\theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m_1(\ell\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_2(\ell\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\ell^2\dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha(\ell\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\alpha\ell^2\dot{\theta}^2$$

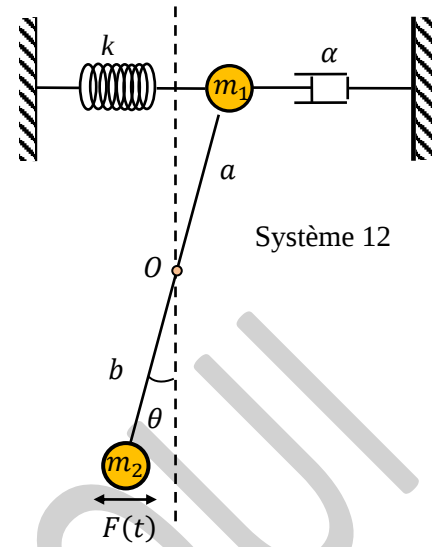
Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot \ell\theta$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$(m_1 + m_2)\ell^2\ddot{\theta} + \alpha\ell^2\dot{\theta} + (k\ell^2 + m_2g\ell - m_1g\ell)\theta = F\ell$$



Système 12 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k(a\theta)^2 - m_1ga\frac{\theta^2}{2} + m_2gb\frac{\theta^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(ka^2 + m_2gb - m_1ga)\theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m_1(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_2(b\dot{\theta})^2$$

$$= \frac{1}{2}(m_1a^2 + m_2b^2)\dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha(a\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\alpha a^2\dot{\theta}^2$$

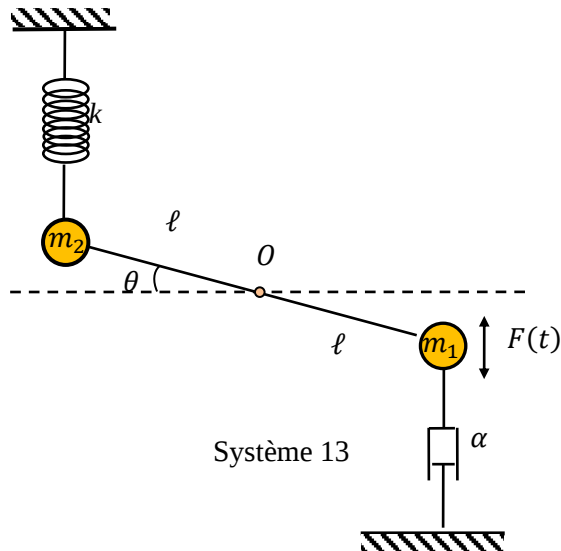
Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot b\theta$$

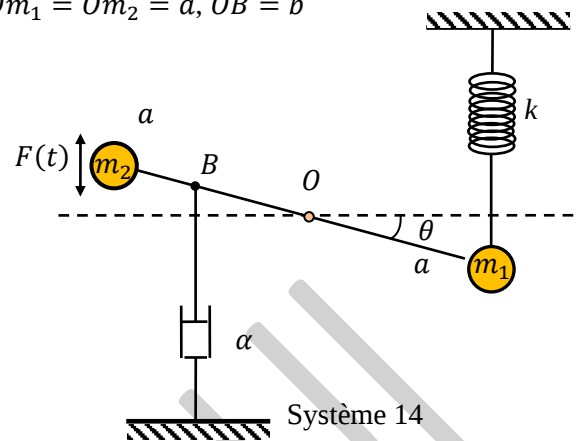
Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$(m_1a^2 + m_2b^2)\ddot{\theta} + \alpha a^2\dot{\theta} + (ka^2 + m_2gb - m_1ga)\theta = Fb$$



$$Om_1 = Om_2 = a, OB = b$$



Système 13 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k(\ell\theta)^2 = \frac{1}{2}k\ell^2\theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m_1(\ell\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_2(\ell\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\ell^2\dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha(\ell\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\alpha\ell^2\dot{\theta}^2$$

Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot \ell\theta$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$(m_1 + m_2)\ell^2\ddot{\theta} + \alpha\ell^2\dot{\theta} + k\ell^2\theta = F\ell$$

Système 14 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k(a\theta)^2 = \frac{1}{2}ka^2\theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m_1(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_2(a\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)a^2\dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha(b\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\alpha b^2\dot{\theta}^2$$

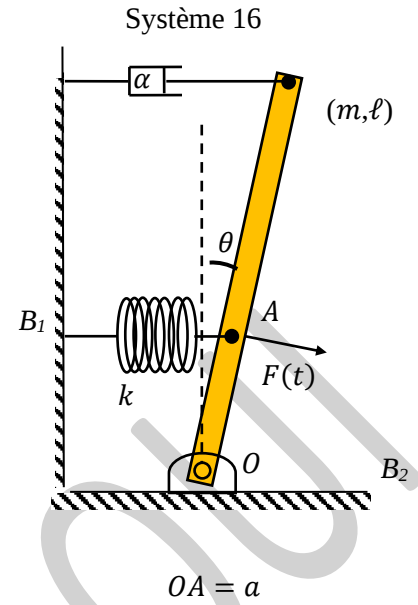
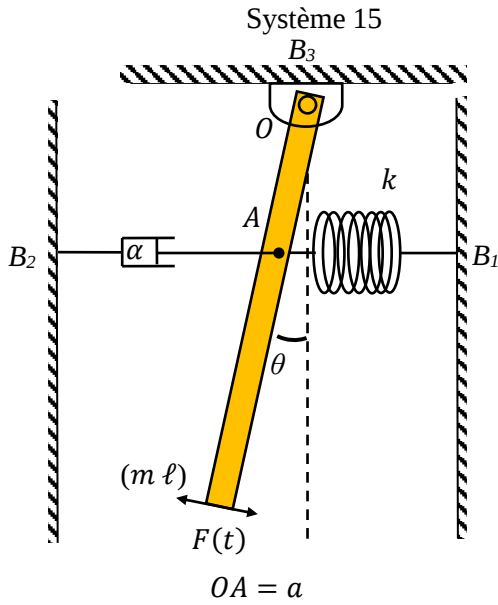
Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot a\theta$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$(m_1 + m_2)a^2\ddot{\theta} + \alpha b^2\dot{\theta} + ka^2\theta = Fa$$



Système 15 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k(a\theta)^2 + mg \frac{\ell}{2} \frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2} \left(ka^2 + mg \frac{\ell}{2} \right) \theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m \frac{\ell^2}{3} \dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha(a\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\alpha a^2 \dot{\theta}^2$$

Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot \ell \theta$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$m \frac{\ell^2}{3} \ddot{\theta} + \alpha a^2 \dot{\theta} + \left(ka^2 + mg \frac{\ell}{2} \right) \theta = F \ell$$

Système 16 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k(a\theta)^2 - mg \frac{\ell}{2} \frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2} \left(ka^2 - mg \frac{\ell}{2} \right) \theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m \frac{\ell^2}{3} \dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha(\ell\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\alpha \ell^2 \dot{\theta}^2$$

Travail de la force extérieure

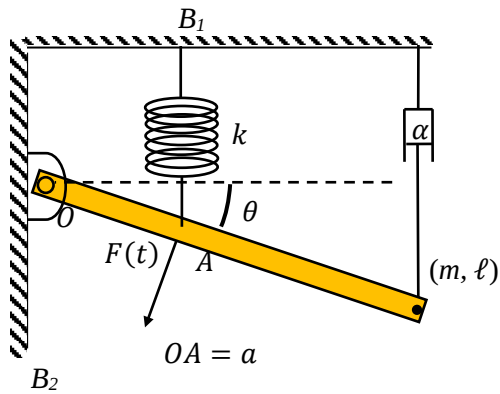
$$W = F \cdot a \theta$$

Equation de mouvement

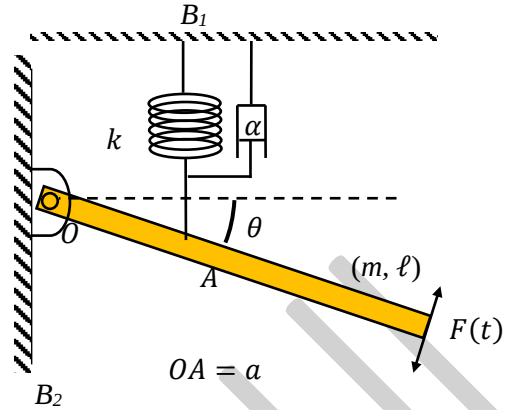
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$m \frac{\ell^2}{3} \ddot{\theta} + \alpha \ell^2 \dot{\theta} + \left(ka^2 - mg \frac{\ell}{2} \right) \theta = Fa$$

Système 17



Système 18

**Système 17 :**

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2} k(a\theta)^2 = \frac{1}{2} k a^2 \theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2} m \frac{\ell^2}{3} \dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2} \alpha (\ell \dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} \alpha \ell^2 \dot{\theta}^2$$

Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot a\theta$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$m \frac{\ell^2}{3} \ddot{\theta} + \alpha \ell^2 \dot{\theta} + k a^2 \theta = F a$$

Système 18 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2} k(a\theta)^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2} m \frac{\ell^2}{3} \dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2} \alpha (a\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} \alpha a^2 \dot{\theta}^2$$

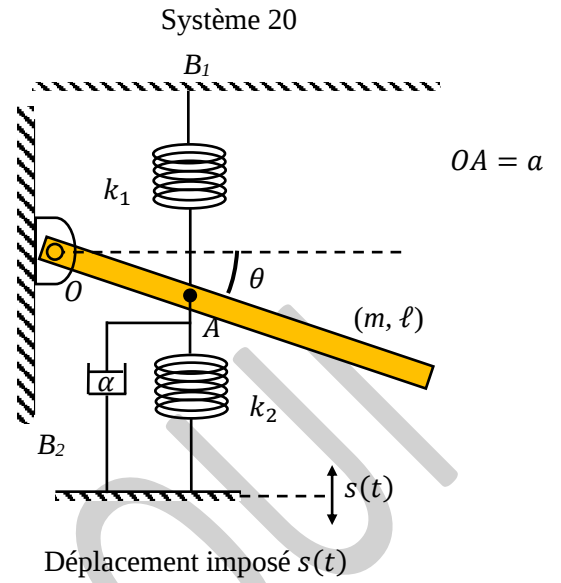
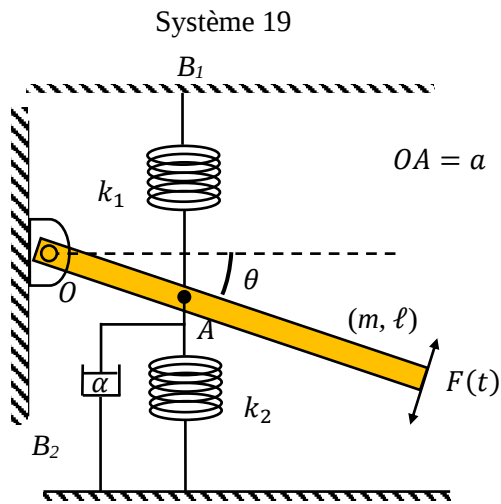
Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot \ell \theta$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$m \frac{\ell^2}{3} \ddot{\theta} + \alpha a^2 \dot{\theta} + k a^2 \theta = F \ell$$



Système 19 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)(a\theta)^2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)a^2\theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\frac{\ell^2}{3}\dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha(a\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\alpha a^2\dot{\theta}^2$$

Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot \ell\theta$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$m\frac{\ell^2}{3}\ddot{\theta} + \alpha a^2\dot{\theta} + (k_1 + k_2)a^2\theta = F\ell$$

Système 20 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k_1(a\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(s - a\theta)^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\frac{\ell^2}{3}\dot{\theta}^2$$

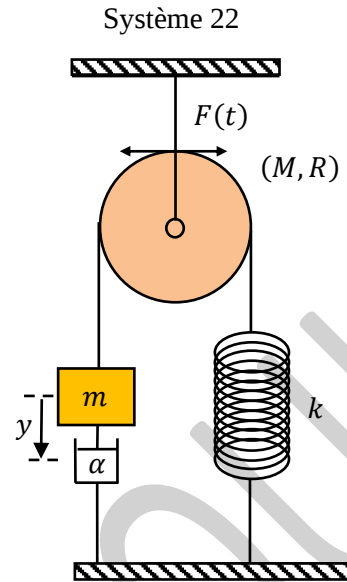
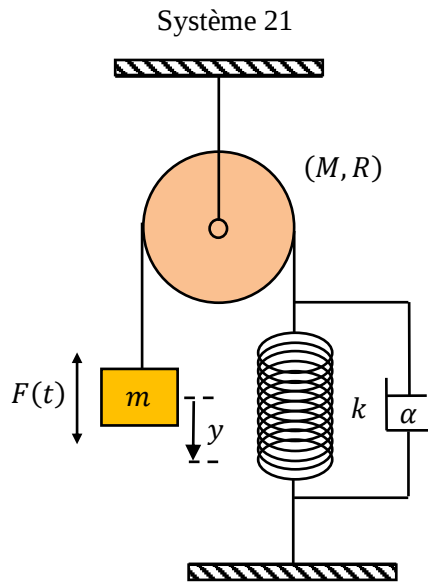
Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{s} - a\dot{\theta})^2$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

$$m\frac{\ell^2}{3}\ddot{\theta} + \alpha a^2\dot{\theta} + (k_1 + k_2)a^2\theta = (\alpha\dot{s} + k_2s)a$$



Système 21 :

$$y = R\theta$$

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k(R\theta)^2 = \frac{1}{2}ky^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)\dot{y}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha(R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$$

Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot y$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial y} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial y}$$

$$\left(m + \frac{M}{2}\right)\ddot{y} + \alpha\dot{y} + ky = F$$

Système 22 :

$$y = R\theta$$

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k(R\theta)^2 = \frac{1}{2}ky^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)\dot{y}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$$

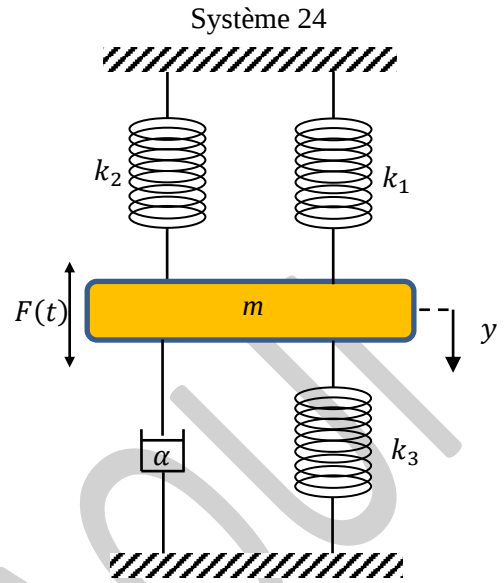
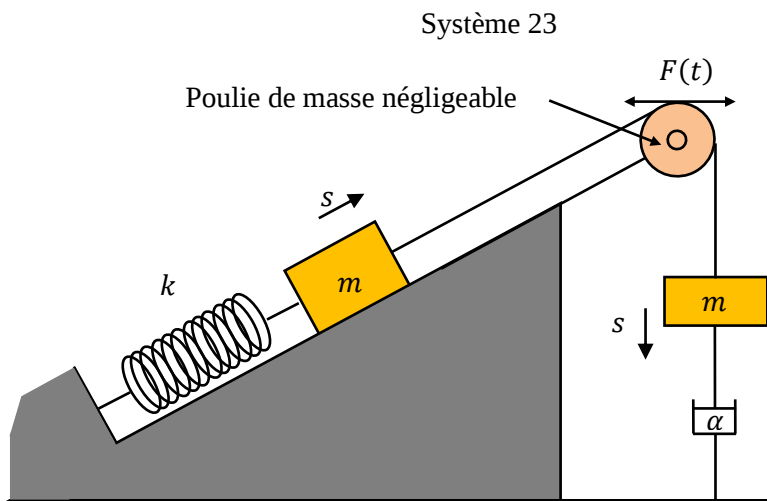
Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot R\theta = F \cdot y$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial y} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial y}$$

$$\left(m + \frac{M}{2}\right)\ddot{y} + \alpha\dot{y} + ky = F$$



Système 23 :

$$s = R\theta$$

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}ks^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}2m\dot{s}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{s}^2$$

Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot R\theta = F \cdot s$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = \frac{\partial W}{\partial s} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{s}} + \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial W}{\partial s}$$

$$2m\ddot{s} + \alpha\dot{s} + ks = F$$

Système 24 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}(k_1 + k_2 + k_3)y^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$$

Travail de la force extérieure

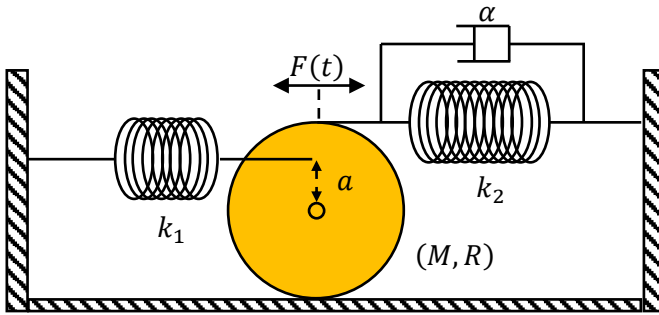
$$W = F \cdot y$$

Equation de mouvement

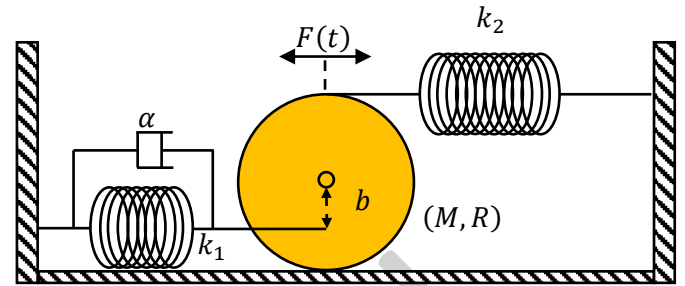
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

$$m\ddot{y} + \alpha\dot{y} + (k_1 + k_2 + k_3)y = F$$

Système 25



Système 26



Système 25 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k_1(R\theta + a\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(2R\theta)^2$$

$$= \frac{1}{2}[k_1(R + a)^2 + 4k_2R^2]\theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha(2R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}4\alpha R^2\dot{\theta}^2$$

Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot 2R\theta$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta} + 4\alpha R^2\dot{\theta} + [k_1(R + a)^2 + 4k_2R^2]\theta = 2FR$$

Système 26 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k_1(R\theta - b\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(2R\theta)^2$$

$$= \frac{1}{2}[k_1(R - b)^2 + 4k_2R^2]\theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha(R\dot{\theta} - b\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\alpha(R - b)^2\dot{\theta}^2$$

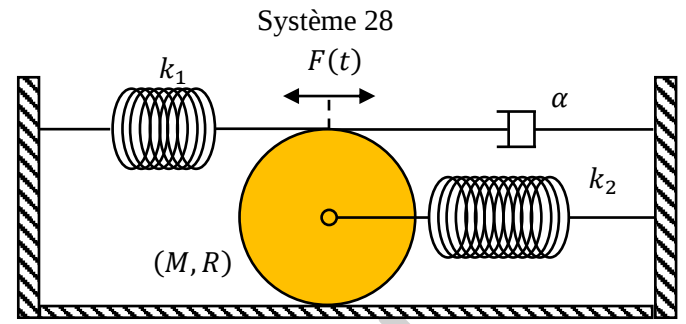
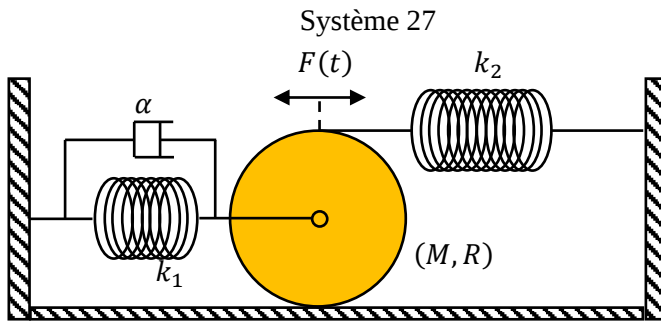
Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot 2R\theta$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta} + \alpha(R - b)^2\dot{\theta} + [k_1(R - b)^2 + 4k_2R^2]\theta = 2FR$$



Système 27 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k_1(R\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(2R\theta)^2$$

$$= \frac{1}{2}[k_1R^2 + 4k_2R^2]\theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha(R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2$$

Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot 2R\theta$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + [k_1R^2 + 4k_2R^2]\theta = 2FR$$

Système 28 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k_1(2R\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(R\theta)^2$$

$$= \frac{1}{2}[4k_1R^2 + k_2R^2]\theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha(2R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\alpha 4R^2\dot{\theta}^2$$

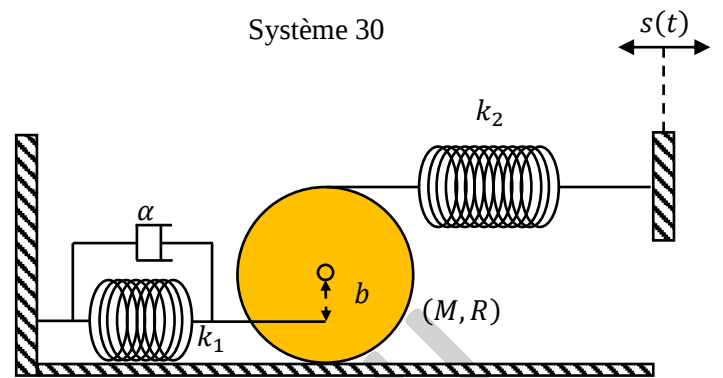
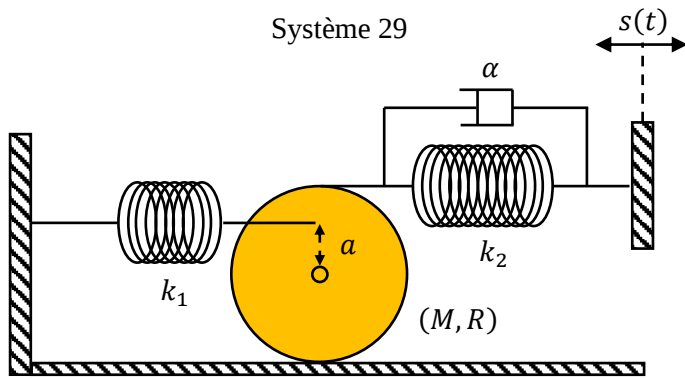
Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot 2R\theta$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta} + 4\alpha R^2\dot{\theta} + [4k_1R^2 + k_2R^2]\theta = 2FR$$



Système 29 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2} k_1 (R\theta + a\theta)^2 + \frac{1}{2} k_2 (2R\theta - s)^2$$

$$= \frac{1}{2} k_1 (R + a)^2 \theta^2 + \frac{1}{2} k_2 (2R\theta - s)^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2} \frac{3}{2} MR^2 \dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2} \alpha (2R\dot{\theta} - \dot{s})^2$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$\frac{3}{2} MR^2 \ddot{\theta} + 4\alpha R^2 \dot{\theta} + [k_1 (R + a)^2 + 4k_2 R^2] \theta = 2R(\alpha \dot{s} + k_2 s)$$

Système 30 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2} k_1 (R\theta - b\theta)^2 + \frac{1}{2} k_2 (2R\theta - s)^2$$

$$= \frac{1}{2} k_1 (R - b)^2 \theta^2 + \frac{1}{2} k_2 (2R\theta - s)^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2} \frac{3}{2} MR^2 \dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

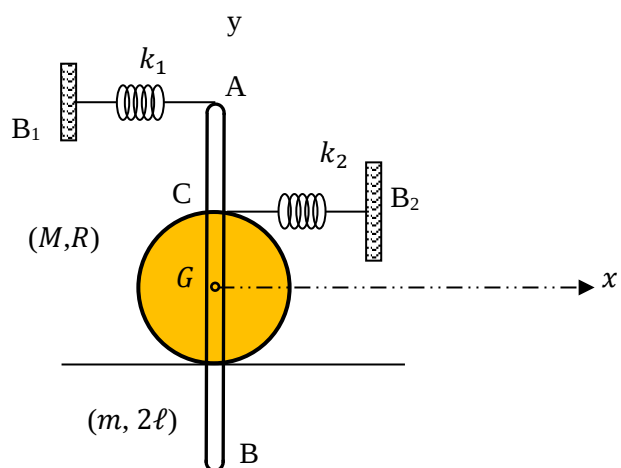
$$D = \frac{1}{2} \alpha (R\dot{\theta} - b\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} \alpha (R - b)^2 \dot{\theta}^2$$

Equation de mouvement

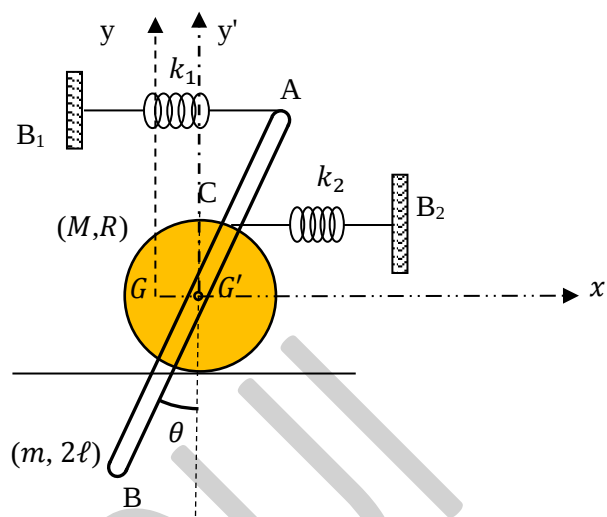
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$\frac{3}{2} MR^2 \ddot{\theta} + \alpha (R - b)^2 \dot{\theta} + [k_1 (R - b)^2 + 4k_2 R^2] \theta = 2k_2 R s$$

Système 31

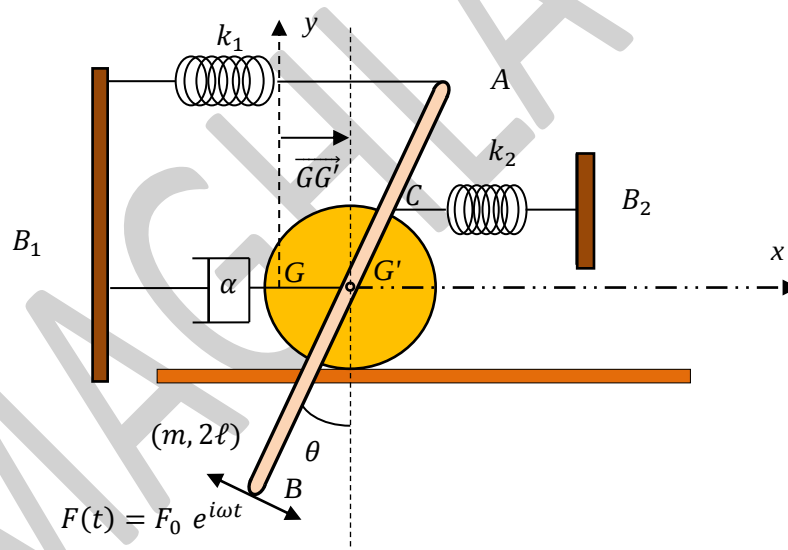


(31.a): Système en équilibre



(31.b) : Système en oscillation

Système 32



Système 31 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k_1(R\theta + \ell\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(2R\theta)^2$$

$$= \frac{1}{2}k_1(R + \ell)^2\theta^2 + \frac{1}{2}k_24R^2\theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}\frac{3}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m(2\ell)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}MR^2 + \left(\frac{1}{3}m\ell^2 + mR^2\right)\right]\dot{\theta}^2$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

$$\left[\frac{3}{2}MR^2 + \left(\frac{m\ell^2}{3} + mR^2\right)\right]\ddot{\theta} + [k_1(R + \ell)^2 + 4k_2R^2]\theta = 0$$

Système 32 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k_1(R\theta + \ell\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(2R\theta)^2$$

$$= \frac{1}{2}k_1(R + \ell)^2\theta^2 + \frac{1}{2}k_24R^2\theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}\frac{3}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m(2\ell)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}MR^2 + \left(\frac{1}{3}m\ell^2 + mR^2\right)\right]\dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha(R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2$$

Travail de la force extérieure

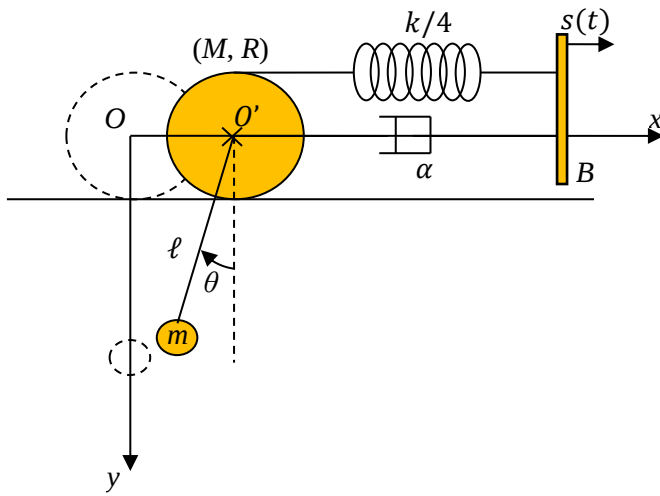
$$W = F \cdot (R - \ell)\theta$$

Equation de mouvement

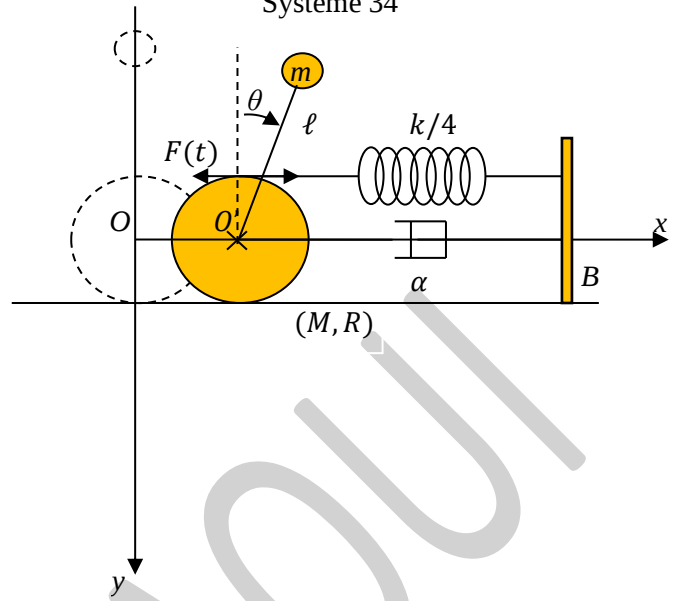
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$\left[\frac{3}{2}MR^2 + \left(\frac{m\ell^2}{3} + mR^2\right)\right]\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + [k_1(R + \ell)^2 + 4k_2R^2]\theta = F \cdot (R - \ell)$$

Système 33



Système 34

**Système 33 :**

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2} \frac{k}{4} (2R\theta - s)^2 + mg\ell \frac{\theta^2}{2}$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} MR^2 + m(R - \ell)^2 \right] \dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2} \alpha (R\dot{\theta} - \dot{s})^2$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

$$\left[\frac{3}{2} MR^2 + m(R - \ell)^2 \right] \ddot{\theta} + \alpha R^2 \dot{\theta} + [kR^2 + mg\ell] \theta = R \left(\alpha \dot{s} + \frac{k}{2} s \right)$$

Système 34 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2} \frac{k}{4} (2R\theta)^2 - mg\ell \frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2} (kR^2 - mg\ell) \theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} MR^2 + m(R + \ell)^2 \right] \dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2} \alpha (R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} \alpha R^2 \dot{\theta}^2$$

Travail de la force extérieure

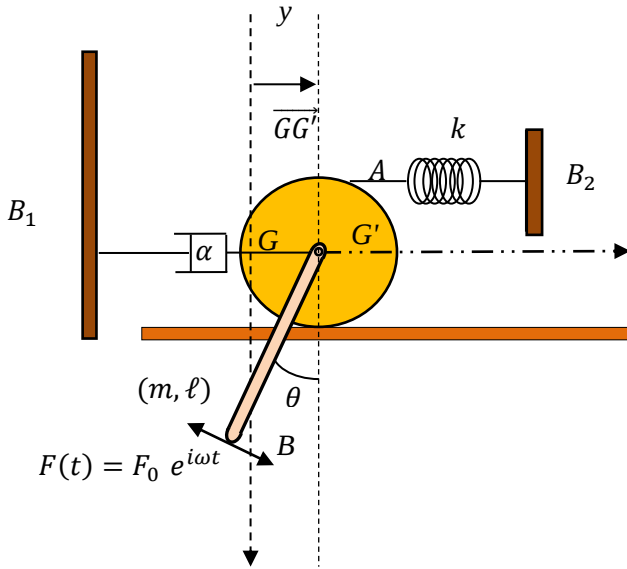
$$W = F \cdot 2R\theta$$

Equation de mouvement

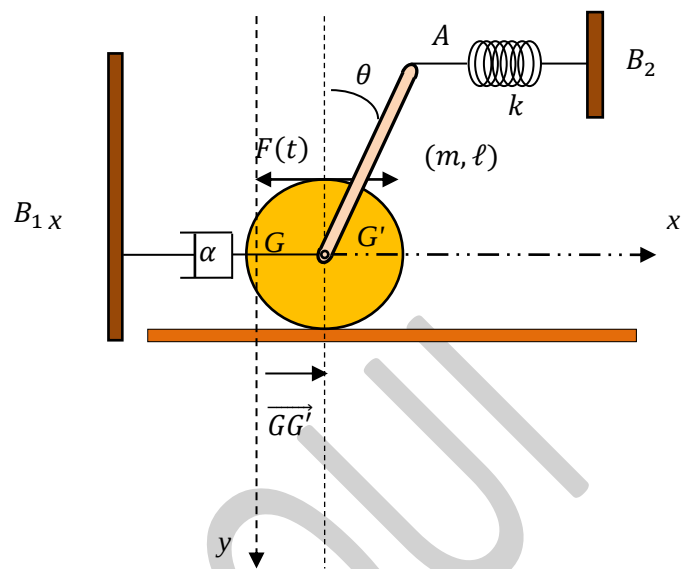
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$\left[\frac{3}{2} MR^2 + m(R + \ell)^2 \right] \ddot{\theta} + \alpha R^2 \dot{\theta} + [kR^2 - mg\ell] \theta = 2FR$$

Système 35



Système 36



Système 35 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2} k (2R\theta)^2 + \frac{1}{2} mg \frac{\ell}{2} \theta^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(4kR^2 + mg \frac{\ell}{2} \right) \theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2} \frac{3}{2} MR^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \left(R\dot{\theta} - \frac{\ell}{2} \dot{\theta} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} MR^2 + \frac{1}{12} m \ell^2 + m \left(R - \frac{\ell}{2} \right)^2 \right] \dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2} \alpha (R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} \alpha R^2 \dot{\theta}^2$$

Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot (R - \ell) \theta$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$\left[\frac{3}{2} MR^2 + \frac{1}{12} m \ell^2 + m \left(R - \frac{\ell}{2} \right)^2 \right] \ddot{\theta} + \alpha R^2 \dot{\theta}$$

$$+ \left(4kR^2 + mg \frac{\ell}{2} \right) \theta = F \cdot (R - \ell)$$

Système 36 :

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2} k (R\theta + \ell\theta)^2 - \frac{1}{2} mg \frac{\ell}{2} \theta^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[k(R + \ell)^2 - mg \frac{\ell}{2} \right] \theta^2$$

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2} \frac{3}{2} MR^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \left(R\dot{\theta} + \frac{\ell}{2} \dot{\theta} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} MR^2 + \frac{1}{12} m \ell^2 + m \left(R + \frac{\ell}{2} \right)^2 \right] \dot{\theta}^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2} \alpha (R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} \alpha R^2 \dot{\theta}^2$$

Travail de la force extérieure

$$W = F \cdot 2R\theta$$

Equation de mouvement

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

$$\left[\frac{3}{2} MR^2 + \frac{1}{12} m \ell^2 + m \left(R + \frac{\ell}{2} \right)^2 \right] \ddot{\theta} + \alpha R^2 \dot{\theta}$$

$$+ \left[k(R + \ell)^2 - mg \frac{\ell}{2} \right] \theta = 2FR$$

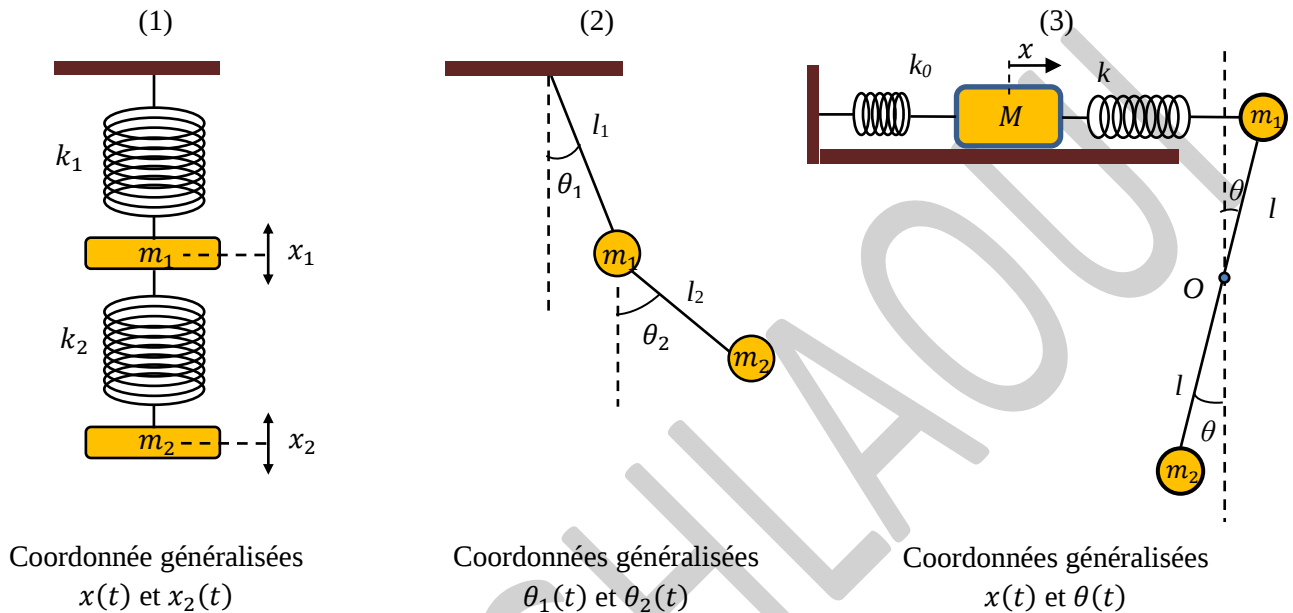
Oscillations libres puis forcées des systèmes à 2 degrés de liberté

Résumé de cours

1. Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté

Ces systèmes nécessitent 2 coordonnées généralisées pour connaître leurs positions.

Exemple



Il y a autant d'équations de Lagrange que de coordonnées généralisées. Dans le cas d'un système à 2 degrés de liberté, soumis à des forces qui dérivent d'un potentiel et en absence de tout frottement nous avons 2 équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \end{cases}$$

Dans la suite du cours, nous considérerons le système suivant (Figure 1) :

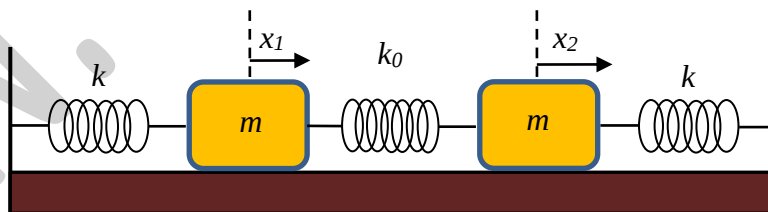


Figure 1

Nous négligeons tout frottement.

Les énergies cinétiques et potentielles sont respectivement :

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$$

$$U = \frac{1}{2} [kx_1^2 + kx_2^2 + k_0(x_2 - x_1)^2]$$

Les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k + k_0)x_1 - k_0x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + (k + k_0)x_2 - k_0x_1 = 0 \end{cases}$$

Les solutions s'écrivent :

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t} \text{ et } x_2 = A_2 e^{i\omega t}$$

En injectant dans l'équation précédente :

$$\begin{cases} (-m\omega^2 + k + k_0)A_1 - k_0A_2 = 0 \\ (-m\omega^2 + k + k_0)A_2 - k_0A_1 = 0 \end{cases}$$

qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} -m\omega^2 + k + k_0 & -k_0 \\ -k_0 & -m\omega^2 + k + k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0$$

Pour que ce système admette des solutions non triviales, il faut que le déterminant de la matrice soit nul :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -m\omega^2 + k + k_0 & -k_0 \\ -k_0 & -m\omega^2 + k + k_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(k + k_0 - m\omega^2)^2 - k_0^2 = 0 \Rightarrow (k - m\omega^2)(k + 2k_0 - m\omega^2) = 0$$

Les solutions sont :

$$\omega_1 = \frac{k}{m}, \omega_2 = \frac{k + 2k_0}{m}$$

ω_1 et ω_2 sont les pulsations propres. Il y a autant de pulsations que de degrés de liberté.

La solution générale est donc une combinaison de deux modes :

$$\begin{cases} x_1 = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 = A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Les constantes A_{ij} et φ_j sont déterminés à partir des conditions initiales. Le premier indice se réfère à la coordonnée et le second à la pulsation.

Nous avons quatre conditions pour six inconnues. Les amplitudes dans chaque mode sont liées par des relations que nous appelons rapports d'amplitudes.

mode 1 ($\omega = \omega_1$) :

$$\begin{cases} x_1 = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2 = A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \end{cases}$$

Elles satisfont aux équations du mouvement :

$$(-m\omega_1^2 + k + k_0)A_{11} - k_0A_{21} = 0$$

Nous remplaçons ω_1^2 par son expression, pour trouver le premier rapport :

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = 1$$

mode 2 ($\omega = \omega_2$) :

$$\begin{cases} x_1 = A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 = A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Elles satisfont aux équations du mouvement :

$$(-m\omega_2^2 + k + k_0)A_{12} - k_0 A_{22} = 0$$

Nous remplaçons ω_2^2 par son expression, pour trouver le premier rapport :

$$\frac{A_{22}}{A_{12}} = -1$$

Ce rapport permet d'écrire la solution générale comme suit :

$$\begin{cases} x_1 = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

A partir des conditions initiales nous pouvons déterminer les constantes A_{11} , A_{12} , φ_1 et φ_2

Cas 1 ($x_1(0) = x_2(0) = a$ et $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$)

Ces conditions donnent :

$$x_1(t) = x_2(t) = a \cos(\omega_1 t)$$

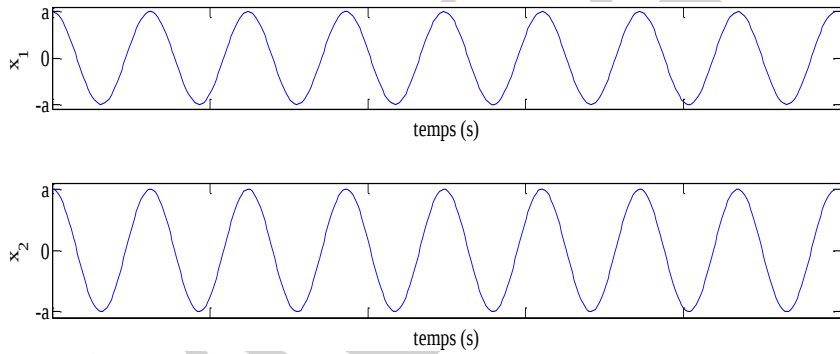


Figure 2

Le système oscille dans le mode 1 et les deux masses sont en phase (Figure 2).

Cas 2 ($x_1(0) = -x_2(0) = a$ et $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$)

Ces conditions donnent :

$$x_1(t) = -x_2(t) = a \cos(\omega_2 t)$$

Dans ce cas, le système oscille dans le mode 2 et les deux masses sont en opposition de phase (Figure 3).

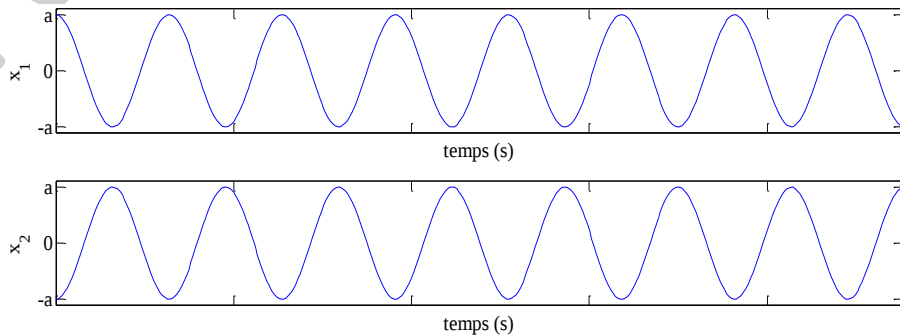


Figure 3

Cas 3 ($x_1(0) = a$, $x_2(0) = 0$ et $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$)

Ces conditions donnent :

$$x_1(t) = a \cos \left[\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) t \right] \cos \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t \right]$$

$$x_2(t) = a \sin \left[\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) t \right] \sin \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t \right]$$

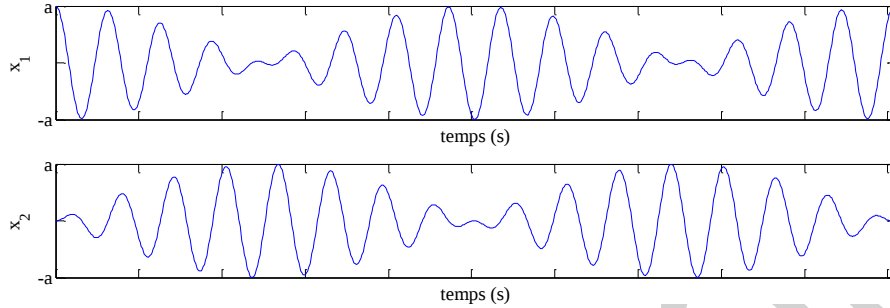


Figure 4

Nous appelons ce mode d'oscillation, le mode battement. Ce mode existe dans le cas des faibles valeurs de couplage (k_0 faible).

2. Oscillations forcées de systèmes à 2 degrés de liberté

Dans le cas d'un système forcé à 2 degrés de liberté, soumis à des forces qui dérivent d'un potentiel et à des forces de frottement proportionnelles à la vitesse les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial W}{\partial q_1} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial W}{\partial q_2} \end{cases}$$

W représente la somme des travaux des forces extérieures.

Soit le système mécanique de la figure (5).

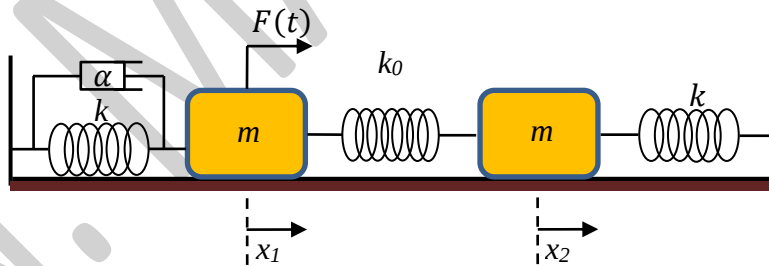


Figure 5

Les énergies cinétiques et potentielles sont :

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$$

$$U = \frac{1}{2} [kx_1^2 + kx_2^2 + k_0(x_2 - x_1)^2]$$

La fonction de dissipation :

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}_1^2$$

Le travail effectué par la force $F(t)$ le long d'un déplacement x_1 est :

$$W = F(t)x_1(t)$$

Dans le cas d'une force sinusoïdale d'amplitude F_0 et de pulsation ω : $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial W}{\partial x_1} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial W}{\partial x_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + (k + k_0)x_1 - k_0x_2 = F \\ m\ddot{x}_2 + (k + k_0)x_2 - k_0x_1 = 0 \end{cases}$$

Dans le régime permanent les solutions s'écrivent :

$$x_1(t) = A e^{i(\omega t + \varphi_1)} \text{ et } x_2(t) = B e^{i(\omega t + \varphi_2)}$$

Nous avons donc :

$$\dot{x}_1 = i\omega x_1, \ddot{x}_1 = i\omega \dot{x}_1, \dot{x}_2 = i\omega x_2 \text{ et } \ddot{x}_2 = i\omega \dot{x}_2$$

En remplaçant dans le système d'équation :

$$\begin{cases} [-m\omega^2 + k + k_0 + i\alpha\omega]x_1 - k_0x_2 = F \\ [-m\omega^2 + k + k_0]x_2 - k_0x_1 = 0 \end{cases}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} x_1 &= F \left[\frac{(-m\omega^2 + k + k_0)}{(-m\omega^2 + k + k_0)^2 - k_0^2 + i\alpha\omega(-m\omega^2 + k + k_0)} \right] \\ x_2 &= F \left[\frac{k_0}{(-m\omega^2 + k + k_0)^2 - k_0^2 + i\alpha\omega(-m\omega^2 + k + k_0)} \right] \end{aligned}$$

Nous obtenons les pulsations de résonance

$$\omega_{r1} = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_{r2} = \sqrt{\frac{k + 2k_0}{m}}$$

La pulsation d'antirésonance

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k + k_0}{m}}$$

Nous obtenons deux résonances et une antirésonance caractérisée par un déplacement nul.

Nous définissons l'impédance d'entrée comme le rapport suivant :

$$Z_e = \frac{F}{\dot{x}_1} = \alpha - i \frac{(-m\omega^2 + k + k_0)^2 - k_0^2}{\omega(-m\omega^2 + k + k_0)}$$

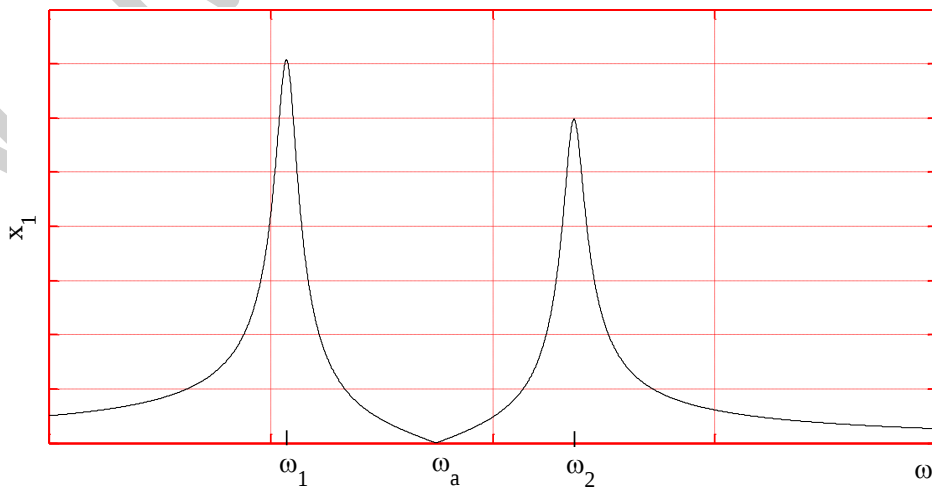


Figure 5

A la résonance l'impédance est minimale $Z_e = \alpha$.

En absence d'amortissement, l'amplitude est infinie (Figure 6). A l'antirésonance l'impédance est infinie (Figure 7).

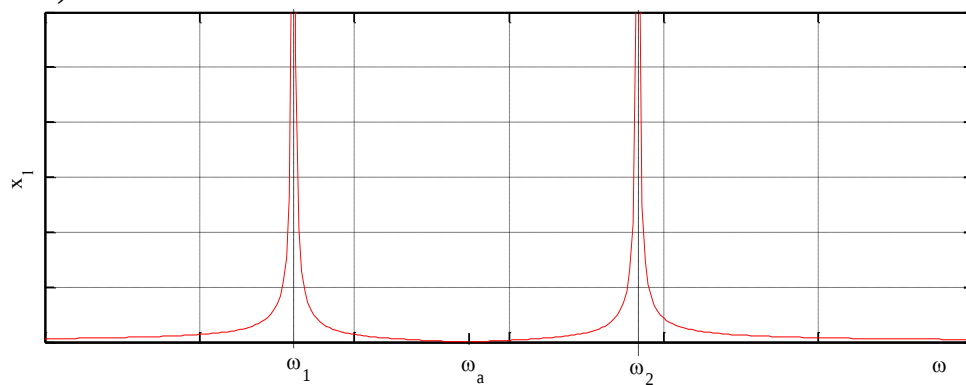


Figure 6

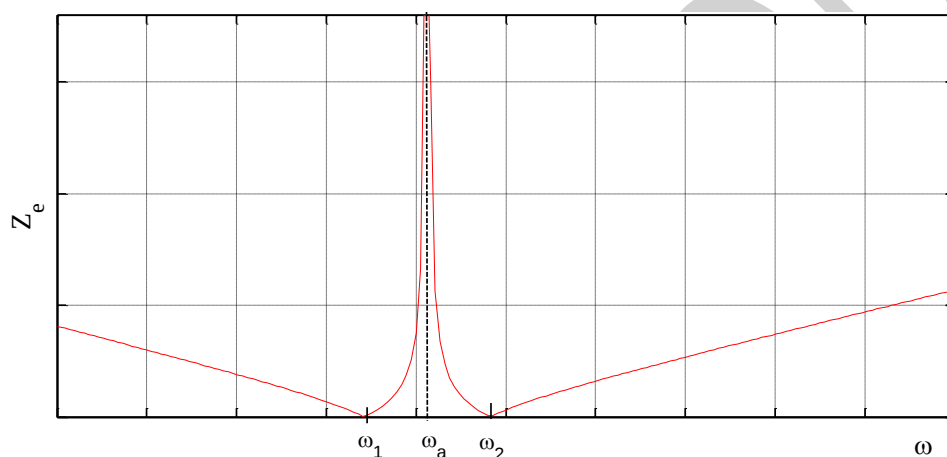


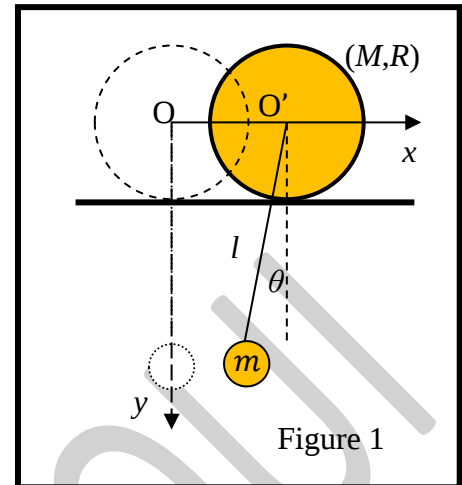
Figure 7

Exercices et problèmes corrigés

Exercice 1

La masse m de la figure ci-contre est fixée à l'extrémité d'une tige rigide sans masse et longueur l . La tige est soudée à un cylindre homogène de masse M et de rayon R . Le cylindre peut rouler sans glissement sur un support horizontal. A l'équilibre, la tige est verticale suivant l'axe Oy (Figure 1).

1. Quel est le déplacement du centre de masse OO' du cylindre ?
2. Quel est le déplacement latéral de la masse m du pendule ainsi que son déplacement vertical ?
3. Calculer l'énergie cinétique, quelles doivent être les approximations pour obtenir une expression quadratique de cette énergie ?
4. Déterminer l'énergie potentielle, déduire l'expression du lagrangien ainsi que l'équation de Lagrange, quelle est la pulsation ω_0 et l'élongation $\theta(t)$ solution du système ? Déterminer la vitesse de rotation de la masse m lors de son passage par la verticale.



Solution

1. le déplacement OO' : $\vec{x}_O = R\theta \vec{e}_x$.
2. Le déplacement de la masse M :

$$\overrightarrow{mm'} = \begin{cases} R\theta - l \sin \theta \\ -l(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

3. L'énergie cinétique du système :

$$T = T_M + T_m$$

avec :

$$T_M = T_{rotation} + T_{translation} = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2$$

$$T_m = \frac{1}{2}m(R - l)^2\dot{\theta}^2$$

Approximations : $\cos \theta = 1$ et $\sin \theta = 0$.

4. L'énergie potentielle du système :

$$U = mgl(1 - \cos \theta) \approx mgl \frac{\theta^2}{2}$$

Le Lagrangien du système :

$$L = T - U = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(R-l)^2\dot{\theta}^2 - mgl\frac{\theta^2}{2}$$

L'équation de mouvement s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \left[\frac{3}{2}MR^2 + m(R-l)^2\right]\ddot{\theta} + mgl\theta = 0$$

La solution de cette équation est :

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{\frac{3}{2}MR^2 + m(R-l)^2}}$$

qui représente la pulsation propre.

La vitesse de rotation lors du passage de la masse m par la verticale $\dot{\theta} = \pm\omega_0 A$.

Exercice 2

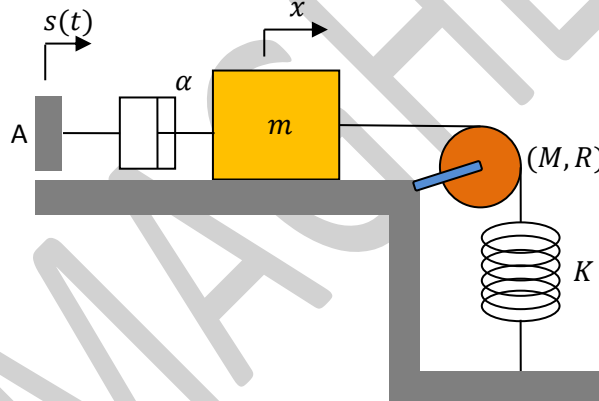


Figure 2

On considère le dispositif mécanique ci-dessus constitué d'une masse m qui glisse sans frottement sur un plan horizontal. Le déplacement horizontal de la masse m par rapport à sa position d'équilibre est noté x . Un côté de cette masse est relié à un bâti A par l'intermédiaire d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α ; ce bâti peut effectuer des oscillations horizontales autour de la position d'équilibre représentées par la fonction $s(t)$. L'autre côté de la masse est fixé à un ressort de raideur K par un fil inextensible et de masse négligeable, qui s'enroule sans glissement sur une poulie cylindrique, de masse M et de rayon R (Figure 2). On donne le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe : $I = \frac{MR^2}{2}$.

A. Le bâti A est fixe $s(t) = 0$:

1. Montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Donner les expressions de δ et ω_0 en fonction de α , m , M et K .

2. Donner l'expression mathématique de $x = f(t)$ dans le cas particulier où $\delta = \omega_0$ et pour les conditions initiales suivantes : $x(t = 0) = x_0$ et $\dot{x}(t = 0) = 0$.

B. Le bâti A subit un déplacement horizontal donné par : $s(t) = S_0 \sin(\omega t)$:

1. Montrer que l'équation différentielle du mouvement pour x s'écrit :

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \beta\omega S_0 \cos(\omega t)$$

Donner l'expression de β en fonction de α , m et M .

2. Calculer l'amplitude et la phase des oscillations de la masse m en régime permanent sinusoïdal.

3. Pour quelle pulsation observe-t-on un phénomène de résonance pour x ?

Solution

A. Le bâti est fixe :

1. Les énergies cinétiques, potentielles ainsi que la fonction de transfert sont :

$$T = \frac{1}{2} \left(m + \frac{M}{2} \right) \dot{x}^2, U = \frac{1}{2} K x^2, D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$$

ce qui donne :

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

avec :

$$\delta = \frac{\alpha}{2 \left(\frac{M}{2} + m \right)}, \omega_0^2 = \frac{K}{\left(\frac{M}{2} + m \right)}$$

2. La solution générale dans le cas particulier où $\delta = \omega_0$ est donnée par :

$$x = (A + Bt)e^{-\delta t}$$

A partir de conditions initiales nous obtenons : $A = x_0$ et $B = \delta x_0$.

B. Le bâti est en mouvement :

Les énergies :

$$T = \frac{1}{2} \left(m + \frac{M}{2} \right) \dot{x}^2, U = \frac{1}{2} K x^2, D = \frac{1}{2} \alpha (\dot{x} - \dot{s})^2$$

L'équation du mouvement :

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \beta\omega S_0 e^{j\omega t}$$

$$\beta = j \frac{\alpha}{\left(\frac{M}{2} + m \right)}$$

2. La solution x :

$$x = x_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

avec :

$$x_0 = \frac{|\beta|\omega S_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \varphi = \frac{\pi}{2} - \text{Arctg}\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

3. La pulsation de résonance est : $\omega_r = \omega_0$

Exercice 3

Dans la figure 3, M et R représentent, respectivement, la masse et le rayon de la poulie. x_1 et x_2 représentent les écarts des deux masses par rapport à leur position d'équilibre. Le système sera étudié en régime permanent avec : $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$.

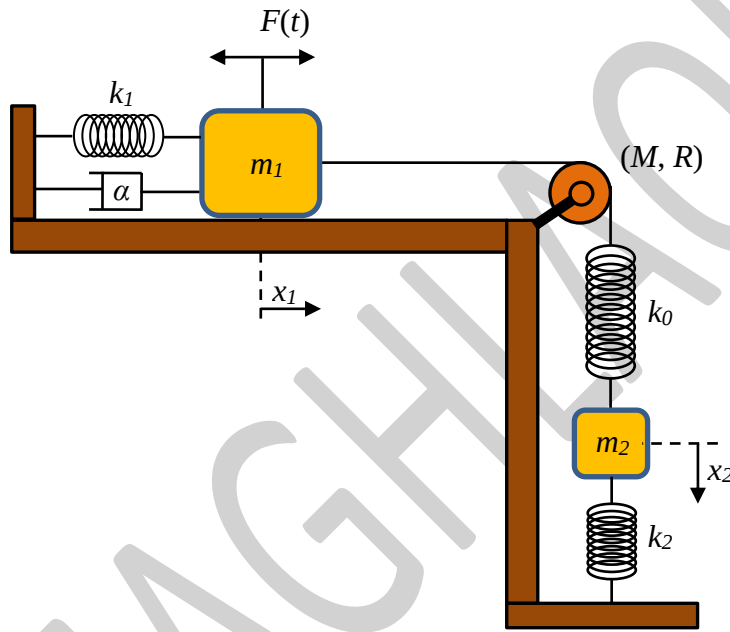


Figure 3

1. Déterminer les énergies cinétique et potentielle, la fonction de dissipation et le potentiel généralisé du système puis déduire les équations différentielles du mouvement .
2. Ecrire les équations aux vitesses (en fonction de $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$).
3. En déduire les équations du circuit électrique équivalent et donner le schéma électrique équivalent dans l'analogie force tension.
4. Calculer l'impédance d'entrée du système électrique.
5. Pour quelle pulsation a-t-on le phénomène d'antirésonance?

Solution

1. Les énergies :

$$T = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{M}{2} \right) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2, \quad U = \frac{1}{2} [k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_0 (x_2 - x_1)^2], \quad D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}_1^2$$

Le travail de la force extérieure est : $U_g = F \dot{x}_1$

Les équations de mouvement sont :

$$\begin{cases} \left(m_1 + \frac{M}{2}\right) \ddot{x}_1 + \alpha \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_0 (x_1 - x_2) = F \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + k_0 (x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

2. Les équations aux vitesses :

$$\begin{cases} j\omega \left(m_1 + \frac{M}{2}\right) \dot{x}_1 + \alpha \dot{x}_1 + \frac{k_1}{j\omega} \dot{x}_1 + \frac{k_0}{j\omega} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F \\ j\omega m_2 \dot{x}_2 + \frac{k_2}{j\omega} \dot{x}_2 + \frac{k_0}{j\omega} (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \end{cases}$$

3. Les équations des mailles :

$$\begin{cases} F \Leftrightarrow e \\ \dot{x}_1 \Leftrightarrow i_1 \\ \dot{x}_2 \Leftrightarrow i_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} k_1 \Leftrightarrow \frac{1}{C_1} \\ k_2 \Leftrightarrow \frac{1}{C_2} \\ k_0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_0} \end{cases}, \quad \begin{cases} \left(m_1 + \frac{M}{2}\right) \Leftrightarrow L_1 \\ m_2 \Leftrightarrow L_2 \end{cases}, \quad \alpha \Leftrightarrow R$$

$$\begin{cases} j\omega L_1 i_1 + R i_1 + \frac{1}{jC_1 \omega} i_1 + \frac{1}{jC_0 \omega} (i_1 - i_2) = F \\ j\omega L_2 i_2 + \frac{1}{jC_2 \omega} i_2 + \frac{1}{jC_0 \omega} (i_2 - i_1) = 0 \end{cases}$$

4. L'impédance d'entrée est :

$$Z_e = \frac{e}{i_1} = R + \frac{(Z_{L_1} + Z_{C_1} + Z_{C_0})(Z_{L_2} + Z_{C_2} + Z_{C_0}) - Z_{C_0}^2}{(Z_{L_2} + Z_{C_2} + Z_{C_0})}$$

où les Z_x représentent les impédances des différents composants électriques.

5. L'anti-résonance est obtenue pour :

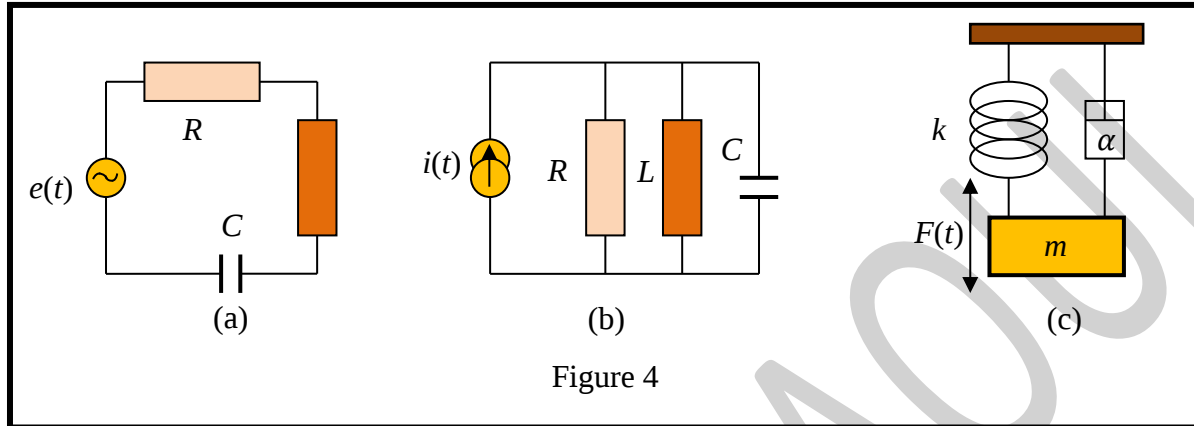
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_{eq}}}$$

avec

$$C_{eq} = \frac{C_0 C_2}{C_0 + C_2}$$

Exercice 4

Sur la figure 4, le circuit électrique (a) est un circuit RLC série alimenté par un générateur de tension $e(t)$, et le circuit de la figure (4. b) est un circuit RLC parallèle alimenté par un générateur de courant $i(t)$. Ecrire les équations différentielles qui décrivent les deux circuits et montrer qu'ils sont tous les deux équivalents au système mécanique de la figure (4. c). Donner les éléments d'analogie entre eux.



Solution

Cas a :

$$e(t) = V_L + V_R + V_C$$

$$e(t) = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt$$

Cas b :

$$i(t) = i_L + i_R + i_C$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int V(t) dt + \frac{V(t)}{R} + C \frac{dV(t)}{dt}$$

Cas mécanique :

$$F(t) = m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx$$

$$F(t) = m \frac{d\dot{x}}{dt} + \alpha\dot{x} + k \int \dot{x} dt$$

Mécanique	Cas a : circuit en série	Cas a : circuit en parallèle
F	$e(t)$	$i(t)$
m	L	C
α	R	$1/R$
k	$1/C$	$1/L$
$\dot{x}$	i	V

Problème 1:

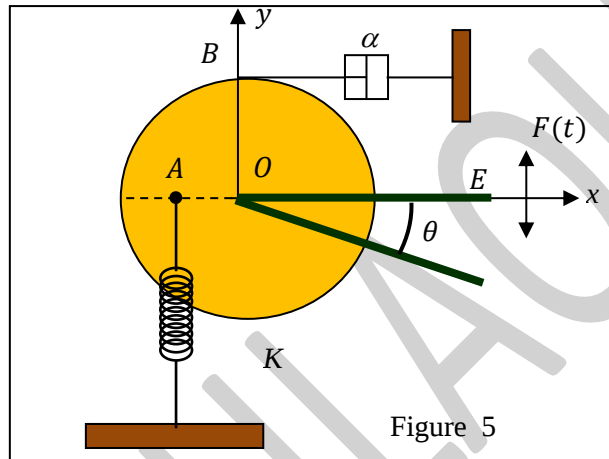
Le système mécanique représenté sur la figure 5 est constitué d'un disque plein homogène, de masse M et de rayon R , pouvant osciller sans frottements autour de son axe passant par O .

La tige de masse m , de longueur $OE = 2R$ est liée rigidement au disque.

Le point A , situé à la distance $d = R/2$ de O , est relié à un bâti fixe par un ressort de constante de raideur K .

En position d'équilibre, le point A est au même niveau que le centre O et la tige est horizontale. Par ailleurs, l'ensemble subit un frottement visqueux représenté par un amortisseur de coefficient α fixé au point B .

$OB = R = 20 \text{ cm}$, $M = 4m$.



Dans tout le problème, on considère des oscillations de faible amplitude.

I. Oscillations libres amorties :

Lorsque le système est écarté d'un angle θ_0 puis abandonné sans vitesse initiale, il se met à osciller. Le mouvement enregistré est illustré par le graphe de la figure 6 représentant $\theta(t)$.

1. Le ressort est-il déformé à l'équilibre du système ? justifier la réponse.
2. Calculer la fonction de Lagrange du système.
3. Etablir l'équation différentielle du mouvement et la mettre sous la forme :

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Préciser les expressions de δ et ω_0 .

4. Déterminer la solution $\theta(t)$ de l'équation en tenant compte des conditions initiales. Que devient cette solution si $\delta \ll \omega_0$.
5. Déduire du graphe (figure 6) les valeurs de α et K sachant que $M = 800 \text{ g}$.

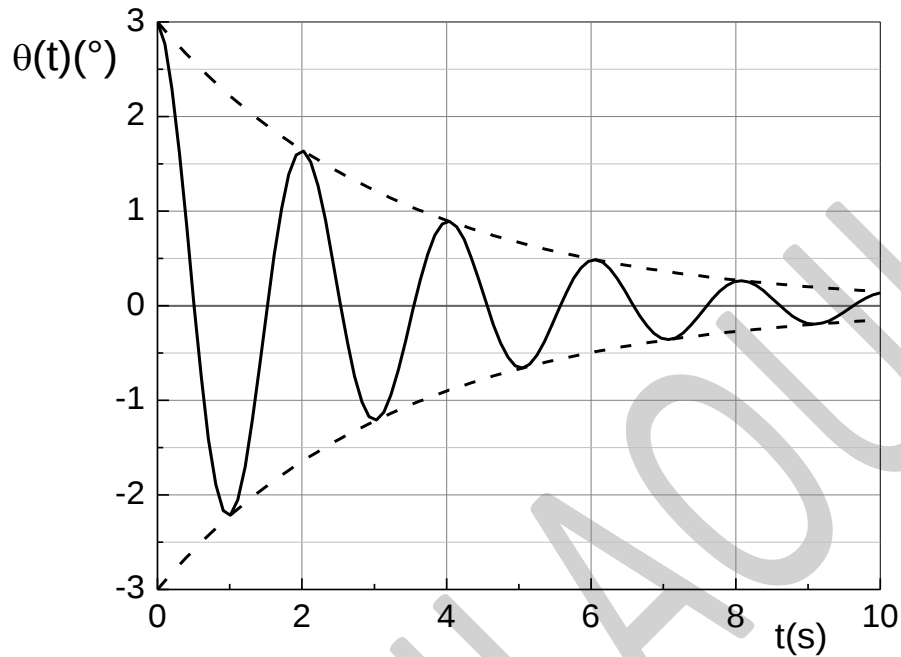
II. Oscillations forcées amorties :

A présent, une force extérieure $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ est appliquée à l'extrémité E de la tige.

1. Déterminer l'expression de la force généralisée F_θ associée à $F(t)$. En déduire l'équation différentielle du mouvement.
2. Trouver la solution de l'équation en régime permanent.

3. Déterminer la valeur de F_0 pour qu'à la résonance l'amplitude maximale soit égale à 5° .
4. Calculer la puissance moyenne fournie par la force appliquée au cours d'une période.
5. Quelle est la bande passante de l'oscillateur ? En déduire son facteur de qualité.

Figure 6



Solution

I. Oscillations libres amorties :

1. L'énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2} K(y + \Delta l)^2 - 2mgy$$

avec $y = \frac{R}{2} \theta$

on trouve : $K\Delta l = 2mg$.

$$U = \frac{1}{2} K \left(\frac{R}{2} \right)^2 \theta^2 + c$$

2. L'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} (J_M + J_m) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{5MR^2}{6} \right] \dot{\theta}^2$$

avec :

$$J_m = \frac{m(2R)^2}{3}, J_M = \frac{1}{2} MR^2$$

$$L = \frac{1}{2} \left[\frac{5MR^2}{6} \right] \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} K \left(\frac{R}{2} \right)^2 \theta^2 - c$$

3. Equation du mouvement :

$$D = \frac{1}{2} \alpha R^2 \dot{\theta}^2$$

$$\ddot{\theta} + 2\delta \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

$$\delta = \frac{3\alpha}{5M}, \quad \omega_0^2 = \frac{3K}{10M}$$

4. $\theta(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$ avec $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

Conditions initiales :

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta(t) = \theta_0 \frac{\omega_0}{\omega_a} e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi) \\ \varphi = -\arctg\left(\frac{\delta}{\omega_a}\right) \end{cases}$$

si $\delta \ll \omega_0 \Rightarrow \omega_a \approx \omega_0 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t)$

5. Du graphe on tire : $T_a = 2s$ et $D \approx 0.597 \Rightarrow \delta = 0.299s^{-1}$. d'où $\alpha = 0.398 kgs^{-1}$.

ce qui donne $K = 26.557 Nm^{-1}$.

II. Extrémité E de la tige soumise à $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$.

1. Nous avons

$$F_\theta = \vec{F} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$$

$$F_\theta = 2RF = 2RF_0 \cos(\omega t).$$

2. L'équation de mouvement :

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A_0 \cos(\omega t) \text{ avec : } A_0 = 12F_0/5MR$$

Le régime permanent est atteint approximativement à $t=12s$ après le début des oscillations.

La solution particulière est de la forme $\theta(t) = \theta_0(\omega) e^{j(\omega t + \varphi)}$ avec $A(t) = A_0 e^{j\omega t}$ on trouve :

$$\begin{cases} \theta_0(\omega) = \frac{A_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2]^{1/2}} \\ tg(\varphi) = \frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \end{cases}$$

3. A la résonance, $d\theta_0(\omega)/d\omega = 0 \Rightarrow \omega_R^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2$

$$\theta_0(\omega_R) = \frac{A_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \Rightarrow F_0 = 0.01 N.$$

4. la puissance instantanée fournie par $F(t)$:

$$F(t) = F_\theta \dot{\theta} = -2RF_0 \omega \cos(\omega t) \sin(\omega t + \varphi)$$

La puissance moyenne :

$$P(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P(t) dt = \frac{1}{2} \alpha \omega^2 R^2 \theta_0^2(\omega)$$

5. $\langle P \rangle_{max} = \langle P(\omega_0) \rangle = 2F_0^2/\alpha$;

La bande passante est: $2\delta = |\omega_2 - \omega_1|$

avec : $\langle P(\omega_{1,2}) \rangle = \langle P \rangle_{max}/2$.

On trouve :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = 5.284$$

Exercice 5

On considère l'oscillateur linéaire (faibles amplitudes) à deux degrés de liberté $x_1(t)$ et $\theta(t)$ de la figure ci-contre.

A l'équilibre, la tige sans masse et de longueur L est verticale et les deux ressorts sont au repos (Figure 7).

La masse M est soumise à une force sinusoïdale horizontale $F(t)$ de pulsation ω et d'amplitude F_0 .

1. Donner les énergies cinétique et potentielle de ce système. On posera

$$x_2(t) = \frac{L}{2}\theta(t)$$

2. En déduire les équations différentielles du mouvement de ce système en fonction de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Dans la suite du problème on posera :

$$M = m, k_2 = 2k_1 = 2k, \omega_0 = \sqrt{k/m} = \sqrt{2g/3L}.$$

3. Décrire le mouvement du système lorsque $\omega = \omega_0$. Calculer l'impédance d'entrée pour cette pulsation.
4. Lorsque $\omega = \sqrt{2}\omega_0$, calculer x_1 et x_2 en régime permanent. Décrire dans ce cas le mouvement du système et déterminer l'impédance d'entrée.
5. Donner les équations aux vitesses puis leurs équivalents qui régissent le circuit électrique.
6. Donner le schéma électrique équivalent et étudier son comportement dans les cas où $\omega = \omega_0$ puis pour $\omega = \sqrt{2}\omega_0$.

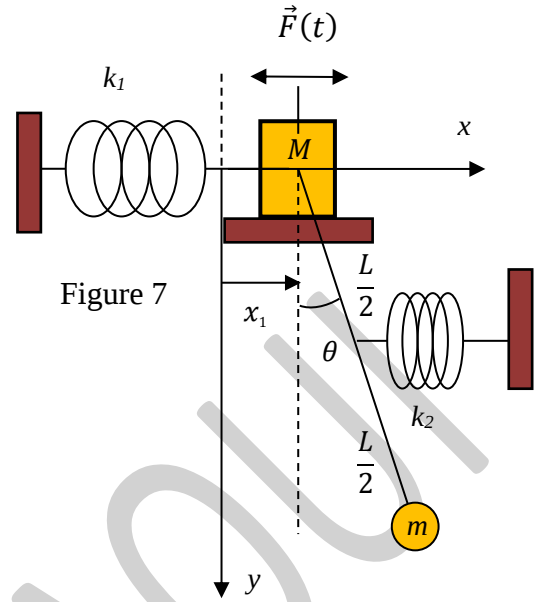
Solution

1. Les énergies

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2)^2, \quad U = \frac{1}{2}[kx_1^2 + 2k(x_1 + x_2)^2] + 2\frac{mg}{L}x_2^2$$

2. Les équations différentielles

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 2m\ddot{x}_2 + 3kx_1 + 2kx_2 = F(t) \\ 4m\ddot{x}_2 + 2m\ddot{x}_1 + 8kx_2 + 2kx_1 = 0 \end{cases}$$



3. En régime permanent, les équations s'écrivent :

$$\begin{cases} (3k - 2m\omega^2)x_1 + (2k - 2m\omega^2)x_2 = F(t) \\ (8k - 4m\omega^2)x_2 + (2k - 2m\omega^2)x_1 = 0 \end{cases}$$

Dans le cas où $\omega = \omega_0$, nous avons $x_2 = 0$. Le mouvement du système est une translation pure.

L'impédance mécanique d'entrée est :

$$Z_e = \frac{F(t)}{\dot{x}_1(t)} = \frac{k}{i\omega}$$

4. Lorsque $\omega = \sqrt{2}\omega_0$, nous avons $x_1 = 0$.

$$x_2 = -\frac{F(t)}{2k}$$

Nous avons une antirésonance qui se traduit par l'immobilité de la masse M . Le mouvement est donc une rotation de la masse m . Dans ce cas, l'impédance d'entrée Z_e est infinie.

5. Les équations aux vitesses

$$\begin{cases} \frac{k}{i\omega} \dot{x}_1 + \left(\frac{2k}{i\omega} + 2im\omega \right) (\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = F(t) \\ \left(\frac{6k}{i\omega} + 2im\omega \right) \dot{x}_2 + \left(\frac{2k}{i\omega} + 2im\omega \right) (\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = 0 \end{cases}$$

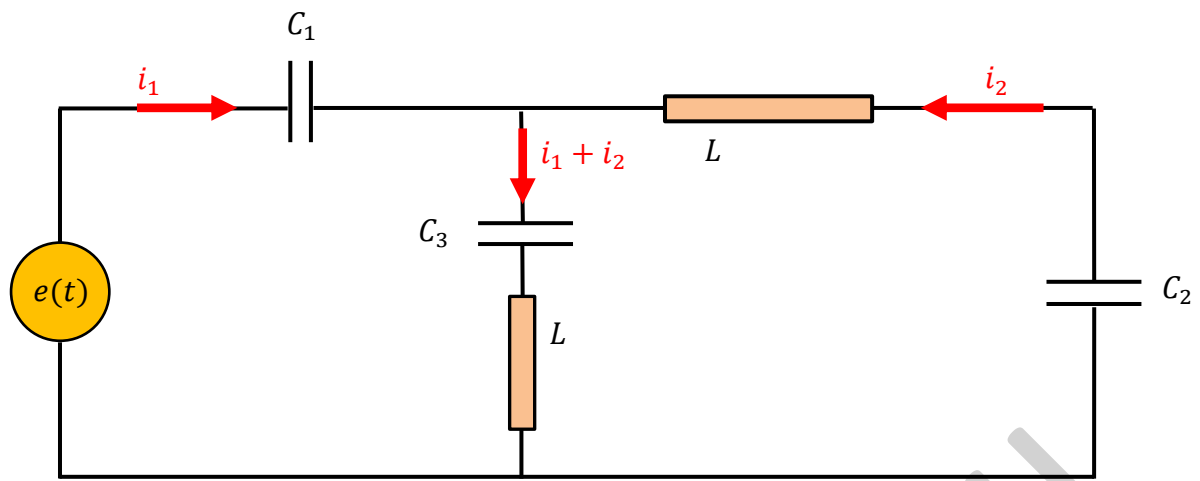
L'analogie force tension est faite :

$$F(t) \Leftrightarrow e(t), \dot{x}_1(t) \Leftrightarrow i_1(t), \dot{x}_2(t) \Leftrightarrow i_2(t)$$

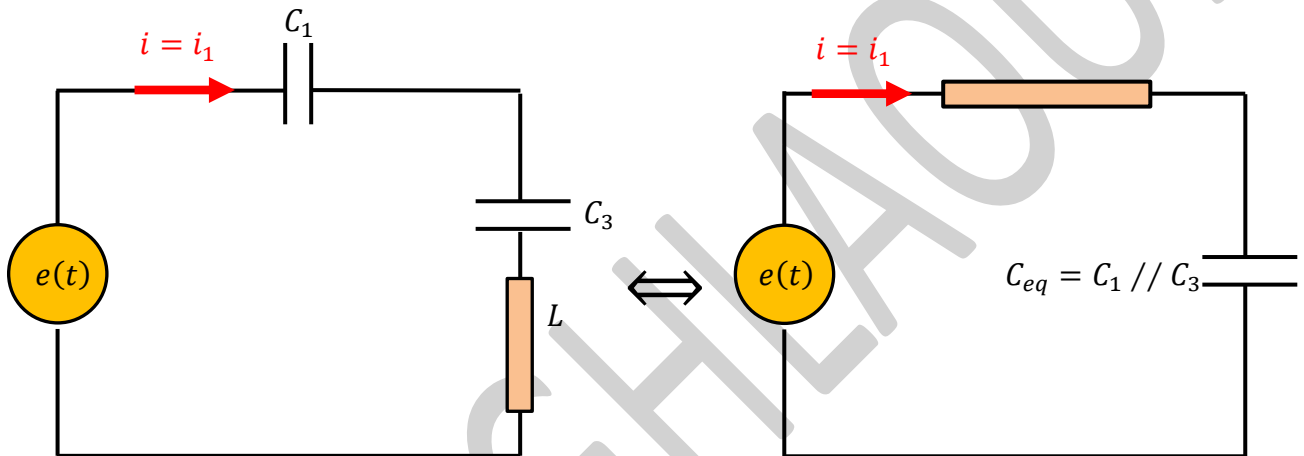
$$k \Leftrightarrow \frac{1}{C_1}, 6k \Leftrightarrow \frac{1}{C_2}, 2k \Leftrightarrow \frac{1}{C_3}, 2m \Leftrightarrow L$$

Les équations électriques :

$$\begin{cases} \frac{1}{iC_1\omega} i_1 + \left(\frac{1}{iC_3\omega} + iL\omega \right) (i_1 + i_2) = e(t) \\ \left(\frac{1}{iC_2\omega} + iL\omega \right) i_2 + \left(\frac{1}{iC_3\omega} + iL\omega \right) (i_1 + i_2) = 0 \end{cases}$$



Dans le cas où $\omega = \omega_0$, le schéma électrique devient :



Exercice 6

On schématise le mouvement plan d'un bateau par le système de la figure 8. On considère alors, la tige AB homogène de longueur L et de masse m accrochée à deux ressorts de constantes de raideur k_1 et k_2 . La tige peut tourner avec un angle $\theta(t)$ autour d'un axe passant par son centre de liberté x_1 et x_2 .

On considérant le déplacement du centre de masse de la tige $x_G = [x_1 + x_2]/2$ et l'angle de rotation $\theta(t) = [x_1 - x_2]/L$. En se basant sur la méthode matricielle :

1. Calculer les énergies cinétique et potentielle du système et en déduire le système d'équations du mouvement.
2. Trouver les pulsations propres du système, (dans ce cas ; on supposera que les deux constantes de raideurs sont identiques $k_1 = k_2$).
3. Déduire les solutions x_1 et x_2 du système libre.

Soit $F_1(t) = F_0 \cos(\omega t)$, la force verticale exercée par la houle sur le degré de liberté $x_1(t)$.

4. Trouver la solution générale x_1 et x_2 du système forcé.

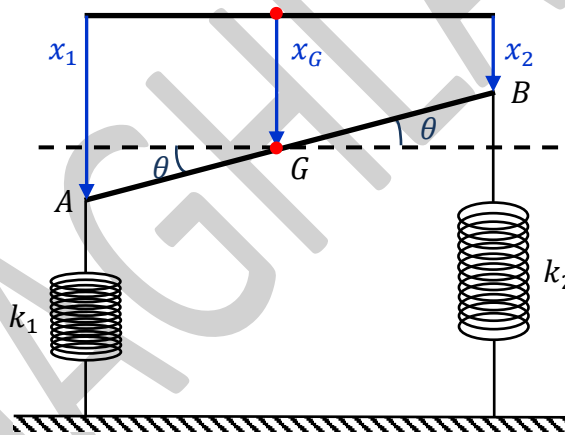


Figure 8

Solution

1.

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{3} \dot{x}_1^2 + \frac{m}{3} \dot{x}_2^2 + \frac{m}{3} \dot{x}_1 \dot{x}_2 \right), \quad U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2$$

Les équations du mouvement :

$$\begin{cases} \frac{m}{3} \ddot{x}_1 + \frac{m}{6} \ddot{x}_2 + k_1 x_1 = 0 \\ \frac{m}{3} \ddot{x}_2 + \frac{m}{6} \ddot{x}_1 + k_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

2. Les pulsations propres sont :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{m}}$$

3. Les rapports d'amplitude :

mode 1 : $\omega = \omega_1$, $x_1 = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ et $x_2 = A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$

On trouve $A_{21} = A_{11}$

mode 2 : $\omega = \omega_2$, $x_1 = A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ et $x_2 = A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

On trouve $A_{12} = -A_{22}$

Finalement les solutions générales s'écrivent :

$$x_1 = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x_2 = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

4. Cas d'une force extérieure sinusoïdale :

$$\begin{cases} \frac{m}{3} \ddot{x}_1 + \frac{m}{6} \ddot{x}_2 + k_1 x_1 = F \\ \frac{m}{3} \ddot{x}_2 + \frac{m}{6} \ddot{x}_1 + k_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

Les solutions s'écrivent :

$$x_1 = \frac{\left(k - \frac{m}{3} \omega^2\right)}{\left(k - \frac{m}{3} \omega^2\right)^2 - \left(\frac{m}{6} \omega^2\right)^2} F$$

$$x_2 = \frac{\left(\frac{m}{6} \omega^2\right)}{\left(k - \frac{m}{3} \omega^2\right)^2 - \left(\frac{m}{6} \omega^2\right)^2} F$$

Problème 2

I. Régime libre

Le système mécanique représenté par les figures 9.a et 9.b, comporte une barre rigide de masse M et longueur $2L$ qui est reliée par trois ressorts de raideur k_1 , k_2 et k_3 que l'on suppose verticaux. Au centre de gravité O de la barre on soude un pendule simple de masse m avec une tige rigide sans masse et de longueur L . Au cours du mouvement (Figure 9 (b)) la barre effectue un déplacement vertical $OO' = y$ que l'on appelle le pompage et un mouvement de rotation autour de l'axe horizontal passant le centre O , repéré par l'angle θ nommé tangage. A l'équilibre $y = 0$ et $\theta = 0$ (Figure 9 (a)).

On suppose que le système effectue des oscillations de faibles amplitudes autour de la position d'équilibre.

1. Déterminer les énergies cinétique et potentielle en précisant les approximations nécessaires. Dédire le système d'équations différentielles du mouvement en fonction des coordonnées y et $L\theta$?
2. Quelle est la condition que l'on doit imposer pour assurer le découplage du système ?
3. Déterminer les pulsations propres ω_{01} et ω_{02} , ainsi que les solutions $y(t)$ et $\theta(t)$.

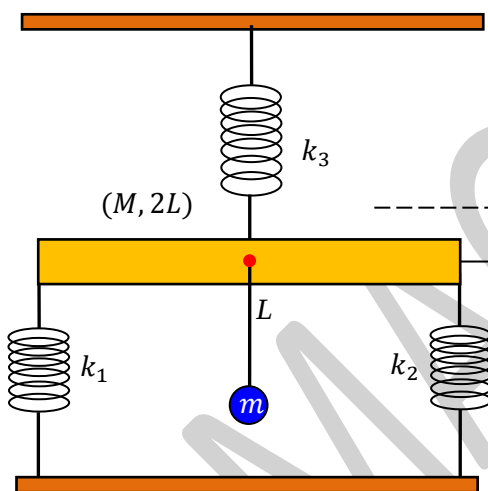


Figure 9 (a) (équilibre)

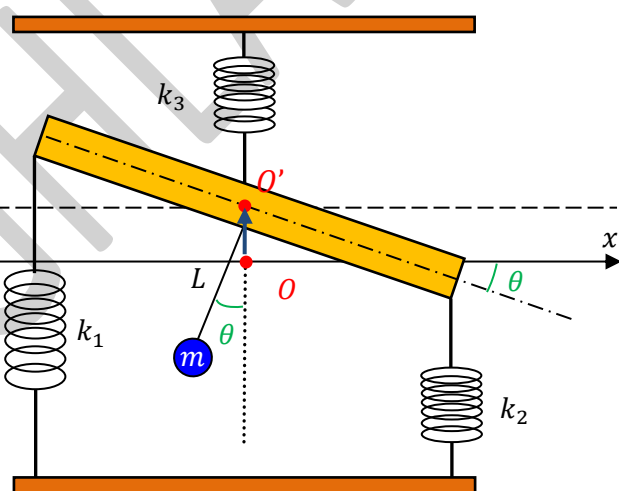


Figure 9 (b) (mouvement)

II. Régime forcé

Dans cette partie, l'extrémité supérieure du ressort k_3 subit une déformation $s(t)$, d'amplitude s_0 et de pulsation ω . Un amortisseur de coefficient d'amortissement α est placé en parallèle avec k_2 , tel-que représenté sur la figure 10.

En tenant compte des conditions de découplage (question (2) de la partie I).

1. Montrer que le système d'équation obtenu régit un mouvement en régime forcé. Donner dans ce cas l'expression de la force équivalente $F_{eq}(t)$ (On posera $x = L\theta$).
2. Ecrire les équations aux vitesses en $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$. Donner la relation entre ces deux vitesses. Pour quelle pulsation ω_1 , $\dot{x}(t)$ et $\dot{y}(t)$ sont-elles en phase ?

3. Calculer l'impédance d'entrée $Z_e = F_{eq}(t)/\dot{y}(t)$ en absence d'amortissement. Déterminer la pulsation ω_2 pour la laquelle la cause et l'effet sont phase ? Comparer ces deux pulsations (ω_1 et ω_2) aux pulsations propres du régime libre, commenter ?
4. On revient aux conditions de la question 1 de la partie II. Déterminer les équations électriques dans le cas de l'analogie force -tension, en déduire le circuit électrique, que devient le schéma électrique pour $\omega = \omega_1$?

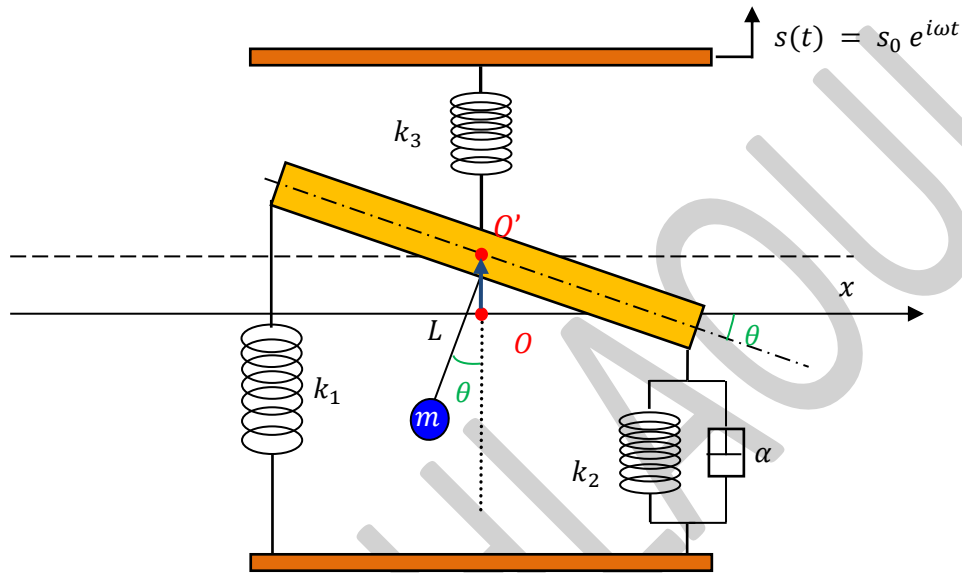


Figure 10

Solution

1. coordonnées :

$$\overrightarrow{OO'} \begin{cases} x_o = 0 \\ y_o = y \end{cases}, \quad \overrightarrow{Om} \begin{cases} x_m = L \sin \theta \\ y_m = L \cos \theta - y \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \frac{ML^2}{3} \dot{\theta}^2 + M \dot{y}^2 + m(\dot{y}^2 + L^2 \dot{\theta}^2 + 2L \sin(\theta) \dot{y} \dot{\theta}) \right\}$$

avec $\sin(\theta) \approx 0$

$$U = \frac{1}{2} k_1 (L\theta + y)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y - L\theta)^2 + \frac{1}{2} k_3 y^2 + \frac{mg(L\theta)^2}{2L}$$

d'où :

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{M}{3} + m & 0 \\ 0 & M + m \end{bmatrix}, [U] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + \frac{mg}{L} & k_1 - k_2 \\ k_1 - k_2 & k_1 + k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{M}{3} + m \right) L \ddot{\theta} + k_1 (L\theta + y) + k_2 (L\theta - y) + \frac{mg}{L} L\theta = 0$$

$$(M + m) \ddot{y} + k_1 (L\theta + y) + k_2 (y - L\theta) + k_3 y = 0$$

2. le système est découplé si $k_1 = k_2 = k$

$$\begin{aligned} \left(\frac{M}{3} + m\right)L \ddot{\theta} + 2kL\theta + \frac{mg}{L}L\theta &= 0 \\ (M + m)\ddot{y} + 2ky + k_3y &= 0 \end{aligned}$$

3. D'où :

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + \omega_{01}^2 \theta = 0 \\ \ddot{y} + \omega_{02}^2 y = 0 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \omega_{01}^2 = \frac{2kL^2 + mgL}{\frac{ML^2}{3} + mL^2} \\ \omega_{02}^2 = \frac{2k + k_3}{M + m} \end{cases}$$

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_{02}t + \varphi_2) \quad \text{et} \quad \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_{01}t + \varphi_1)$$

Régime Forcé

$$\begin{aligned} U(k_3) &= \frac{1}{2}k_3(s - y)^2 \\ D_\alpha &= \frac{1}{2}\alpha(\dot{y} - \dot{x})^2 \end{aligned}$$

Equations du mouvement

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{y} + 2ky + k_3y + \alpha(\dot{y} - \dot{x}) = k_3s = F_{eq} \\ \left(\frac{M}{3} + m\right)\ddot{x} + 2kx + \frac{mgx}{L} + \alpha(\dot{x} - \dot{y}) = 0 \end{cases}$$

Equations aux vitesses

$$\begin{cases} j\omega(M + m)\dot{y} + \frac{(2k + k_3)}{j\omega}\dot{y} + \alpha(\dot{y} - \dot{x}) = k_3s = F_{eq} \\ j\omega\left(\frac{M}{3} + m\right)\dot{x} + \frac{(2k + \frac{mg}{L})}{j\omega}\dot{x} + \alpha(\dot{x} - \dot{y}) = 0 \end{cases}$$

Relation entre $\dot{x}$ et $\dot{y}$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = j \frac{1}{\alpha} \left[\omega \left(\frac{M}{3} + m \right) - \frac{1}{\omega} \left(2k + \frac{mg}{L} \right) \right] + 1$$

$\dot{x}$ et $\dot{y}$ sont en phase si leur rapport est réel positif donc la partie imaginaire doit être nulle. Cela est possible si :

$$\omega_1^2 = \frac{2kL^2 + mgL}{\frac{ML^2}{3} + mL^2} = \omega_{01}^2$$

d'où : $\dot{y}/\dot{x} = 1$

L'impédance $Z_e(\alpha = 0)$

$$Z_e = \frac{F_{eq}(t)}{\dot{y}} = j\omega(M + m) + \frac{(2k + k_3)}{j\omega}$$

La cause et l'effet sont en phase si $\text{Im}(Z_e) = 0$

La pulsation est :

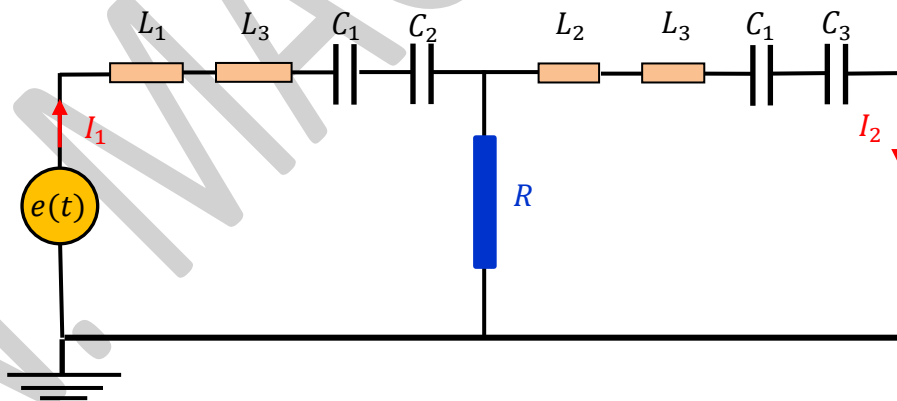
$$\omega_2^2 = \frac{2k + k_3}{M + m} = \omega_{02}^2$$

Les deux pulsations ω_1 et ω_2 sont les pulsations de résonance, elles sont aussi les pulsations propres du régime libre.

4.

Analogie mécanique	Electrique (force tension)
$M, M/3, m$	L_1, L_2, L_3
$2k, k_3, mg/L$	$1/C_1, 1/C_2, 1/C_3$
α	R
$\dot{y}, \dot{x}$	I_1, I_2

$$\begin{cases} j\omega(L_1 + L_3)I_1 + \left(\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}\right)I_1 + R(I_1 - I_2) = e(t) \\ j\omega(L_2 + L_3)I_2 + \left(\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_3}\right)I_2 + R(I_2 - I_1) = 0 \end{cases}$$

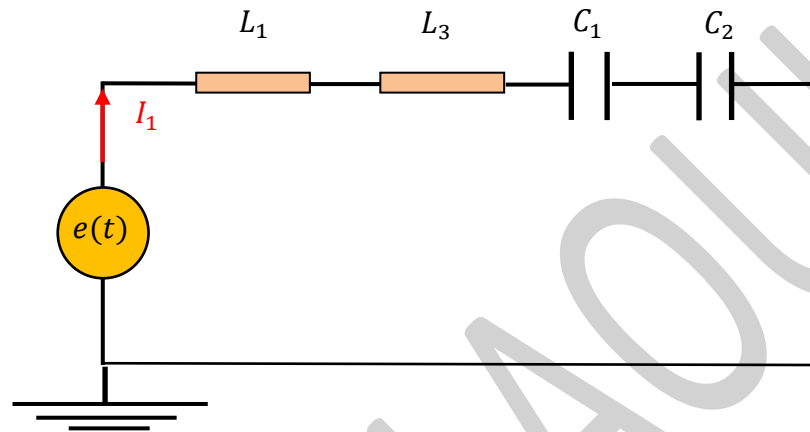


Dans le cas où $\omega = \omega_1$

Le système d'équations devient :

$$j\omega(L_1 + L_3)I_1 + \left(\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}\right)I_1 = e(t)$$

Ce qui est schématisé par le circuit électrique ci-dessous :



Exercice 7

Soit le système à deux degrés de liberté représenté par le schéma ci-dessous (Figure 10) :

avec : $k_1 = k_2 = k$; $k_0 \neq k$; $m_1 = m_2 = m$.

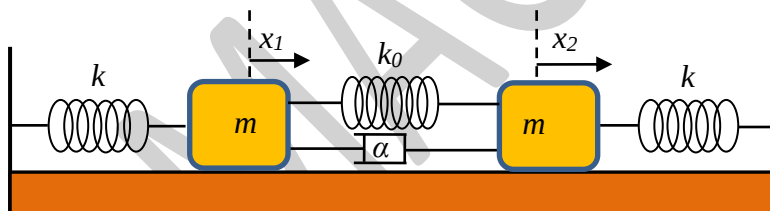


Figure 10

1. Etablir les expressions de l'énergie cinétique T , de l'énergie potentielle U , du lagrangien L et de la fonction dissipation d'énergie D de ce système en fonction des déplacements x_1 , x_2 et des vitesses correspondantes $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ des masses.
2. En déduire les équations différentielles de ses mouvements.
3. Pour leur résolution, faites le changement de variables suivant :

$$y_1 = x_1 + x_2 \text{ et } y_2 = x_1 - x_2$$

Quelle remarque faite vous sur les nouvelles équations obtenues.

Comment appelle-t-on, en mécanique, ces nouvelles coordonnées généralisées y_1 et y_2 .

4. Donner les expressions des solutions $y_1(t)$ et $y_2(t)$, celles des pulsations propres du système qui en découlent et du facteur d'amortissement δ .

5. En déduire les solutions générales des déplacements $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

On donne les conditions initiales suivantes :

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = V_0, \dot{x}_2(0) = -V_0$$

en déduire le type de mouvement d'oscillations qu'effectuent les deux masses et le rôle de l'amortisseur dans celui-ci.

Solution

1. Les énergies

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \quad , \quad U = \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}k_0(x_2 - x_1)^2$$

La fonction de dissipation :

$$D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2$$

2. Les équations différentielles de mouvement

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + kx_1 + k_0(x_1 - x_2) = 0 \\ m\ddot{x}_2 + \alpha(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + kx_2 + k_0(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

3. Après changement de variable :

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + \omega_1^2 y_1 = 0 \\ \ddot{y}_2 + 2\delta\dot{y}_2 + \omega_2^2 y_2 = 0 \end{cases}$$

avec :

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{(k + 2k_0)}{m}, \quad \delta = \frac{\alpha}{m}$$

Les équations sont découplées. Nous appelons ces coordonnées les coordonnées principales.

4. Les pulsations propres ainsi que le coefficient d'amortissement sont respectivement :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{(k + 2k_0)}{m}}, \quad \delta = \frac{\alpha}{m} \\ y_1 &= A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y_2 &= B e^{-\delta t} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

5. Les solutions des équations sont :

$$\begin{aligned} x_1 &= A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B e^{-\delta t} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 &= A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - B e^{-\delta t} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

En utilisant les 4 conditions initiales nous trouvons :

$$A = 0, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \quad B = \frac{V_0}{\omega_2}$$

Exercice 8

On considère le système mécanique représenté par la figure 11. Une force sinusoïdale d'amplitude F_0 et de pulsation ω , ($F(t) = F_0 \cos(\omega t)$), est appliquée sur la coordonnée y_2 . On considère les oscillations de faibles amplitudes.

1. Déterminer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle ainsi que la fonction de dissipation du système.
2. Etablir les équations différentielles en y_1 et y_2 , régissant le système.
3. Déterminer l'impédance mécanique d'entrée du système $Z_e = F/\dot{y}_2$.
4. Donner le schéma électrique équivalent.
5. Décrire le mouvement lorsque $\omega^2 = k_1/m_1$.
6. Calculer les vitesses instantanées $\dot{y}_1$ et $\dot{y}_2$ des masses m_1 et m_2 dans le cas où $k_2 = 2k_1$ et $m_1 = m_2$.
7. Calculer la puissance instantanée fournie par le générateur mécanique ainsi que la puissance instantanée dissipée par le système. Comparer et commenter.
8. Calculer la puissance moyenne fournie par le générateur mécanique, la puissance moyenne dissipée par le système. Comparer et commenter.

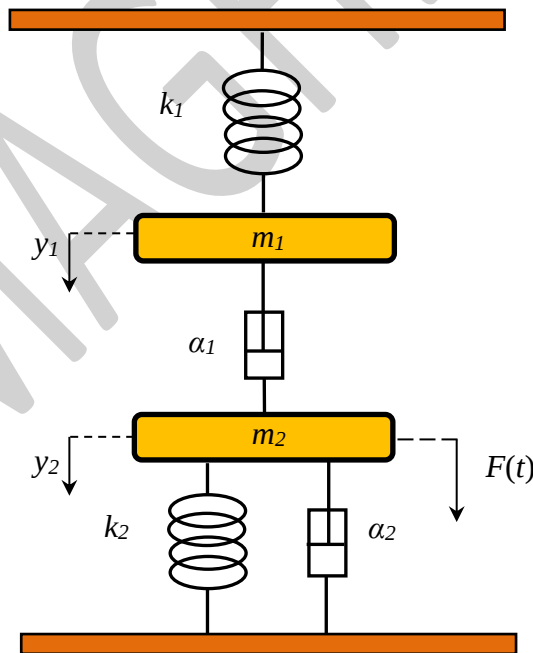


Figure 11

Solution

1. T, U et D.

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{y}_1^2 + m_2\dot{y}_2^2) \quad , \quad U = \frac{1}{2}k_1y_1^2 + k_2y_2^2, \quad D = \frac{1}{2}\alpha_2\dot{y}_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)^2$$

2. Etablir les équations différentielles.

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1 + \alpha_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_1y_1 = 0 \\ m_2\ddot{y}_2 + \alpha_2\dot{y}_2 + \alpha_1(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2y_2 = F \end{cases}$$

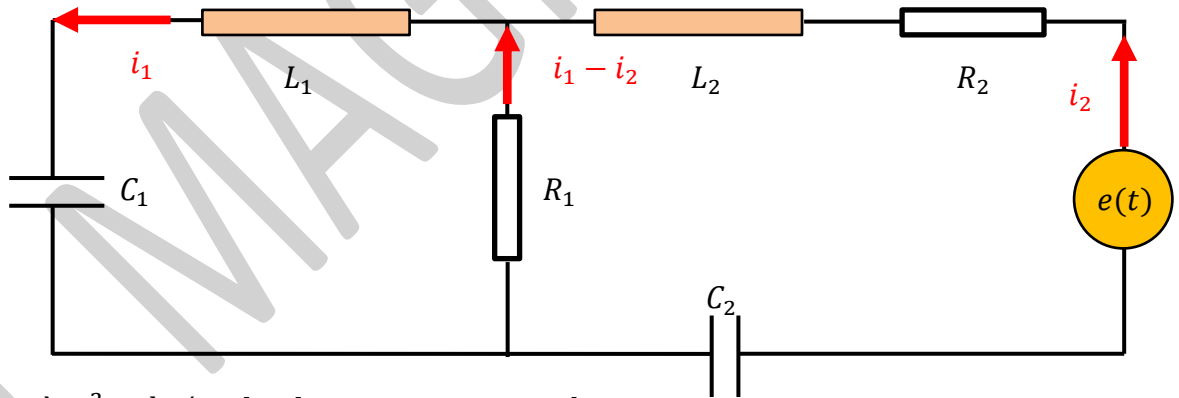
3. Déterminer l'impédance mécanique d'entrée Z_e

$$Z_e = \alpha_1 + \alpha_2 + jm_2\omega + \frac{k_2}{j\omega} - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1 + jm_1\omega + \frac{k_1}{j\omega}}$$

4. Schéma électrique équivalent.

$$\begin{cases} F \Leftrightarrow e \\ \dot{x}_1 \Leftrightarrow i_1 \\ \dot{x}_2 \Leftrightarrow i_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} k_1 \Leftrightarrow \frac{1}{C_1} \\ k_2 \Leftrightarrow \frac{1}{C_2} \end{cases}, \quad \begin{cases} m_1 \Leftrightarrow L_1 \\ m_2 \Leftrightarrow L_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha_1 \Leftrightarrow R_1 \\ \alpha_2 \Leftrightarrow R_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} jL_1\omega i_1 + R_1(i_1 - i_2) + \frac{1}{jC_1\omega}i_1 = 0 \\ jL_2\omega i_2 + R_2i_2 + R_1(i_2 - i_1) + \frac{1}{jC_2\omega}i_2 = e \end{cases}$$



5. Dans le cas où $\omega^2 = k_1/m_1$ les deux masses sont en phase $\dot{y}_1 = \dot{y}_2$.

6. Les vitesses instantanées $\dot{y}_1$ et $\dot{y}_2$ dans le cas où $k_2 = 2k_1$ et $m_1 = m_2$.

$$Z_e = \alpha_1 + \alpha_2 + jm\omega + \frac{2k}{j\omega} - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1 + jm\omega + \frac{k}{j\omega}}$$

$$\dot{y}_2 = \frac{F}{Z_e}, \dot{y}_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + jm\omega + \frac{k}{j\omega}} \dot{y}_2$$

7. Calcul des puissances instantanées.

La puissance fournie instantanée : $P_f = F \dot{y}_2 = -\omega F_0 \dot{y}_{20} \cos(\omega t) \sin(\omega t + \varphi)$

La puissance dissipée instantanée : $P_\alpha = \alpha \dot{y}_2 \dot{y}_2 = \alpha \dot{y}_{20}^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$

8. Les puissances moyennes.

$$\langle P_f \rangle = \langle P_\alpha \rangle = \frac{1}{2} \alpha \dot{y}_{20}^2$$

Les puissances moyennes sont égales ce qui montre que le système mécanique est soutenu.

Problème 3

A. Système à un degré de liberté

On se propose d'étudier les oscillations d'un système constitué d'une tige de masse négligeable, de longueur 2ℓ , portant à ses extrémités deux masses m_1 et m_2 et pivotant autour d'un axe fixe O passant par son milieu.

La masse m_1 est reliée à des bâtis fixes par un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α .

A l'équilibre statique, la tige est verticale, le ressort n'est pas déformé et on repère les oscillations de faible amplitude par l'angle θ que fait la tige par rapport à la verticale (Figure 12)

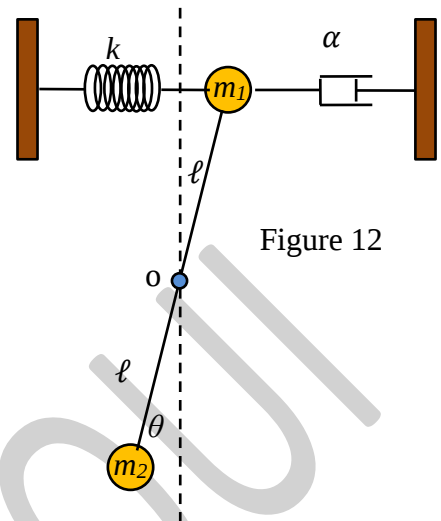


Figure 12

1. Régime libre amorti

- Calculer le Lagrangien $L(\theta, \dot{\theta})$ et la fonction dissipation d'énergie D de ce système.
- En déduire l'équation différentielle du mouvement, le facteur d'amortissement δ et la pulsation propre ω_0 .
- Sachant que le système effectue des oscillations libres amorties dont l'amplitude θ_{max} diminue de 80 % au bout de 8 pseudo-périodes et que :

$$T_a = 1s ; m_2 = 2m_1 = 2m = 2kg; \ell = 10\text{ cm}; g = 10\text{ ms}^{-1}$$

trouver les valeurs numériques de k et de α .

2. Régime forcé amorti

On applique sur la masse m_2 une force $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ perpendiculaire à la tige.

- Ecrire la nouvelle équation du mouvement
- Donner l'expression de l'amplitude des oscillations en régime permanent
- Calculer l'intensité F_0 de la force sachant que l'amplitude maximale θ_{max} , à la résonance, vaut $\pi/45$

B. Système à deux degrés de liberté

Dans le système précédent, on supprime l'amortisseur et on insère entre le ressort k et le bâti un oscillateur constitué d'une masse M et d'un ressort de raideur k_0 pour former un nouveau système à 2 degrés de liberté (Figure 13)

Le mouvement de la masse M est donné par son déplacement horizontal x_1 et on posera cette fois $x_2 = \ell\theta$.

- Calculer le Lagrangien $L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$ du système.
- En déduire les équations différentielles de son mouvement.
- Calculer ses pulsations propres ω_1 et ω_2 en fonction de M , k et k_0 si :

$$M = 3m \quad \text{et} \quad k_0 = mg/\ell$$

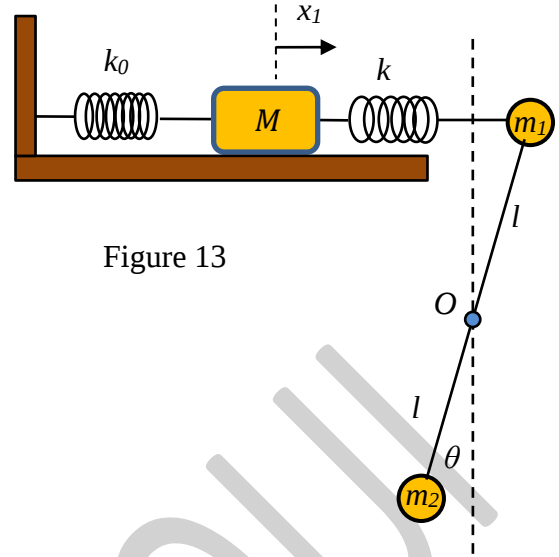


Figure 13

Solution

A. Système à un degré de liberté.

1. Régime libre amorti.

a.

$$L = T - U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(l\dot{\theta})^2 - \frac{1}{2}k(l\theta)^2 - m_2gl\frac{\theta^2}{2} + m_1gl\frac{\theta^2}{2}$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha(l\dot{\theta})^2$$

b.

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

$$\delta = \frac{\alpha}{2(m_1 + m_2)}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{kl^2 + m_2gl - m_1gl}{(m_1 + m_2)l^2}}$$

c.

$$\alpha = 2(m_1 + m_2)\delta = 2(m_1 + m_2)\frac{\ln(5)}{8T_a}$$

$$k = (m_1 + m_2)\omega_0^2 + \frac{m_1g - m_2g}{(m_1 + m_2)l}$$

avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_a^2 + \delta^2}$$

1. Régime forcé amorti.

a. L'équation de mouvement devient :

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{F}{(m_1 + m_2)l}$$

b. En régime permanent, l'amplitude s'écrit :

$$\theta_0 = \frac{F_0}{(m_1 + m_2)l\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

c. La fréquence de résonance est : $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$

$$\theta_{0max} = \frac{F_0}{(m_1 + m_2)l 2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

B. Système à deux degrés de liberté

a. Le Lagrangien :

$$L = T - U = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 - \frac{1}{2}k_0x_1^2 - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 - mg\frac{x_2^2}{2l}$$

b. Les équations du mouvement :

$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 + k_0x_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \\ 3m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + mg\frac{x_2}{l} = 0 \end{cases}$$

c. Les pulsations propres sont :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_0}{M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k + k_0}{M}}$$

Exercice 9

On considère une tige AB rigide, de longueur ℓ et de masse négligeable. Son centre est relié à un bâti B_1 par l'intermédiaire d'un ressort $16k$ en parallèle avec un amortisseur de coefficient de frottement visqueux 4α . Elle peut tourner, dans le plan vertical (xOy) autour d'un axe fixe passant par son extrémité A. Une masse ponctuelle m_1 est soudée à son extrémité inférieure B. La masse m_1 est reliée à une deuxième masse ponctuelle m_2 par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k (Figure 14). La masse m_2 glisse sur un plan horizontal et est relié à un bâti B_2 par l'intermédiaire d'un ressort k . A l'équilibre, la tige AB est verticale ($\theta = 0$) et le ressort n'est pas déformé. On désigne par $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les déplacements respectifs suivant l'axe Ox de m_1 et de m_2 par rapport à leur position d'équilibre.

On s'intéresse aux oscillations de faible amplitude ($x_1 = \ell\theta$). Dans tout le problème, on négligera les forces de frottements. On note g l'accélération de la pesanteur.

Une force excitatrice d'intensité $F(t) = F_0 e^{(2j\omega t)}$, où 2ω est la pulsation, est appliquée dans le plan (xOy) et perpendiculairement à la tige AB, au point O' milieu de AB (Figure 14).

1. Etablir les équations différentielles qui régissent les variations de x_1 et x_2 dans le cas où $4mg/\ell = 3k$, $m_1 = 4m$ et $m_2 = m$.
2. Ecrire en notation complexe les équations aux vitesses $\dot{x}_1$ et $\dot{x}_2$. Déterminer l'impédance d'entrée $Z_e = F(t)/\dot{x}_1(t)$.
3. Déterminer la pulsation ω_a pour laquelle la masse m_1 reste immobile.
4. Calculer les pulsations ω_{R1} et ω_{R2} pour lesquelles la masse m_1 et la force $F(t)$ sont en phase.
5. Dans le cas où l'amortissement est négligeable ($\alpha = 0$), que devient $x_1(t)$ pour les pulsations ω_{R1} et ω_{R2} . Que représente ces pulsations.

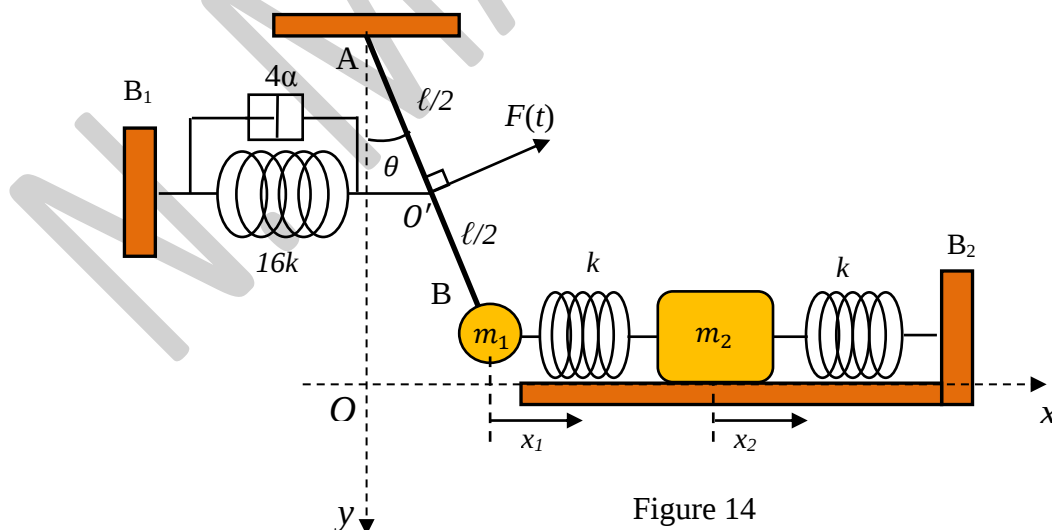


Figure 14

Solution

1. Ecriture des énergies et de la fonction de dissipation.

$$T = \frac{1}{2} 4m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} 4kx_1^2 + \frac{1}{2} k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} kx_2^2 + 4mg \frac{x_1^2}{2\ell}$$

$$U = \frac{1}{2} \left(5k + \frac{4mg}{\ell} \right) x_1^2 + \frac{1}{2} 2kx_2^2 - kx_1x_2$$

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}_1^2$$

Pour le premier degré de liberté :

$$4m \ddot{x}_1 + \alpha \dot{x}_1 + 8kx_1 - kx_2 = \frac{dU_g}{dx_1}$$

Comme

$$U_g = F(t)\ell \frac{\theta}{2} = F(t) \frac{x_1}{2}$$

alors

$$4m \ddot{x}_1 + \alpha \dot{x}_1 + 8kx_1 - kx_2 = \frac{F(t)}{2} \quad (1)$$

Pour le 2^{ème} degré de liberté :

$$m \ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0 \quad (2)$$

2. Ecriture des équations aux vitesses et détermination de l'impédance d'entrée.

L'excitation $F(t) = F_0 e^{(2j\omega t)}$.

Les solutions en régime permanent s'écrivent :

$$x_1(t) = X_1 e^{(2j\omega t)}, x_2(t) = X_2 e^{(2j\omega t)}$$

De ce fait : $\dot{x}_1 = 2j\omega x_1$, $\dot{x}_2 = 2j\omega x_2$ et $\ddot{x}_1 = 2j\omega \dot{x}_1$, $\ddot{x}_2 = 2j\omega \dot{x}_2$.

Pour l'équation (1) nous avons :

$$8jm\omega \dot{x}_1 + \alpha \dot{x}_1 + \frac{4k}{j\omega} \dot{x}_1 - \frac{k}{2j\omega} \dot{x}_2 = \frac{F(t)}{2} \quad (3)$$

Pour l'équation (2) nous avons :

$$2jm\omega \dot{x}_2 + \frac{k}{j\omega} \dot{x}_2 - \frac{k}{2j\omega} \dot{x}_1 = 0 \quad (4)$$

De l'équation (4) nous avons :

$$\dot{x}_2 = \frac{k}{2(k - 2m\omega^2)} \dot{x}_1 \quad (5)$$

En injectant l'expression de $\dot{x}_2$ en fonction de $\dot{x}_1$ (relation 5) dans l'équation (3) nous obtenons :

$$\dot{x}_1 \left[8jm\omega + \alpha + \frac{4k}{j\omega} - \frac{k^2}{4j\omega(k - 2m\omega^2)} \right] = \frac{F(t)}{2} \quad (6)$$

Finalement :

$$Z_e = \frac{F(t)}{\dot{x}_1(t)} = 2\alpha + 2 \left[\frac{(16k - 32m\omega^2)(k - 2m\omega^2) - k^2}{4j\omega(k - 2m\omega^2)} \right] \quad (7)$$

3. La pulsation pour laquelle la masse m_1 est immobile est :

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

Dans ce cas l'impédance d'entrée Z_e est infinie.

4. Les pulsations pour lesquelles la force $F(t)$ et la vitesse $\dot{x}_1(t)$ sont en phase sont les pulsations pour lesquelles l'impédance Z_e est réelle positive, pour cela il faudrait que :

$$(16k - 32m\omega^2)(k - 2m\omega^2) - k^2 = 0$$

On trouve :

$$\omega_{R1} = \sqrt{\frac{3k}{8m}}, \omega_{R2} = \sqrt{\frac{5k}{8m}}$$

5. $\alpha = 0$,

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{4j\omega(k - 2m\omega^2)}{(16k - 32m\omega^2)(k - 2m\omega^2) - k^2} \right] F(t)$$

d'où :

$$x_1(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{4(k - 2m\omega^2)}{(16k - 32m\omega^2)(k - 2m\omega^2) - k^2} \right] F(t) \quad (8)$$

Pour les pulsations ω_{R1} et ω_{R2} $x_1(t) = \infty$, nous avons un phénomène de résonance. Ces pulsations représentent les pulsations de résonance.

Exercice 10

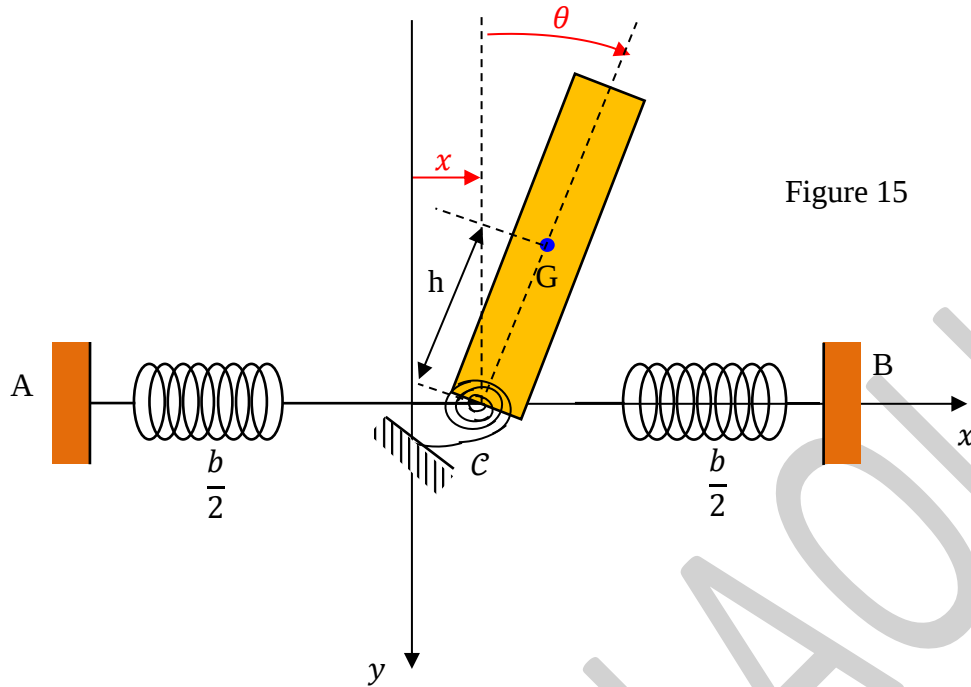


Figure 15

La figure ci-dessus (Figure 15) représente une maquette permettant d'étudier au laboratoire le mouvement d'un immeuble lors d'un tremblement de terre. L'immeuble est représenté par une barre de masse M pouvant osciller, sans frottement, dans un vertical autour d'un axe passant par son extrémité inférieure. La distance séparant le centre de masse G de l'axe de rotation est h . le moment d'inertie de la barre par rapport à un axe perpendiculaire passant par son centre de masse est I_G . la rotation est repérée par l'écart angulaire θ . Lors de ce mouvement le ressort spirale exerce sur la barre un moment de rappel $\mathcal{M} = -C\theta$, l'énergie potentielle correspondante est $U_C = \frac{1}{2}C\theta^2$. D'autre part, la barre peut effectuer un mouvement de translation repéré par l'écart x par rapport à la position d'équilibre. Elle est reliée aux bâtis A et B, par deux ressorts identiques de raideur $b/2$. A l'équilibre ($x = 0, \theta = 0$) les ressorts ne sont pas déformés.

1. Donner en fonction de x , θ et h les déplacements du centre de masse G .
2. En déduire l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système pour les oscillations de faible amplitude.
3. Etablir les équations différentielles du mouvement qui régissent les variations de x et θ en fonction du temps. Montrer que ces équations différentielles peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma \ddot{\theta} = 0 \\ \alpha \ddot{x} + \ddot{\theta} + \beta \omega_0^2 \theta = 0 \end{cases} \text{ où } \omega_0 = \sqrt{\frac{b}{M}}$$

Donner les expressions de γ , α et β en fonction de M , h , b , C et I_G , puis donner leurs unités.

4. Calculer les pulsations propres en fonction de ω_0 dans le cas où $\beta = 1$ (S.I.), $\alpha = 1$ (S.I.) et $\gamma = 1/2$ (S.I.) (Les unités S.I. sont demandées ci-dessus).

5. Déterminer les rapports d'amplitudes dans chacun des modes et déduire les expressions des solutions générales de x et θ en fonction du temps.

Solution

1. Les déplacements sont :

$$\overrightarrow{GG'} \begin{cases} x_G = x + h \sin \theta \\ y_G = h(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

2. Energie cinétique (Théorème de Kőning) :

$$T_G = \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M v_G^2$$

avec :

$$v_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 = (\dot{x} + h\dot{\theta})^2$$

Finalement :

$$T_G = \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M v_G^2 = \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{x} + h\dot{\theta})^2$$

$$T_G = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (I_G + Mh^2) \dot{\theta}^2 + Mh\dot{x}\dot{\theta}$$

L'énergie potentielle est :

$$U = \frac{1}{2} bx^2 + \frac{1}{2} (C - Mgh) \theta^2$$

3. les équations différentielles du mouvement :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\ddot{x} + Mh\ddot{\theta} + bx = 0 \\ (I_G + Mh^2)\ddot{\theta} + Mh\ddot{x} + (C - Mgh)\theta = 0 \end{cases}$$

qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma \ddot{\theta} = 0 \\ \alpha \ddot{x} + \ddot{\theta} + \beta \omega_0^2 \theta = 0 \end{cases}$$

avec :

$$\gamma = h, \quad \beta = \frac{M(C - Mgh)}{b(I_G + Mh^2)}, \quad \alpha = \frac{Mh}{(I_G + Mh^2)}$$

4. Dans le cas où $\alpha = \beta = 2\gamma = 1$:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x + \frac{1}{2} \ddot{\theta} = 0 \\ \ddot{x} + \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \end{cases}$$

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\frac{\omega^2}{2} \\ -\omega^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \frac{1}{2} \omega^4$$

Les pulsations propres sont :

$$\omega_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \omega_0, \omega_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \omega_0$$

5. Le rapport des amplitudes :

Pour le mode 1 : $\omega = \omega_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \omega_0$

Les solutions sont :

$$\begin{cases} x = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \theta = A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \end{cases}$$

Dans ce cas :

$$\begin{bmatrix} \omega_0^2 - \omega_1^2 & -\frac{\omega_1^2}{2} \\ -\omega_1^2 & \omega_0^2 - \omega_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} = 0$$

On trouve $A_{21}/A_{11} = \sqrt{2} m^{-1}$.

Pour le mode 2 : $\omega = \omega_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \omega_0$

Les solutions sont :

$$\begin{cases} x = A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta = A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Dans ce cas :

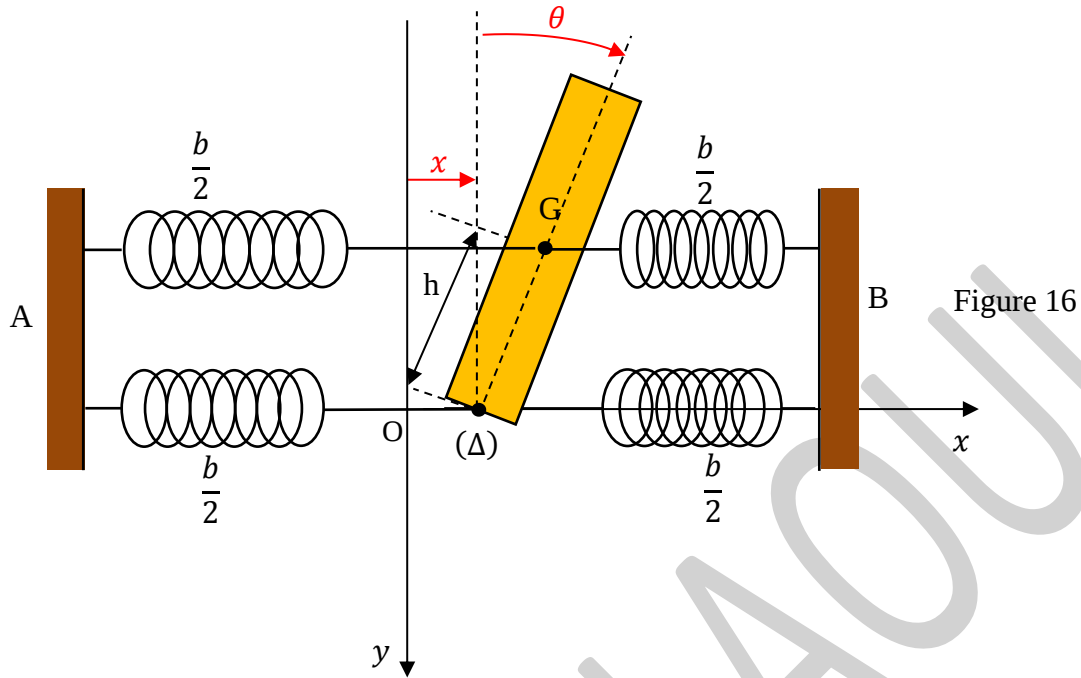
$$\begin{bmatrix} \omega_0^2 - \omega_2^2 & -\frac{\omega_2^2}{2} \\ -\omega_2^2 & \omega_0^2 - \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = 0$$

On trouve $A_{22}/A_{12} = -\sqrt{2} m^{-1}$.

Les solutions générales sont :

$$\begin{cases} x = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta = \sqrt{2} [A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)] \end{cases}$$

Exercice 11



La figure ci-dessus (Figure 16) représente une maquette permettant d'étudier au laboratoire le mouvement d'un immeuble lors d'un tremblement de terre. L'immeuble est représenté par une barre de masse M pouvant osciller, sans frottement, dans un plan vertical autour d'un axe (Δ) passant par son extrémité inférieure. La distance séparant le centre de masse G de l'axe de rotation est h . Le moment d'inertie de la barre par rapport à un axe perpendiculaire passant par son centre de masse est I_G . La rotation est repérée par l'écart angulaire θ . La barre peut effectuer un mouvement de translation repéré par l'écart x par rapport à la position d'équilibre. Elle est reliée aux bâtis A et B, par quatre ressorts identiques de raideur $b/2$. A l'équilibre, $(x = 0, \theta = 0)$, les ressorts ne sont pas déformés.

1. Donner en fonction de x , θ et h les déplacements du centre de masse G .
2. En déduire l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système pour les oscillations de faible amplitude.
3. Etablir les équations différentielles du mouvement qui régissent les variations de x et θ en fonction du temps. Montrer que ces équations différentielles peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma \ddot{\theta} + \frac{\gamma}{2} \omega_0^2 \theta = 0 \\ \ddot{\theta} + \beta \omega_0^2 \theta + \alpha \ddot{x} + \delta \omega_0^2 x = 0 \end{cases} \quad \text{où } \omega_0 = \sqrt{\frac{2b}{M}}$$

Donner les expressions de α , β , γ et δ en fonction de M , M , h , b et I_G , préciser leurs unités.

4. Calculer les pulsations propres en fonction de ω_0 dans le cas où $\alpha = 1/2$ (S.I.), $\beta = 1$ (S.I.) et $\gamma = 1/2$ (S.I.) et $\delta = 1/4$ (S.I.) (Indiquer en détail les unités S.I.).
5. Déterminer les rapports d'amplitudes dans chacun des modes et déduire les expressions des solutions générales de x et θ en fonction du temps.

Solution

1. Les déplacements sont :

$$\overrightarrow{GG'} \begin{cases} x_G = x + h \sin \theta \\ y_G = h(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

2. Energie cinétique (Théorème de K  ning) :

$$T_G = \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M v_G^2$$

avec :

$$v_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 = (\dot{x} + h\dot{\theta})^2$$

Finalement :

$$T_G = \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M v_G^2 = \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{x} + h\dot{\theta})^2$$

$$T_G = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (I_G + Mh^2) \dot{\theta}^2 + Mh\dot{x}\dot{\theta}$$

L'énergie potentielle est :

$$U = bx^2 + (bh^2 - Mgh) \frac{\theta^2}{2} + b h x \theta$$

3. les équations différentielles du mouvement :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\ddot{x} + Mh\ddot{\theta} + 2bx + bh\theta = 0 \\ (I_G + Mh^2)\ddot{\theta} + Mh\ddot{x} + (bh^2 - Mgh)\theta + b h x = 0 \end{cases}$$

qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma \ddot{\theta} + \frac{\gamma}{2} \omega_0^2 \theta = 0 \\ \ddot{\theta} + \beta \omega_0^2 \theta + \alpha \ddot{x} + \delta \omega_0^2 x = 0 \end{cases}$$

avec :

$$\alpha = \frac{Mh}{(I_G + Mh^2)}, \quad \beta = \frac{M(bh^2 - Mgh)}{2b(I_G + Mh^2)}, \quad \gamma = h, \quad \delta = \frac{M}{2} \frac{h}{(I_G + Mh^2)}$$

Les unités

$\alpha(m^{-1})$, β est un coefficient sans unité, $\gamma(m)$, $\delta(m)$.

4. Dans le cas où $\alpha = 4 m^{-1}$, $\beta = 1$, $\gamma = 4 m$ et $\delta = 2 m$:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 4\ddot{\theta} + \omega_0^2 x + 2\omega_0^2 \theta = 0 \\ 4\ddot{x} + \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta + 2\omega_0^2 x = 0 \end{cases}$$

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & 2\omega_0^2 - 4\omega^2 \\ 2\omega_0^2 - 4\omega^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (2\omega_0^2 - 4\omega^2)^2 = 0$$

Les pulsations propres sont :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \omega_0, \omega_2 = \sqrt{\frac{3}{5}} \omega_0$$

5. Le rapport des amplitudes :

Pour le mode 1 : $\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \omega_0$

Les solutions sont :

$$\begin{cases} x = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \theta = A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \end{cases}$$

Dans ce cas :

$$\begin{bmatrix} \omega_0^2 - \omega_1^2 & 2\omega_0^2 - 4\omega_1^2 \\ 2\omega_0^2 - 4\omega_1^2 & \omega_0^2 - \omega_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} = 0$$

On trouve $A_{21}/A_{11} = -1 \text{ m}^{-1}$.

Pour le mode 2 : $\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{3}{5}} \omega_0$

Les solutions sont :

$$\begin{cases} x = A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta = A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Dans ce cas :

$$\begin{bmatrix} \omega_0^2 - \omega_2^2 & 2\omega_0^2 - 4\omega_2^2 \\ 2\omega_0^2 - 4\omega_2^2 & \omega_0^2 - \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = 0$$

On trouve $A_{22}/A_{12} = -1 \text{ m}^{-1}$.

Les solutions générales sont :

$$\begin{cases} x = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta = -A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Problème 4

Partie 1 : Système à un degré libre

Soit le système dynamique représenté sur la figure ci-dessous. Un cylindre homogène de masse M et de rayon R est attaché par son extrémité à un bâti fixe (B) par l'intermédiaire d'un ressort de raideur $k/4$, un amortisseur relie l'axe de rotation de révolution du cylindre au bâti. Une tige rigide de masse négligeable et de longueur L , est solidaire du cylindre qui peut rouler sans glisser sur un plan horizontal (Figure 17).

1. Calculer :
 - L'énergie cinétique.
 - L'énergie potentielle.
 - La fonction de dissipation.
2. Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement du système.
3. Déterminer la solution de l'équation différentielle $x(t)$.

Partie 2 : Système à un degré forcé

Le bâti (B) est animé d'un mouvement sinusoïdale d'amplitude a et de pulsation ω .

1. Déterminer l'équation différentielle qui régit le mouvement.
2. Trouver le déplacement en régime permanent, et établir l'expression de son amplitude de vibration.
3. Calculer la pulsation de résonance ω_R (faible amortissement $\alpha = 0$).
4. Calculer l'impédance du système $Z_e = F(t)/\dot{x}(t)$.

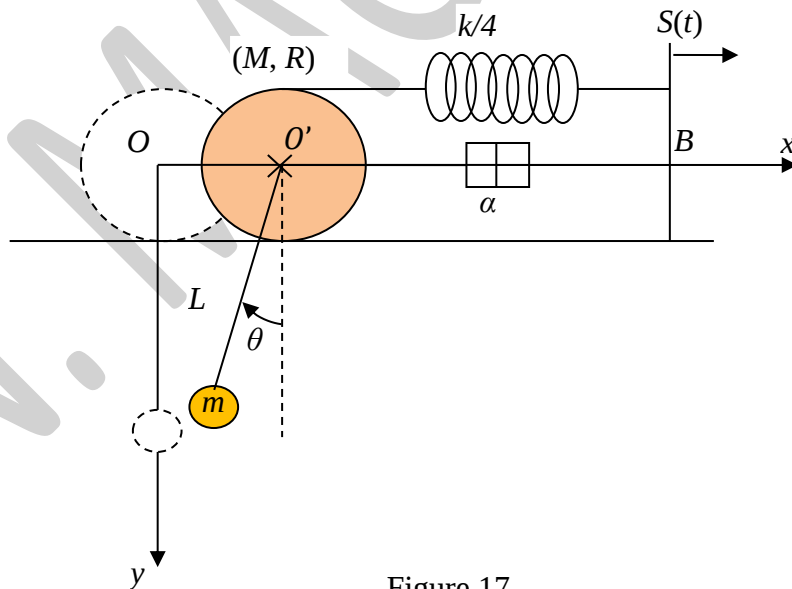


Figure 17

Partie 3 : Système à deux degré libre

Un deuxième cylindre de masse M et de rayon R et relié par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k à l'axe de révolution du premier cylindre (Figure 18).

1. Etablir les nouvelles équations différentielles qui régissent le mouvement du système.
2. Calculer les pulsations ω_1 et ω_2 propres du système ainsi que les rapports d'amplitudes de chacun des modes. On posera : $L = 2R$, $m = \frac{9}{2}M$ et $mg \frac{L}{R^2} = 2k$ (On se placera dans le cas où $\alpha = 0$).
3. Déterminer les solutions générales du mouvement sachant qu'à $t = 0$ s, $x_1 = x_0$, $x_2 = 0$ et $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$

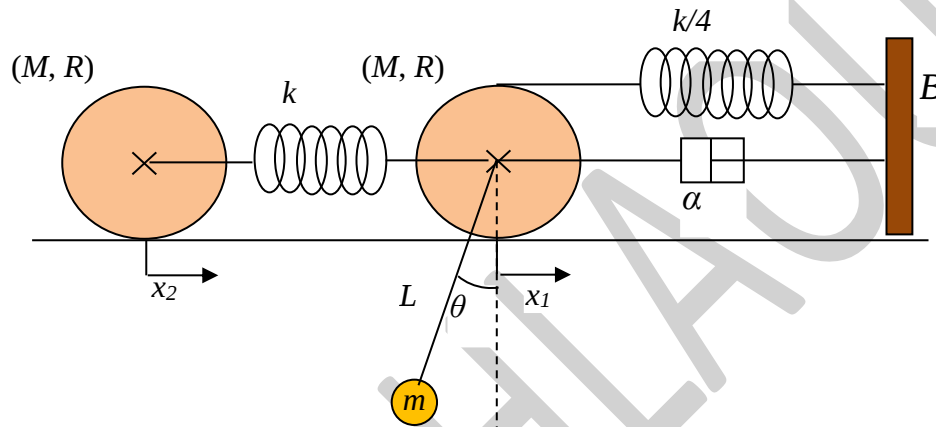


Figure 18

Partie 4 : Système à deux degrés forcé

Le bâti (B) est animé d'un mouvement sinusoïdale d'amplitude a et de pulsation ω (Figure 19).

1. Déterminer les équations différentielles qui régissent le mouvement.
2. Calculer les pulsations de résonance et d'antirésonance.
3. Dédire les équations aux vitesses $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$ en notation complexes.
4. Donner le schéma électrique équivalent.

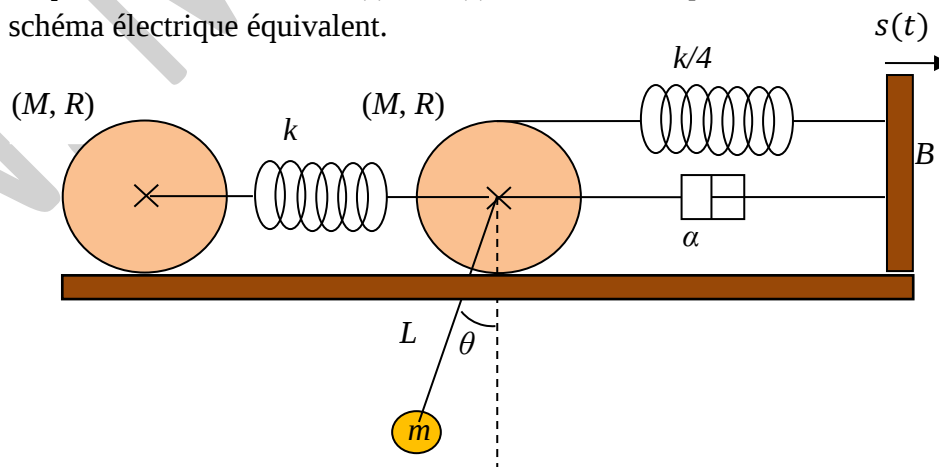


Figure 19

Solution

Partie 1 : Système à un degré libre

1. Les énergies

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} M + m \left(1 - \frac{L}{R} \right)^2 \right] \dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2} \left[k + mg \frac{L}{R^2} \right] x^2$$

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$$

2. L'équation du mouvement :

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\delta = \frac{\alpha}{2 \left[\frac{3}{2} M + m \left(1 - \frac{L}{R} \right)^2 \right]}, \quad \omega_0^2 = \frac{\left[k + mg \frac{L}{R^2} \right]}{\left[\frac{3}{2} M + m \left(1 - \frac{L}{R} \right)^2 \right]}$$

3. Cas du régime oscillatoire amorti :

$$x(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$$

Partie 2 : Système à un degré forcé

1. Les énergies.

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} M + m \left(1 - \frac{L}{R} \right)^2 \right] \dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2} \left[\frac{k}{4} (2x - s)^2 + mg \frac{L}{R^2} x^2 \right]$$

$$D = \frac{1}{2} \alpha (\dot{x} - \dot{s})^2$$

L'équation du mouvement.

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\frac{k}{2} s + \alpha \dot{s}}{\left[\frac{3}{2} M + m \left(1 - \frac{L}{R} \right)^2 \right]}$$

2. La solution de l'équation du mouvement.

En régime permanent : $x = x_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$

On trouve :

$$x = \frac{\frac{k}{2} + j\alpha\omega}{\left[\frac{3}{2} M + m \left(1 - \frac{L}{R} \right)^2 \right] [\omega^2 - \omega_0^2 + 2j\delta\omega]} s$$

L'amplitude est :

$$x_0 = \frac{\sqrt{\left(\frac{k}{2} \right)^2 + (\alpha\omega)^2}}{\left[\frac{3}{2} M + m \left(1 - \frac{L}{R} \right)^2 \right] \sqrt{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\delta\omega)^2]}} s_0$$

3. Après calcul :

$$\omega_R = \omega_0$$

4. L'impédance d'entrée :

$$Z_e = \frac{F}{\dot{x}} = \alpha + j \left[\frac{3}{2} M + m \left(1 - \frac{L}{R} \right)^2 \right] \omega + \frac{1}{j\omega} \left[k + mg \frac{L}{R^2} \right]$$

Partie 3 : Système à deux degré libre

1. Les équations du mouvement

$$\begin{cases} \left[\frac{3}{2} M + m \left(1 - \frac{L}{R} \right)^2 \right] \ddot{x}_1 + \alpha \dot{x}_1 + \left[2k + mg \frac{L}{R^2} \right] x_1 - kx_2 = 0 \\ \frac{3}{2} M \ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

2. Les pulsations propres :

Dans le cas où : $L = 2R$, $m = \frac{9}{2}M$ et $mg \frac{L}{R^2} = 2k$.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{3M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

3. Les solutions générales.

Les rapports d'amplitudes sont 2 pour le mode 1 et -2 pour le mode 2.

Les solutions sont :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_0}{2} [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] \\ x_2 = x_0 [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)] \end{cases}$$

Partie 4 : Système à deux degré forcé

1. Les équations du mouvement :

$$\begin{cases} 6M\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + 4kx_1 - kx_2 = \frac{k}{2}s + \alpha\dot{s} \\ \frac{3}{2}M\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

2. Les pulsations de résonance sont :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{3M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

La pulsation d'antirésonance est :

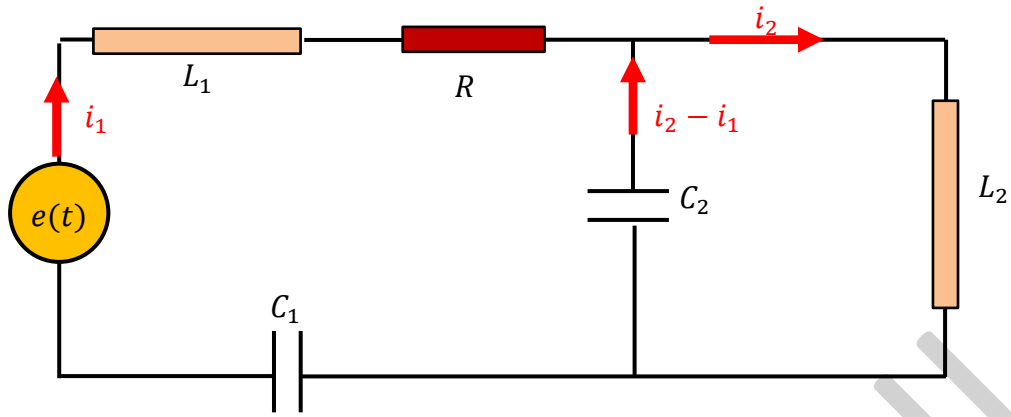
$$\omega_a = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$$

3. Les équations aux vitesses sont :

$$\begin{cases} 6jM\omega\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + 3\frac{k}{j\omega}\dot{x}_1 + \frac{k}{j\omega}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = \frac{k}{2}s + \alpha\dot{s} \\ \frac{3}{2}jM\omega\ddot{x}_2 + \frac{k}{j\omega}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \end{cases}$$

4. Le schéma électrique équivalent :

$$\begin{cases} \left(F = \frac{k}{2}s + \alpha\dot{s} \right) \Leftrightarrow e, \\ \dot{x}_{1,2} \Leftrightarrow i_{1,2} \end{cases}, \quad \begin{cases} 6M \Leftrightarrow L_1 \\ \frac{3}{2}M \Leftrightarrow L_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3k \Leftrightarrow \frac{1}{C_1}, \\ k \Leftrightarrow \frac{1}{C_2} \end{cases}, \quad \alpha \Leftrightarrow R$$



Exercice 12

On considère un cylindre plein homogène de masse M et de rayon R , en rotation autour de l'axe fixe passant par le point O . Une tige OB rigide, de longueur ℓ_1 et de masse négligeable est soudée à l'un des rayons du cylindre. Son centre est relié à un bâti B_1 par l'intermédiaire d'un ressort $4k$ en parallèle avec un amortisseur de coefficient de frottement visqueux 4α qui schématise les forces de frottements. Une masse ponctuelle m_1 est soudée à l'extrémité inférieure de la tige B et est reliée à un bâti B_2 par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k (voir figure 20). Une tige homogène (m_2, ℓ_2) de centre G est soudée à l'un des rayons du cylindre (M, R) de sorte qu'elle forme un angle de 90° avec la tige OB . A l'équilibre, la tige OB est verticale ($\theta = 0$). On désigne par $\theta(t)$ le déplacement angulaire par rapport à leur position d'équilibre.

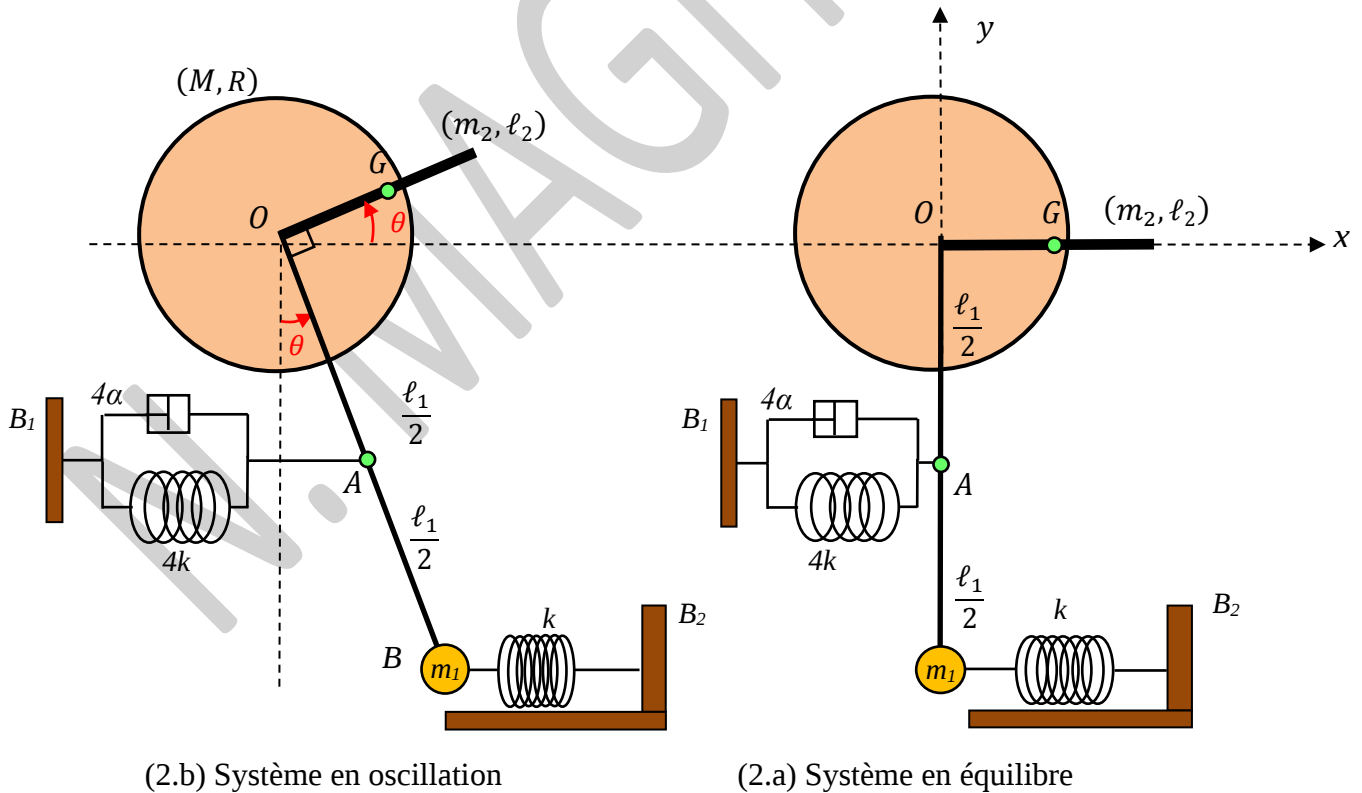


Figure 20

On s'intéresse aux oscillations de faible amplitude et on note g l'accélération de la pesanteur.

1. Dans le cas où $R = \ell_1/2 = \ell_2/\sqrt{3}$, $m = m_1 = m_2/2 = M/4$ et $mg/R = 4k$, montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Donner les expressions de δ et ω_0 en fonction de α , m et k .

Quelle condition doit-on imposer au système mécanique pour avoir un mouvement oscillatoire ?

2. Donner dans ce cas la forme de la solution $\theta(t)$.
3. Après 5 pseudos périodes l'amplitude est égale à 25% de l'amplitude initiale. Déterminer les valeurs numériques de la constante de raideur k et du coefficient frottement α . On donne $m = 1\text{kg}$, $T_a = 1\text{s}$.

Solution

1. L'énergie cinétique du système : $T = T_M + T_{m_1} + T_{m_2}$

L'énergie cinétique du disque de masse M : $T_M = \frac{1}{2} I_{/O} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} M R^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} 2m R^2 \dot{\theta}^2$

L'énergie cinétique de la masse m_1 : $T_{m_1} = \frac{1}{2} m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m 4R^2 \dot{\theta}^2$

L'énergie cinétique de la masse m_2 :

$$T_{m_2} = \frac{1}{2} m_2 v_G^2 + \frac{1}{2} I_{/G} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m_2 \frac{\ell_2^2}{4} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{\ell_2^2}{12} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m_2 \frac{\ell_2^2}{3} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} 2m R^2 \dot{\theta}^2$$

L'énergie cinétique totale : $T = \frac{1}{2} 8m R^2 \dot{\theta}^2$

L'énergie potentielle U : $U = \frac{1}{2} 4k \left(\frac{\ell_1}{2} \right)^2 \theta^2 + \frac{1}{2} k (\ell_1)^2 \theta^2 + m_1 g \ell_1 \frac{\theta^2}{2}$

$$U = \frac{1}{2} (8kR^2 + 2mgR) \theta^2$$

comme : $mg/R = 4k$

alors :

$$U = \frac{1}{2} 16k R^2 \theta^2$$

La fonction de dissipation D : $D_\alpha = \frac{1}{2} 4\alpha \left(\frac{\ell_1}{2} \right)^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \alpha \ell_1^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} 4\alpha R^2 \dot{\theta}^2$

L'équation de mouvement

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \left[\frac{\partial L}{\partial \theta} \right] = 0$$

$$\ddot{\theta} + 2\delta \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

avec : $\delta = \alpha/4m$

et : $\omega_0^2 = 2k/m$

2. Pour avoir un régime oscillatoire il faudrait que la condition $\delta < \omega_0$ soit satisfaite.

3. dans ce cas ($\delta < \omega_0$) la solution s'écrit sous la forme : $\theta(t) = \theta_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$

avec : $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

θ_0 : représente l'amplitude initiale et φ : représente la phase initiale.

4. En utilisant l'expression du décrement logarithmique nous avons : $D = \frac{1}{5} \ln(4) = 0.28$

de plus $D = \delta T_a \Rightarrow \delta = D/T_a = 0.28 \text{ s}^{-1}$

connaissant l'expression de δ en fonction de α et m : $\alpha = 4\delta m = 1.12 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$

et

$$k = \frac{m}{2} \omega_0^2 = \frac{m}{2} (\omega_a^2 + \delta^2) = 19.78 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

Exercice 13

On considère un oscillateur linéaire à deux degrés de liberté, dont les énergies cinétique et potentielle sont données par :

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}4m\dot{x}_2^2 + m\dot{x}_1\dot{x}_2$$

$$U = \frac{1}{2}4kx_1^2 + \frac{1}{2}16kx_2^2 - 4kx_1x_2$$

1. Ecrire les équations du mouvement du système.
2. Trouver les pulsations propres ω_1 et ω_2 .
3. Trouver les solutions x_1 et x_2 .
4. On applique sur le degré de liberté x_1 une force d'excitation sinusoïdale $F(t) = F_0 e^{j\omega t}$. Trouver la solution en régime permanent. A quelle pulsation observe-t-on les phénomènes de résonance et d'antirésonance.

Solution

1. Les matrices énergies cinétique et potentielle sont :

$$[T] = \begin{bmatrix} m & m \\ m & 4m \end{bmatrix}, [U] = \begin{bmatrix} 4k & -4k \\ -4k & 16k \end{bmatrix}$$

L'équation du mouvement s'écrit :

$$[T] \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + [U] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} m & m \\ m & 4m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & -4k \\ -4k & 16k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

2. Les solutions x_1 et x_2 s'écrivent :

$$\begin{cases} x_1 = A_1 e^{j\omega t} \\ x_2 = A_2 e^{j\omega t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega^2 A_1 e^{j\omega t} = -\omega^2 x_1 \\ \ddot{x}_2 = -\omega^2 A_2 e^{j\omega t} = -\omega^2 x_2 \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation du mouvement :

$$\begin{bmatrix} 4k - m\omega^2 & -4k - m\omega^2 \\ -4k - m\omega^2 & 16k - 4m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0$$

Nous recherchons des solutions non triviales. Le déterminant de la matrice doit être nul :

$$\begin{vmatrix} 4k - m\omega^2 & -4k - m\omega^2 \\ -4k - m\omega^2 & 16k - 4m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4k - m\omega^2)(16k - 4m\omega^2) - (4k + m\omega^2)^2 = 0$$

Nous obtenons :

$$\omega_1^2 = \frac{4k}{3m}, \omega_2^2 = \frac{12k}{m}$$

3. Les rapports d'amplitudes dans les deux modes sont :

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{1}{2}, \frac{A_{22}}{A_{12}} = -\frac{1}{2}$$

Les solutions générales s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

et :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{bmatrix}$$

$[A]$ représente la matrice de passage, y_1 et y_2 les coordonnées propres ou normales.

Les combinaisons linéaires des solutions particulières sont des solutions, ainsi :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ C_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, la matrice de passage s'écrit :

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4. La force est appliquée sur le degré de liberté x_1 , l'équation du mouvement s'écrit :

$$[T] \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + [U] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou bien :

$$[T][A] \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + [U][A] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

En multipliant l'équation par la transposée de la matrice de passage $[A]^t$:

$$[A]^t [T] [A] \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + [A]^t [U] [A] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = [A]^t \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$[A]^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Cela nous permet de diagonaliser les matrices énergies cinétique et potentielle :

$$\begin{bmatrix} 12m & 0 \\ 0 & 4m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16k & 0 \\ 0 & 48k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2F \\ 2F \end{bmatrix}$$

En inversant par la matrice de passage :

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F}{6m} \\ \frac{F}{2m} \end{bmatrix}$$

Comme :

$$\begin{cases} y_1 = A_1 e^{j\omega t} \\ y_2 = A_2 e^{j\omega t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{y}_1 = -\omega^2 A_1 e^{j\omega t} = -\omega^2 y_1 \\ \ddot{y}_2 = -\omega^2 A_2 e^{j\omega t} = -\omega^2 y_2 \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation du mouvement :

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 - \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F}{6m} \\ \frac{F}{2m} \end{bmatrix}$$

Nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F}{6m} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} \\ \frac{F}{2m} \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \end{bmatrix}$$

Les solutions x_1 et x_2 sont obtenue par la relation :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{F}{6m} \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} \\ \frac{F}{2m} \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \end{bmatrix} = \frac{F}{m} \begin{bmatrix} \frac{1}{3(\omega_1^2 - \omega^2)} + \frac{1}{2(\omega_2^2 - \omega^2)} \\ \frac{1}{3(\omega_1^2 - \omega^2)} - \frac{1}{2(\omega_2^2 - \omega^2)} \end{bmatrix}$$

Le phénomène de résonance correspond à des amplitudes infinies, cela se produit si :

$$\omega_{R1} = \omega_1 \text{ et } \omega_{R2} = \omega_2$$

L'antirésonance est observée lorsque $x_1 = 0$, cela est possible si :

$$\omega_a = \sqrt{\frac{3\omega_1^2 + 2\omega_2^2}{5}} = \sqrt{\frac{28k}{5m}}$$

Problème 5

Dans le système mécanique représenté par la figure 21, le cylindre de masse M et de rayon R peut rouler sans glisser sur un plan horizontal. Il est relié au bâti B_1 par l'intermédiaire d'un ressort K_1 au point A et au bâti B_2 au point C , par l'intermédiaire d'un ressort K_2 . Une tige homogène de longueur $2L$, de masse m lui est soudée sur l'un de ses diamètres. G est le centre de masse de la tige et du disque.

- Les bûts B_1, B_2 sont fixes dans tout le problème.
- A l'équilibre, la tige est verticale et les deux ressorts sont au repos. Lors du mouvement, la rotation du cylindre par rapport à sa position d'équilibre est repérée par l'angle $\theta(t)$.

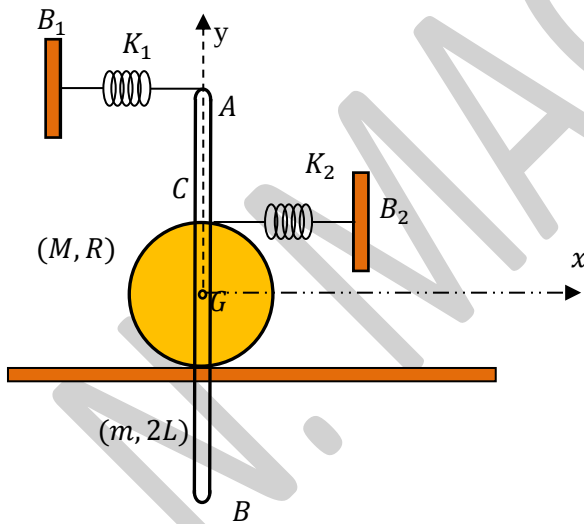
I. Régime libre conservatif (Figure 21).

On écarte la tige d'une amplitude θ_0 très faible et on l'abandonne sans vitesse initiale.

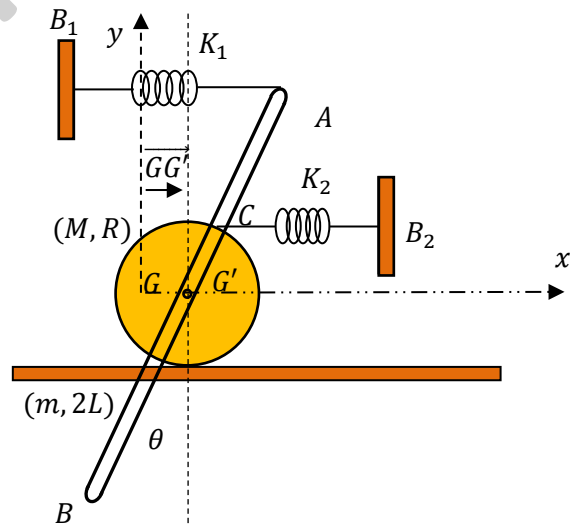
1. Déterminer l'énergie potentielle du système $U(\theta)$ et son énergie cinétique $T(\dot{\theta})$.
2. Etablir l'équation du mouvement et montrer que sa pulsation propre s'écrit sous la forme

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_1(L+R)^2 + K_2(2R)^2}{\frac{3}{2}MR^2 + m\left(R^2 + \frac{L^2}{3}\right)}}$$

3. Donner la solution générale des oscillations de ce système en tenant compte des conditions initiales.



(a) : Système en équilibre



(b) : Système en oscillation

Figure 21 : Système en oscillations libres

II. Régime forcé (Figure 22).

Le système évolue maintenant en présence de frottements visqueux de coefficient α qu'on schématise par un amortisseur fixé au bâti B_1 et relié au centre de masse G (Figure 22).

On applique perpendiculairement à l'extrémité B de la tige une force sinusoïdale:

$$F(t) = F_0 \sin \omega t$$

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement du système en fonction de θ .
2. Montrer que la solution générale de l'évolution (mouvement) de ce système est constituée de deux termes. Donner le nom de chacun d'eux.
3. Déterminer avec démonstration la solution de l'évolution du système dans son régime permanent.
4. Donner la puissance moyenne sur une période fournie au système $\langle P_F(\omega) \rangle_T$ et son expression à la résonance $\langle P_F(\omega = \omega_R) \rangle_T$ en fonction des données du problème.
5. Tracer la courbe représentative de la puissance moyenne sur une période. Trouver en faisant le calcul, les pulsations ω_1 et ω_2 pour lesquelles la puissance moyenne est égale la moitié de la puissance moyenne maximale. En déduire la largeur de la bande passante puis donner le facteur de qualité du système.

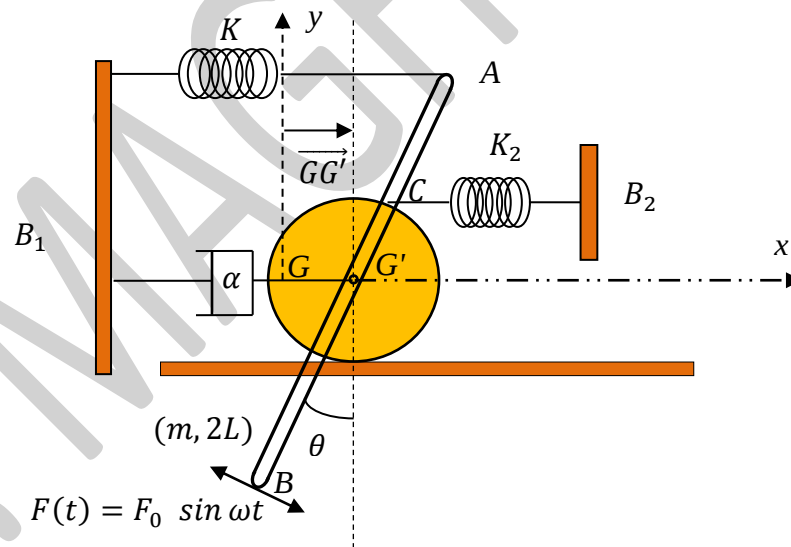


Figure 22: Système en oscillations forcées

Solution

Régime libre conservatif.

1. Expression de l'énergie potentielle $U(\theta)$ et l'énergie cinétique $T(\dot{\theta})$

$$U(\theta) = U_{K_1} + U_{K_2} = \frac{1}{2} K_1 (R + L)^2 \theta^2 + \frac{1}{2} K_2 (2R\theta)^2$$

$$T(\dot{\theta}) = T_M + T_m = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3}{2} M + m \right) R^2 + \frac{m L^2}{3} \right] \dot{\theta}^2$$

2. Equation du mouvement du système

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{[K_1(R + L)^2 + 4K_2 R^2]}{\left[\frac{3}{2} M R^2 + m R^2 + m \frac{L^2}{3} \right]} \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

On voit bien que

$$\omega_0^2 = \frac{[K_1(R + L)^2 + 4K_2 R^2]}{\left[\frac{3}{2} M R^2 + m R^2 + m \frac{L^2}{3} \right]}$$

3. Solution générale du régime libre conservative

$\theta = C e^{j(\omega_0 t + \varphi)}$ avec C et φ sont les constantes d'intégration que nous détermineront avec les conditions initiales suivantes : $\theta(t = 0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t = 0) = 0$

$$\begin{cases} C = \theta_0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

On a donc

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) = \theta_0 \cos \left(\sqrt{\frac{K_1(R + L)^2 + 4K_2 R^2}{\frac{3}{2} M R^2 + m R^2 + m \frac{L^2}{3}}} t \right)$$

III. Régime forcé.

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement du système en fonction de θ .

$$D = \frac{1}{2} \alpha (R \dot{\theta}(t))^2$$

$$U_g = F(t)(L - R)\theta(t) = F_0(L - R) \cos(\omega t) \theta(t)$$

Equation du mouvement

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial U_g}{\partial \theta}$$

$$\left[\frac{3}{2} M R^2 + m R^2 + m \frac{L^2}{3} \right] \ddot{\theta} + \alpha R^2 \dot{\theta} + [K_1(R + L)^2 + K_2 4R^2] \theta = F_0(L - R) \cos(\omega t)$$

$$\ddot{\theta} + 2\delta \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = f_0 \cos(\omega t)$$

$$\delta = \frac{\alpha R^2}{2 \left[\frac{3}{2} MR^2 + mR^2 + m \frac{L^2}{3} \right]}, \quad f_0 = \frac{F_0(L-R)}{\left[\frac{3}{2} MR^2 + mR^2 + m \frac{L^2}{3} \right]}$$

2. La résolution de l'équation du mouvement du régime forcé

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = f_0 \cos(\omega t) \text{ se fera en deux étapes;}$$

La résolution de l'équation sans second membre (résolution de l'équation homogène)

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

et la résolution de l'équation avec second membre.

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = f_0 \cos(\omega t)$$

La résolution de l'équation sans second membre (résolution de l'équation homogène) correspond à la solution du régime libre conservatif qui disparaît toujours au bout d'un certain temps court. On l'appelle donc la solution du régime transitoire.

Il ne restera donc dans la solution générale que la contribution venant de la solution de l'équation différentielle avec second membre, qu'on appelle la solution du régime permanent.

3. Solution de l'évolution du système dans son régime permanent.

On prend la solution particulière de type sinusoïdale

$$\theta_p = C e^{j(\omega t + \varphi)}$$

avec :

$$C = \frac{F_0(L-R)}{\left[\frac{3}{2} MR^2 + mR^2 + m \frac{L^2}{3} \right]} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}, \quad \tan(\varphi) = -\frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

La solution générale est donc

$$\theta(t) = \frac{F_0(L-R)}{\left[\frac{3}{2} MR^2 + mR^2 + m \frac{L^2}{3} \right]} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

4. Donner la puissance moyenne sur une période fournie au système $\langle P_F(\omega) \rangle_T$

$$\langle P_F(\omega) \rangle_T = \frac{F_0^2(L-R)^2}{4\delta \left[\frac{3}{2} MR^2 + mR^2 + m \frac{L^2}{3} \right]} \frac{(2\delta\omega)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}$$

Son expression à la résonance $\langle P_F(\omega = \omega_R = \omega_0) \rangle_T$ en fonction des données du problème

$$\langle P_F(\omega = \omega_R = \omega_0) \rangle_T = \frac{F_0^2(L-R)^2}{4\delta \left[\frac{3}{2} MR^2 + mR^2 + m \frac{L^2}{3} \right]}$$

5. courbe représentative de la puissance moyenne sur une période.

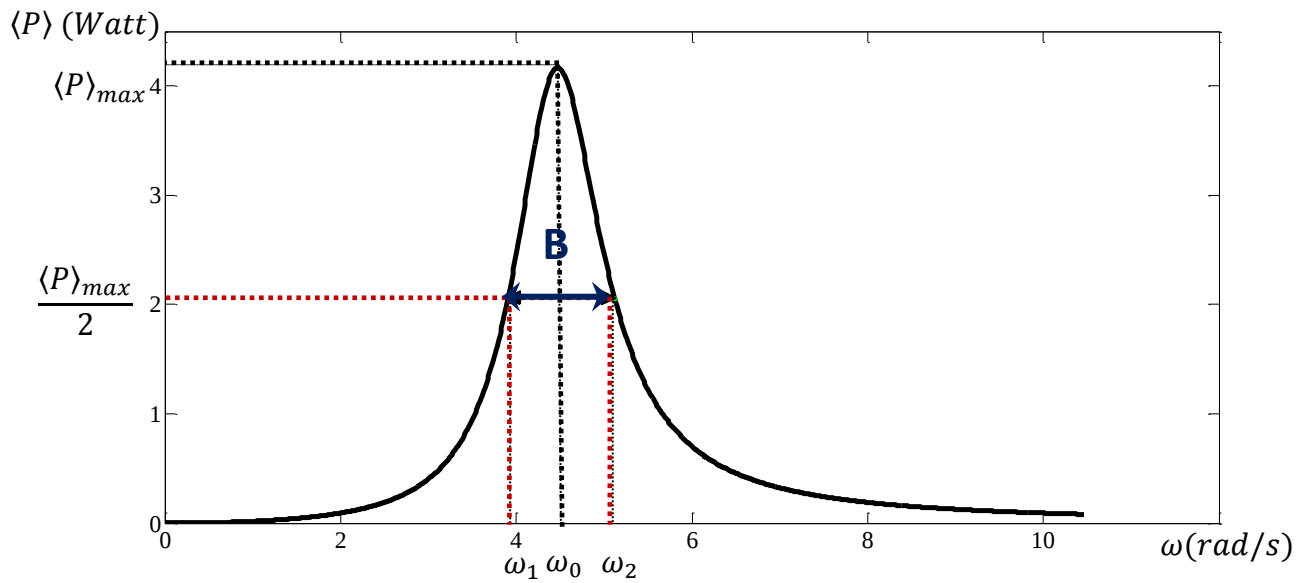


Figure 23 : Courbe de résonance en puissance

Les pulsations ω_1 et ω_2 pour lesquelles la puissance moyenne est égale la moitié de la puissance moyenne maximale.

Après calcul on trouve

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \delta^2} - \delta \\ \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \delta^2} + \delta \end{cases}$$

-La largeur de la bande passante : $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1| = 2\delta$

-Le facteur de qualité du système : $Q = \omega_0/2\delta$

Ondes transversales le long d'une corde

Résumé de cours

1. Equation d'onde

Considérons une corde homogène de masse linéique μ , de longueur infinie et tendue rectilignement avec une tension T_0 constante selon la direction x (Figure 1). On néglige les effets de la pesanteur. Une perturbation de faible amplitude suivant l'axe Oy est décrite par l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

v représente la vitesse de l'onde : $v = \sqrt{T_0/\mu}$

Cette équation est appelée équation d'onde de d'Alembert.

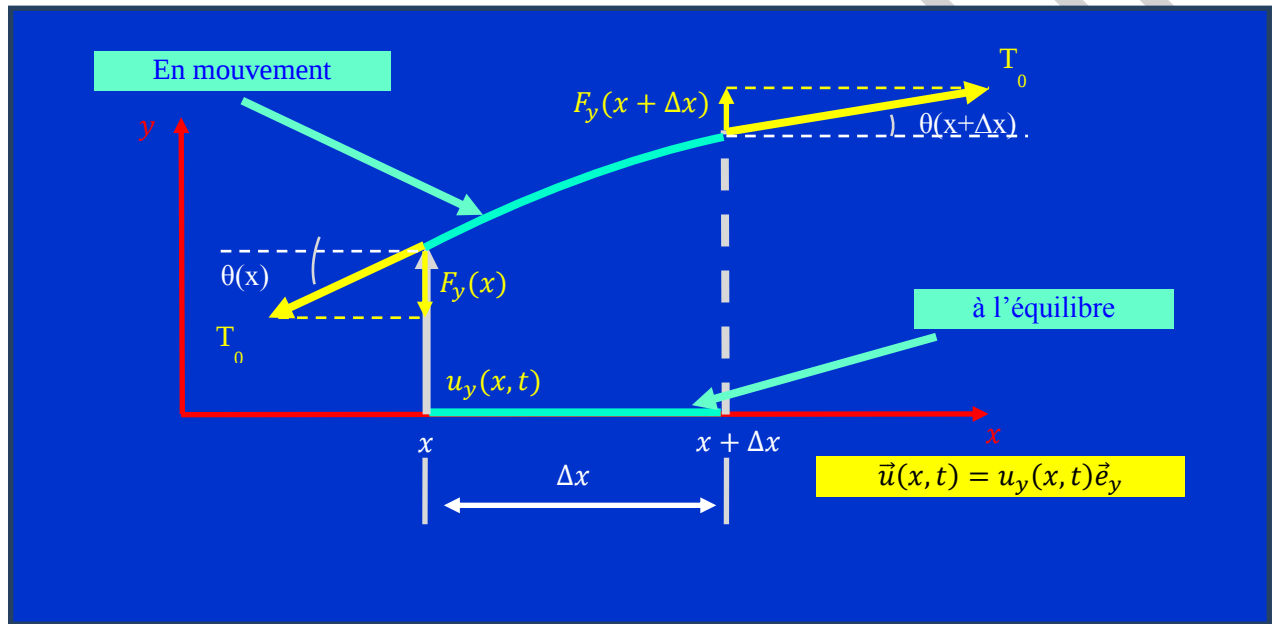


Figure 1

La solution générale de cette équation est la somme de deux solutions particulières :

$$u(x, t) = F\left(t - \frac{x}{v}\right) + G\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

F représente à une onde qui se propage dans le sens des x positifs.

G représente à une onde qui se propage dans le sens des x négatifs.

La solution dans le cas d'une onde plane progressive et sinusoidale s'écrit :

$$u(x, t) = U_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

2. Impédance

On définit l'impédance en un point par le rapport de la force à la vitesse.

$$Z(x) = \frac{F(x, t)}{\dot{u}(x, t)}$$

$F(x, t)$ représente la projection suivant l'axe Oy de la force exercée, en ce point, par la partie gauche sur la partie droite :

$$F(x, t) = -T_0 \frac{\partial u}{\partial x}$$

Dans le cas d'une onde progressive : $Z(x) = \sqrt{\mu T_0} \forall x$

Cette impédance est appelée impédance caractéristique de la corde Z_c .

3. Réflexion et transmission dans le cas de deux cordes semi infinies

Soit deux cordes de longueur semi-infinie, reliées en $x = 0$. Leurs masses linéiques sont respectivement μ_1 et μ_2 . Lorsqu'une onde venant de $-\infty$ se propage vers $x = 0$ dans la première corde, elle donne naissance au point de jonction, $x = 0$, à une onde réfléchie et une onde transmise.

Corde 1 : $x \leq 0$

$$\begin{cases} u_1(x, t) = U_I e^{i(\omega t - k_1 x)} + U_R e^{i(\omega t + k_1 x)} \\ F_1(x, t) = -T_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} = i k_1 T_0 [U_I e^{i(\omega t - k_1 x)} - U_R e^{i(\omega t + k_1 x)}] \end{cases}$$

où U_I et U_R représentent respectivement les amplitudes de l'onde incidente et réfléchie.

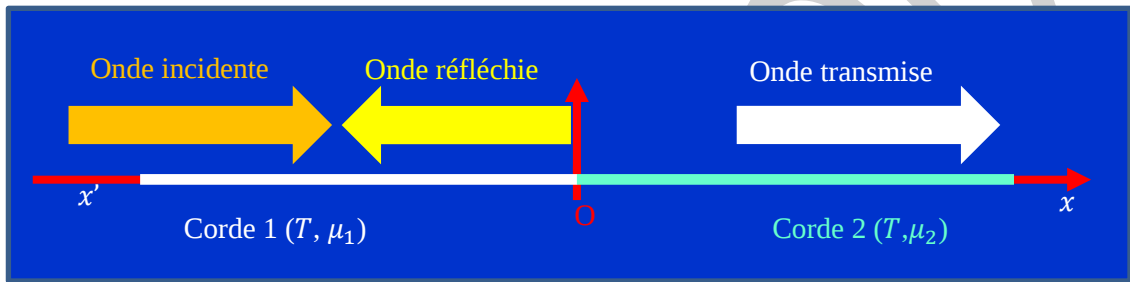


Figure 2

Corde 2 : $x \geq 0$

$$\begin{cases} u_2(x, t) = U_T e^{i(\omega t - k_2 x)} \\ F_2(x, t) = T_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} = -i k_2 T_0 U_T e^{i(\omega t - k_2 x)} \end{cases}$$

L'écriture de la continuité du déplacement et l'application du principe fondamental de la dynamique en $x = 0$ permet d'obtenir le coefficient de réflexion et de transmission:

$$R = \frac{U_R}{U_I}$$

$$T = \frac{U_T}{U_I}$$

Nous trouvons :

$$R = \frac{Z_{c1} - Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}}$$

$$T = \frac{2Z_{c1}}{Z_{c1} + Z_{c2}}$$

Dans le cas où la 2^{ème} corde est remplacée par une impédance terminale (masse, ressort, amortisseur etc...), alors :

$$R = \frac{Z_c - Z_T}{Z_c + Z_T}$$

$Z_T = im\omega$ dans le cas d'une masse m .

$Z_T = b/i\omega$ dans le cas d'un ressort de raideur b .

$Z_T = \alpha$ dans le cas d'un amortisseur de coefficient α .

Les puissances des ondes incidente, réfléchie et transmise sont respectivement :

$$P_i = F_i \dot{u}_i = -T_0 \frac{\partial u_i}{\partial x} \dot{u}_i = \omega^2 Z_{c_1} [U_I \sin(\omega t - k_1 x)]^2$$

$$P_r = F_r \dot{u}_r = T_0 \frac{\partial u_r}{\partial x} \dot{u}_r = \omega^2 Z_{c_1} [U_R \sin(\omega t + k_1 x)]^2$$

$$P_t = F_t \dot{u}_t = -T_0 \frac{\partial u_t}{\partial x} \dot{u}_t = \omega^2 Z_{c_2} [U_T \sin(\omega t - k_2 x)]^2$$

u_i , u_r et u_t sont respectivement les ondes incidente, réfléchie et transmise.

Les puissances moyennes correspondantes sont respectivement :

$$\langle P_i \rangle = \omega^2 Z_{c_1} U_I^2$$

$$\langle P_r \rangle = \omega^2 Z_{c_1} U_R^2$$

$$\langle P_t \rangle = \omega^2 Z_{c_2} U_T^2$$

En on déduit les coefficients de réflexion et de transmission en puissance :

$$R_P = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$$

$$T_P = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

Exercices et problèmes corrigés

Exercice 1

Rappeler la forme générale des solutions $u(x, t)$ de l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Les fonctions

$$u_1(x, t) = A \exp \left[-\frac{(x - Vt)^2}{\sigma^2} \right] \quad (2)$$

$$u_2(x, t) = x^2 - V^2 t^2 \quad (3)$$

$$u_3(x, t) = A \left(t^2 + \frac{x^2}{V^2} \right) \quad (4)$$

$$u_4(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x - Vt}{V'} \right) \right] \quad (5)$$

$$u_5(x, t) = A \cos[kx] \cos[\omega t] \quad (6)$$

Décrivent-elles des ondes solutions de l'équation (1) ?

Solution

La solution générale de l'équation d'onde est :

$$u(x, t) = F \left(t - \frac{x}{V} \right) + G \left(t + \frac{x}{V} \right)$$

F et G sont respectivement les fonctions d'ondes progressive et régressive.

Pour montrer que $u(x, t)$ est solution de l'équation d'ondes de d'Alembert avec une vitesse de propagation des ondes égale à V , on peut :

- soit vérifier directement l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

- soit utiliser le théorème de d'Alembert et vérifier que $u(x, t)$ est de la forme

$$u(x, t) = F \left(t - \frac{x}{V} \right) + G \left(t + \frac{x}{V} \right)$$

où $F(p)$ et $G(q)$ sont des fonctions arbitraires.

Vérification :

- La fonction $u_1(x, t)$ est une fonction d'onde car elle vérifie l'équation d'onde de d'Alembert.
- La fonction $u_2(x, t)$ ne vérifie pas l'équation d'onde, elle n'est donc pas une fonction d'onde.
- La fonction $u_3(x, t)$ est une fonction d'onde car elle vérifie l'équation d'onde.
- La fonction $u_4(x, t)$ ne vérifie pas l'équation d'onde, elle n'est donc pas une fonction d'onde.
- La fonction $u_5(x, t)$ est une fonction d'onde car elle vérifie l'équation d'onde.

Exercice 2

Une corde infiniment longue est tendue le long de l'axe $x'Ox$. Une onde transverse progressive se propage sur cette corde sans se déformer vers les x croissants. La forme de la corde à l'instant $t = 0$ est donnée par la fonction : $y = a e^{-\alpha x^2}$.

où a et α sont des constantes (Figure 1).

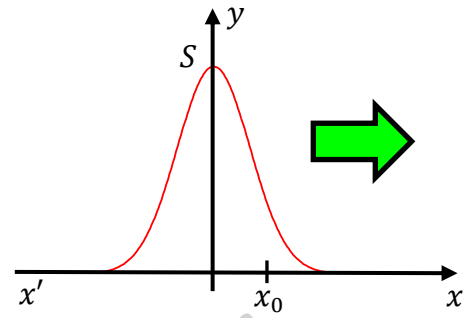


Figure 1

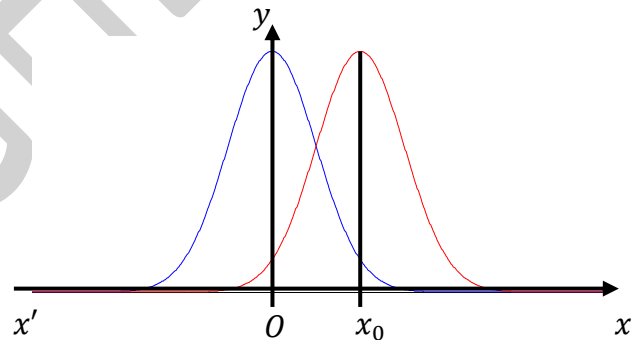
On appelle sommet de l'onde le point de la corde dont le déplacement par rapport à sa position d'équilibre est maximal. Le sommet de l'onde à l'instant $t = 0$ est en S d'abscisse $x = 0$.

1. Représenter l'allure de la corde à l'instant t_0 où le sommet de l'onde atteint le point d'abscisse $x = x_0$. On reproduira sur la même figure l'allure de la corde à l'instant $t = 0$.
2. Quelle est à l'instant t_0 , en termes de x , a , α et x_0 , la fonction $y = f(x)$ qui décrit la forme de la corde ?

Solution

1. L'allure de la corde lorsque l'onde atteint le point d'abscisse x_0 est représentée sur la figure ci-contre.
2. La courbe est la translatée de x_0 de la courbe à l'instant $t = 0$:

$$y = a e^{-\alpha(x-x_0)^2}$$



Exercice 3

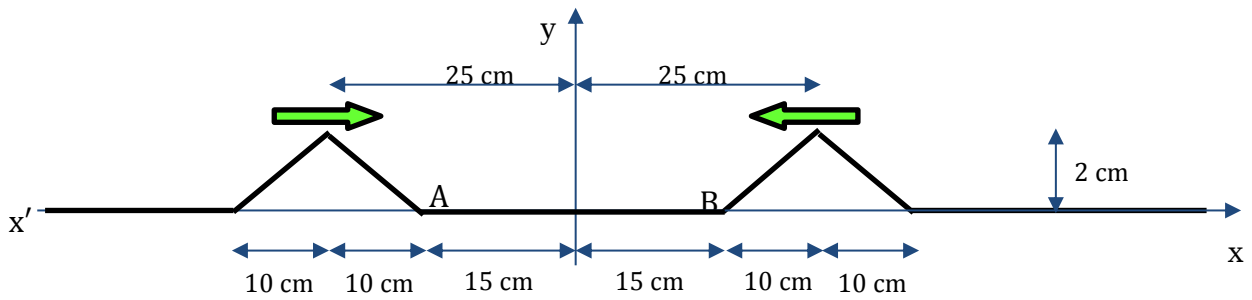
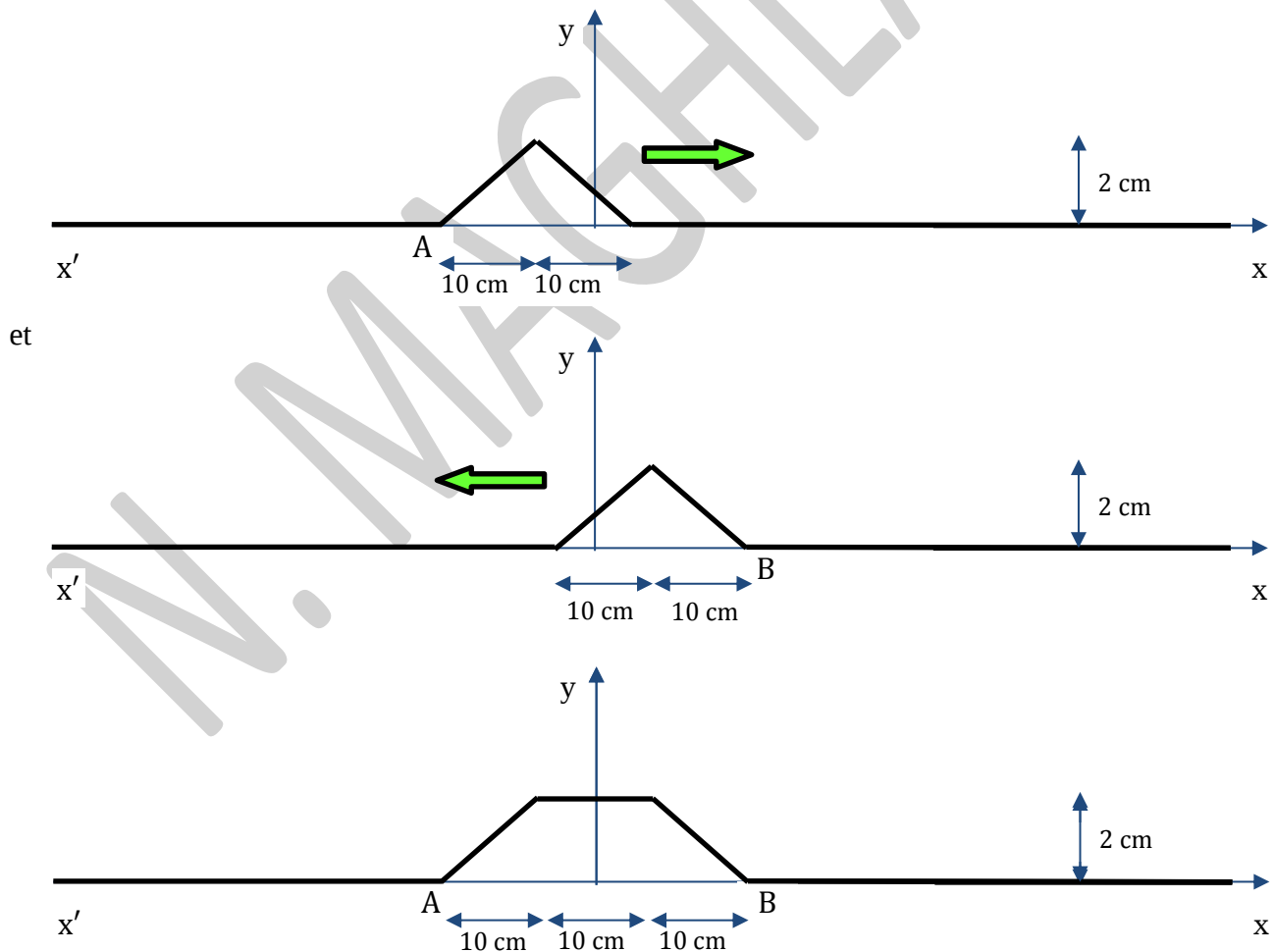


Figure 2

Une corde infiniment longue est tendue le long de l'axe $x'Ox$. Deux ondes transverses progressives se propagent en sens opposés sur la corde. A l'instant $t = 0$ s, les deux ondes ont une forme triangulaire et se dirigent l'une vers l'autre (Figure 2). La vitesse de propagation de ces ondes est $V = 10 \text{ ms}^{-1}$. Représenter l'allure de la corde à l'instant $t = 0.02$ s. On marquera sur la figure les points A et B de la corde (d'abscisses ± 15 cm) ainsi que suffisamment d'indications (cotes) pour déterminer complètement la forme de la corde.

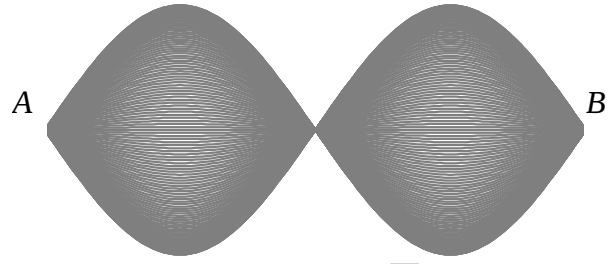
Solution

A l'instant $t = 0.02$ s, la forme de la corde résulte de la superposition de deux ondes



Exercice 4

Une corde de longueur $L = 50 \text{ cm}$ est tendue entre deux points A (d'abscisse $x_A = 0$) et B (d'abscisse $x_B = L$). La masse linéique de la corde est $\mu = 10 \text{ gm}^{-1}$ et la tension de la corde est T_0 . On observe dans la corde une onde transversale, harmonique, stationnaire de fréquence $f = 500 \text{ Hz}$. La corde prend l'aspect de la figure ci-contre.



1. Expliquer le sens des mots *transversale*, *harmonique* et *stationnaire*.
2. Donner l'expression $u(x, t)$ du déplacement du point d'abscisse x à l'instant t pour $x_A \leq x \leq x_B$ sachant qu'à $t = 0$ la corde est dans sa position d'équilibre et que la valeur maximum de $u(x, t)$ est A . On écrira $u(x, t)$ en fonction de x, t, f, L et A . S'il y a plusieurs solutions $u(x, t)$, on les donnera toutes.
3. Représenter la forme de la corde à divers instants. Expliquer pourquoi la corde prend l'aspect de la figure.
4. Déterminer numériquement la longueur d'onde λ , la vitesse V des ondes de la corde et la tension de la corde T_0 .

Solution

1. *Transversale* : les points de la corde se déplacent perpendiculairement à Ox (comparer à onde longitudinale).

Harmonique : l'onde est sinusoïdale.

Stationnaire : tous les points de la corde vibrent en phase ou en opposition de phase (comparer à onde progressive).

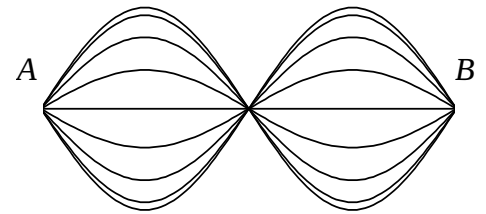
2. La forme générale d'une onde stationnaire harmonique est (λ : longueur d'onde)

$$u(x, t) = A \sin \left[\frac{2\pi x}{\lambda} + \psi \right] \sin[2\pi f t + \phi]$$

L'onde présente deux fuseaux. On a donc les conditions : $u(x, t) = 0 \forall t$ pour $x = 0, x = L/2$ et $x = L$, pour les autres valeurs de x ($0 < x < L/2$ ou $L/2 < x < L$), $u(x, t)$ n'est pas identiquement nul. Puisque $u(x, t)$, à tout instant t , est une sinusoïde en x , ces conditions impliquent que $u(x, t)$ est proportionnel à $\sin(2\pi x/L)$. On en déduit que $\psi = 0$ et $\lambda = L$. La condition à $t = 0$ donne $\phi \pmod{\pi}$. On a donc, le signe ne pouvant être déterminé par les conditions de l'énoncé.

$$u(x, t) = \pm A \sin \left[\frac{2\pi x}{L} \right] \sin[2\pi f t]$$

3. La figure ci-contre représente la forme de la corde aux instants $t_n = nT/16$ pour $n = 0, 1, \dots, 15$. La période $T = 1/f = 0.002 \text{ ms}$ est très petite devant le temps de persistance des images rétinienne. La corde apparaît comme la superposition de toutes les positions de la corde



4. $\lambda = L = 50 \text{ cm}$, $V = \lambda/T = 250 \text{ ms}^{-1}$, $V = \sqrt{T_0/\mu}$ donne $T_0 = \mu V^2 = 625 \text{ N}$.

Exercice 5

Une corde infinie de masse linéique μ est soumise à une tension T_0 supposée constante. Une masse ponctuelle M est accrochée sur la corde en $x = 0$ (Figure 3). Une onde de pulsation ω arrive de $-\infty$ et progresse dans la direction des x positifs. On néglige le poids de la corde et on étudie les petits déplacements $u(x,t)$ de la corde.

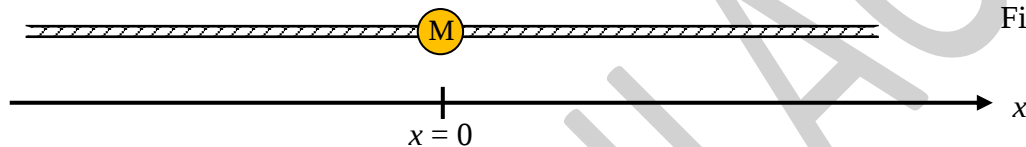


Figure 3

1. Ecrire l'expression de $u_1(x,t)$ pour les x négatifs et $u_2(x,t)$ pour les x positifs en fonction des coefficients de réflexion R et de transmission T en déplacement au point $x = 0$.

2. Montrer que la force transversale agissant sur M s'écrit :

$$F(0,t) = T_0 \left[\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} - \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} \right]$$

3. En utilisant la continuité des déplacements en $x = 0$ et en appliquant la relation fondamentale de la dynamique sur la masse M , déterminer le coefficient de réflexion R en $x = 0$.

4. Quelles sont les valeurs limites de R quand $M \rightarrow 0$ et $M \rightarrow \infty$? Expliquer l'état de la corde pour ces deux cas.

Solution

1.

$u_1(x,t) = Ae^{j(\omega t - kx)} + Be^{j(\omega t + kx)}$ et $u_2(x,t) = Ce^{j(\omega t - kx)}$ avec $k = \omega/V$ où V est la vitesse de propagation des ondes dans la corde.

En partant des définitions des coefficients de réflexion et de transmission, nous avons :

$$R = \frac{B}{A} \text{ et } T = \frac{C}{A}$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$u_1(x,t) = Ae^{j\omega t}(e^{-jkx} + Re^{jkx}) \text{ et } u_2(x,t) = ATe^{j(\omega t - kx)}$$

2. En appliquant la RFD sur la masse M :

$$F(0) = T_0 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} \right)$$

3. Continuité du déplacement en $x = 0$: $u_1(0, t) = u_2(0, t) \Rightarrow 1 + R = T$

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique:

De la RFD, nous avons : $Z(0) = Z_c + jM\omega$.

Nous trouvons donc :

$$R = \frac{Z_c - Z(0)}{Z_c + Z(0)} = \frac{-jM\omega}{2Z_c + jM\omega}$$

4. Quand $M \rightarrow 0$ nous avons $R \rightarrow 0$ nous avons une réflexion nulle, nous sommes donc dans le cas d'une corde infinie.

Quand $M \rightarrow \infty$ nous avons $R \rightarrow -1$ l'extrémité de la corde se comporte comme un point fixe en $x = 0$, ce qui donne une réflexion totale avec inversion de l'amplitude.

Exercice 6

Une corde de longueur L , de masse linéique $\mu=10 \text{ g/m}$, au point A se trouve une masse $m=0.1 \text{ Kg}$ retenue par deux ressorts identiques de raideur $b/2=125 \text{ Nm}^{-1}$ chacun, elle est tendue par une masse $M=1 \text{ kg}$ au point fixe B (Figure 4). A l'équilibre la corde est horizontale. La masse m ainsi que la corde AB sont soumises à des déplacements transversaux sinusoïdaux de pulsation ω de faibles amplitudes.

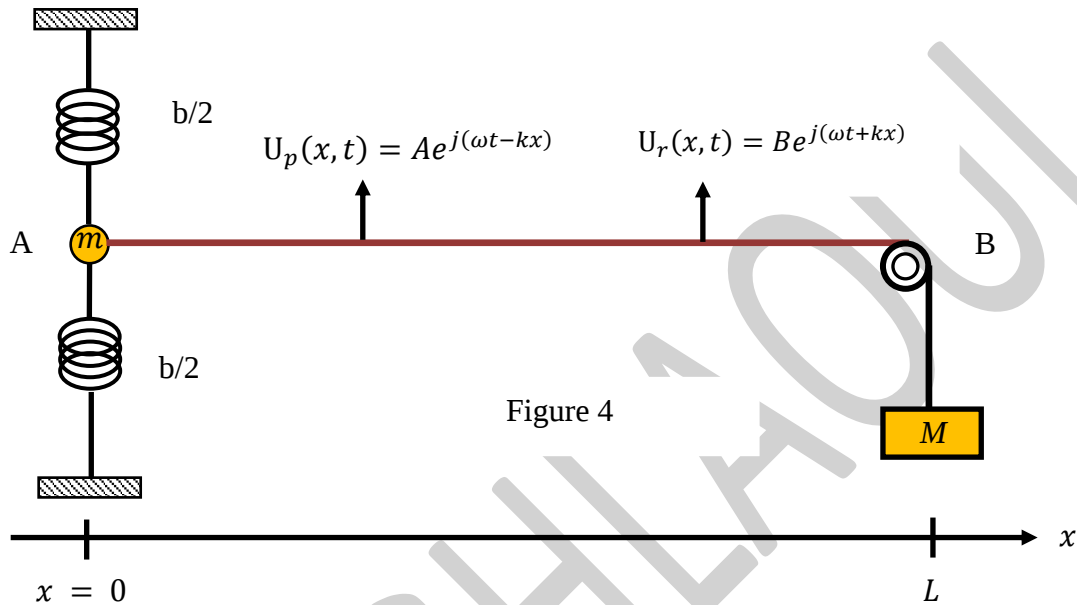


Figure 4

1. Calculer les impédances Z_A et Z_B aux points d'abscisse $x=0$ et $x=L$.
2. Calculer les coefficients de réflexion r_A (au point A) et r_B (au point B). Déterminer les modules R_A et R_B et les arguments θ_A, θ_B .
3. En tenant compte des résultats des deux questions précédentes montrer que l'équation aux pulsations propres s'exprime par :

$$\text{ctg}\left(\frac{\omega L}{V}\right) = \frac{m\omega - \frac{b}{\omega}}{Z_C}$$

Z_C : représente l'impédance caractéristique de la corde.

4. La longueur L de la corde est ajustée de sorte à avoir des ondes stationnaires avec un ventre de déplacement au point A.
 - a. En déduire la valeur de la pulsation ω ?
 - b. Calculer la valeur de L pour observer la 1^{ère} harmonique. (les harmoniques sont les modes de vibration après le mode fondamental).

Solution

1. Au point A ($x = 0$), Système mécanique $z_A = j(m\omega - b/\omega)$

En B ($x = L$), on a un point fixe $Z_B \Rightarrow \infty$

2.

$$r_B = \frac{B}{A} e^{2jkL} = \frac{Z_C - Z_B}{Z_C + Z_B} = -1$$

$$r_A = \frac{A}{B} = \frac{Z_C - Z_A}{Z_C + Z_A} = \frac{Z_C - j(m\omega - \frac{b}{\omega})}{Z_C + j(m\omega - \frac{b}{\omega})}$$

$$R_B = 1, \theta_B = \pi$$

$$R_A = 1, \theta_A = -2 \operatorname{Arctg} \left[\frac{m\omega - \frac{b}{\omega}}{Z_C} \right]$$

$$3. r_A r_B = e^{2jkL} = R_A R_B e^{j(\theta_A + \theta_B)} \text{ d'où } : 2kL - (\theta_A + \theta_B) = 2n\pi$$

et

$$\operatorname{ctg} \left(\frac{\omega L}{V} \right) = \frac{(m\omega - \frac{b}{\omega})}{Z_C}$$

4. a. ventre de déplacement en A ($x = 0$)

$$z_A = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{b}{m}} = 50 \text{ rds}^{-1}$$

b. A la 1^{ère} harmonique nous avons

$$L = \frac{3\lambda}{4}, L = \frac{3V}{4f} = \frac{3\pi}{2} \sqrt{\frac{Mmg}{b\mu}} \approx \pi (m)$$

Exercice 7

Le système de la figure 5 est constitué d'une corde homogène de masse linéique μ_1 qui est tendue horizontalement avec une tension T . En $x = 0$, on fixe une seconde corde homogène de longueur L et de masse linéique μ_2 , soumise à la même tension T . En $x = L$, la corde 2 est reliée à un système mécanique constitué d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α , d'une masse M et d'un ressort de raideur b .

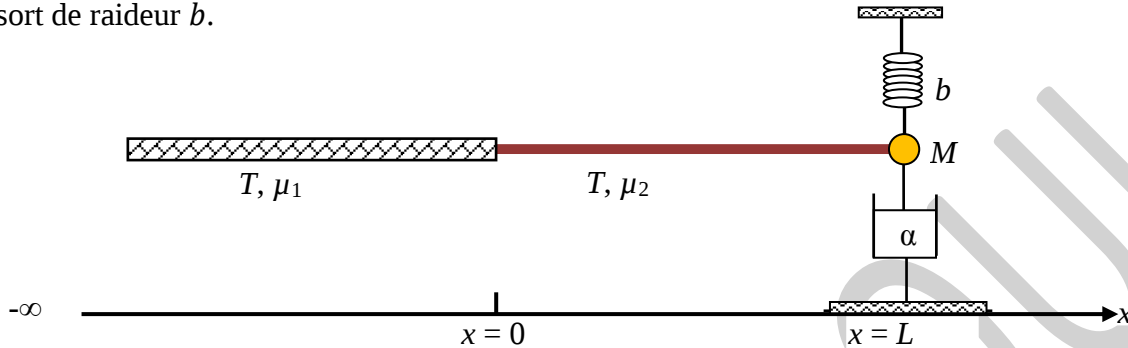


Figure 5

Dans les deux cordes, l'équation de propagation est vérifiée :

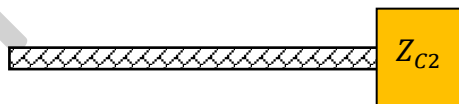
1. Une onde incidente venant de $-\infty$, en un point x de la (corde 1) elle est de la forme :

$$y_i(x, t) = A_1 e^{j(\omega t - k_1 x)}$$

Donner les expressions des ondes résultantes $y_1(x, t)$ (dans la corde 1) et $y_2(x, t)$ (dans la deuxième corde). On prendra A_2, B_2 comme amplitudes des ondes dans la corde 2.

Préciser les vitesses V_1 et V_2 en fonction des caractéristiques des 2 cordes.

2.
 - a. Calculer l'impédance $Z_2(x)$ en tout point x de la corde 2, en fonction des données du problème. Déduire $Z_2(x = L)$ et déterminer son expression en fonction des paramètres du système mécanique (M, b, α et ω).
 - b. Calculer le coefficient de réflexion ρ_L au point $x = L$, en fonction de α, M, b , la pulsation ω et de l'impédance Z_{C2} .
3. A quelles conditions le coefficient ρ_L s'annule-t-il ? Montrer que dans cette condition le système peut se comporter comme :



La corde 1 fermée par Z_{C2}

ou bien deux cordes semi-infinies



4. Calculer le coefficient ρ_0 en $x = 0$, pour quelle valeur de α s'annule-t-il ? Montrer que lorsque $\alpha = 0$, il y a une réflexion totale, montrer que le déplacement résultant dans la corde 1 s'écrit :

$$y_1(x, t) = f(t) \cos(k_1 x)$$

Préciser $f(t)$.

Solution

$$\begin{aligned} 1. \quad y_1(x, t) &= A_1 e^{j(\omega t - k_1 x)} + B_1 e^{j(\omega t + k_1 x)} \quad , \quad B_1 = \rho_0 A_1 \\ y_2(x, t) &= A_2 e^{j(\omega t - k_2 x)} + B_2 e^{j(\omega t + k_2 x)} \quad , \quad A_2 = \tau_0 A_1 \end{aligned}$$

avec

$$V_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}}, V_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}}$$

2. a.

$$Z_2(x) = \frac{-T \frac{\partial y_2}{\partial x}}{\frac{\partial y_2}{\partial t}} = Z_{C2} \frac{A_2 e^{-jk_2 x} - B_2 e^{jk_2 x}}{A_2 e^{-jk_2 x} + B_2 e^{jk_2 x}}$$

$$Z_2(L) = \alpha + j \left(M\omega - \frac{b}{\omega} \right)$$

2. b .

$$\rho_L = \frac{Z_{C2} - \alpha - j(M\omega - \frac{b}{\omega})}{Z_{C2} + \alpha + j(M\omega - \frac{b}{\omega})}$$

$$3. \rho_L = 0 \text{ si } \omega = \sqrt{\frac{b}{M}} \text{ et } Z_{C2} = \alpha$$

Quand il n'y a pas de réflexion la corde peut être considérée soit par une corde de longueur infinie ou une corde finie fermée par son impédance caractéristique.

4.

$$\rho_0 = \frac{Z_{C1} - Z_{C2}}{Z_{C1} + Z_{C2}} = \frac{Z_{C1} - \alpha}{Z_{C1} + \alpha}$$

Pour $\alpha = Z_{C1}$ ρ_0 s'annule

Pour $\alpha = 0$ $\rho_0 = 1$ (réflexion totale)

$$y_1(x, t) = A_1 e^{j(\omega t - k_1 x)} + \rho_0 A_1 e^{j(\omega t + k_1 x)}$$

$$y_1(x, t) = 2A_1 e^{j(\omega t)} \cos(k_1 x)$$

Exercice 8

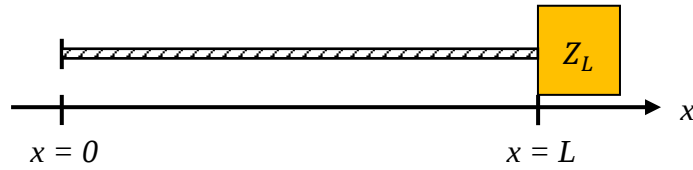


Figure 6

On considère une corde de longueur finie L , de masse linéique μ et tendue à l'équilibre avec une tension T . On place au point $x = 0$ (origine des abscisses x) une source d'onde sinusoïdale $S(t) = S_0 e^{j\omega t}$. La corde est terminée en $x = L$ par une impédance terminale Z_L (Figure 6).

1. Donner l'équation mathématique qui régit la propagation d'une onde transversale le long de cette corde. Quelle est la solution générale de cette équation et donner le sens physique des termes qui la composent ? On appellera A et B les amplitudes et k le module du vecteur d'onde.
2. En utilisant la définition de l'impédance en un point x du milieu de propagation, montrer que :

$$Z(x) = Z_c \frac{1 - \frac{B}{A} e^{2jkx}}{1 + \frac{B}{A} e^{2jkx}}$$

Que représente l'impédance Z_c et donner son expression en fonction des caractéristiques de la corde.

3. Dans le cas où la corde est fixe en son extrémité $x = L$, trouver par le calcul, la condition que doit satisfaire la longueur L de cette corde si on veut que le point d'abscisse $x = 0$ soit considéré comme un nœud de vibration. Comment appelle-t-on ce type d'ondes ?

Solution

1. L'équation régissant la propagation de l'onde sur la corde est l'équation de d'Alembert ou l'équation de propagation.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

La solution générale est la superposition d'ondes progressives et régressives. L'onde régressive a pour origine le phénomène de réflexion, qui est dû à une variation d'impédance.

$$y(x, t) = A e^{j(\omega t - kx)} + B e^{j(\omega t + kx)}$$

2. Impédance en un point quelconque x de la corde.

L'impédance est égale à la cause sur l'effet.

$$F_y(x, t) = -T \frac{\partial y}{\partial x} = jkT (A e^{j(\omega t - kx)} - B e^{j(\omega t + kx)})$$

$$\dot{y}(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = j\omega(A e^{j(\omega t - kx)} + B e^{j(\omega t + kx)})$$

D'où :

$$Z(x) = \frac{-T \frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial t}} = Z_c \frac{A e^{-jkx} - B e^{jkx}}{A e^{-jkx} + B e^{jkx}}$$

$$Z(x) = Z_c \frac{1 - \frac{B}{A} e^{2jkx}}{1 + \frac{B}{A} e^{2jkx}}$$

avec $Z_c = \sqrt{\mu T}$

Z_c est l'impédance caractéristique de la corde.

3. Si l'extrémité en L est fixe, l'impédance en $x = L$ tend vers l'infinie, nous avons alors un nœud de vibration :

$$\frac{B}{A} e^{2jkL} = -1$$

Nous avons aussi une 2ème condition en $x = 0$, $Z(x = 0) \rightarrow \infty$, d'où : $B = -A$.

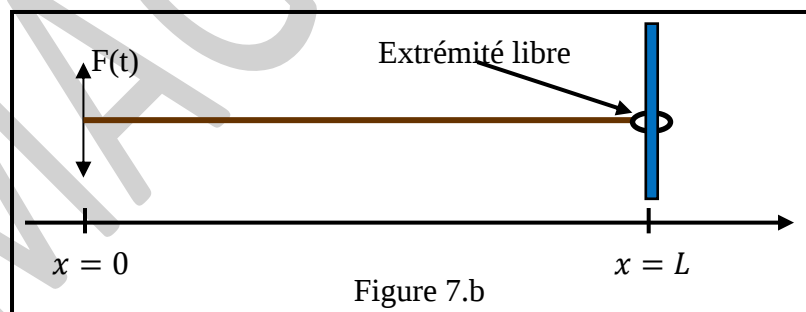
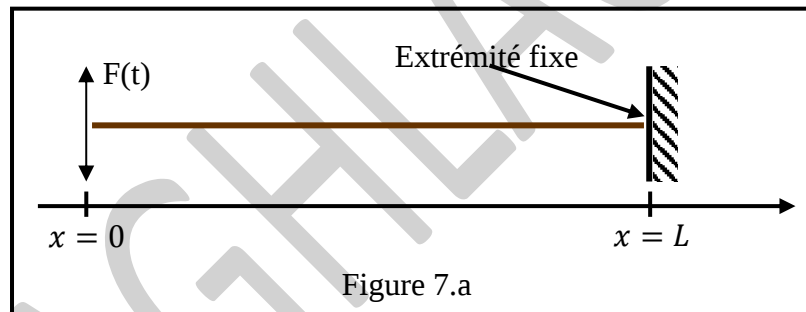
Nous concluons donc que $\cos(2kL) = 1 \Rightarrow L = n\lambda/2$.

Ce type d'ondes est appelé, ondes stationnaires.

Exercice 9

Une corde de longueur L et de masse linéique m est tendue horizontalement avec une tension T . Elle est reliée à son extrémité en $x = L$ à un bâti fixe. L'extrémité située en $x = 0$ est soumise à une force sinusoïdale d'amplitude F_0 et de pulsation ω . On appelle $y(x, t)$ le déplacement d'un point d'abscisse x de la corde à l'instant t . (figure 7.a).

1. a. Donner les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$:
b. Montrer que l'expression de $y(x, t)$ peut se mettre sous la forme : $y(x, t) = \Psi(x)\Phi(t)$. Donner l'expression de $\Psi(x)$ en fonction de F_0 , du nombre d'onde k de L et de T .
2. Déterminer les positions des points d'amplitude maximale (ventres) en fonction de la longueur d'onde λ et de la longueur L de la corde. Quelle est la distance qui sépare deux nœuds successifs.
3. Quelle doit être la pulsation de la force $F(t)$ pour observer le phénomène de résonance.
4. On considère maintenant la corde libre en $x = L$ (Figure 7.b). Répondre aux mêmes questions que précédemment.



Solution

1. En partant de l'expression de l'onde :

$$u(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + Be^{i(\omega t + kx)} \quad (1)$$

A et B sont respectivement les amplitudes des ondes progressives et régressives.

En utilisant les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$ (Figure 7.a) :

$$F(0, t) = F_0 e^{i\omega t} \Rightarrow ikT(A - B) = F_0 \quad (2)$$

et :

$$u(L, t) = 0 \Rightarrow B = -Ae^{-2ikL} \quad (3)$$

A partir des équations (1) et (3), nous obtenons :

$$u(x, t) = Ae^{i\omega t} \left[e^{-ikx} + \frac{B}{A} e^{ikx} \right] = Ae^{i\omega t} [e^{-ikx} - e^{ik(x-2L)}] = Ae^{i(\omega t - kL)} [e^{ik(L-x)} - e^{ik(x-L)}]$$

$$u(x, t) = 2iA \sin[k(L - x)] e^{i(\omega t - kL)} \quad (4)$$

Des conditions aux limites (équations (2) et (3)), nous avons :

$$ikTA \left(1 - \frac{B}{A} \right) = F_0 \Rightarrow ikTA(1 + e^{-2ikL}) = F_0 \Rightarrow 2ikTAe^{-ikL} \cos(kL) = F_0$$

D'où l'expression de A en fonction de F_0 , k et L :

$$A = \frac{F_0}{2ikT \cos(kL)} e^{ikL} \quad (5)$$

En remplaçant l'expression de A dans l'équation d'onde $u(x, t)$ en (4), on trouve :

$$u(x, t) = \frac{F_0}{kT \cos(kL)} \sin[k(L - x)] e^{i\omega t} \quad (6)$$

Par identification :

$$\Psi(x) = \frac{F_0}{kT \cos(kL)} \sin[k(L - x)], \quad \Phi(t) = e^{i\omega t}$$

2. La position des ventres et des nœuds :

Nous avons un maximum (ventre) lorsque :

$$\sin[k(L - x)] = \pm 1 \Rightarrow k(L - x) = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

d'où :

$$x_{max} = L - (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$$

avec $n \in \mathbb{N}$.

Nous avons un minimum (nœud) lorsque :

$$\sin[k(L - x)] = 0 \Rightarrow k(L - x) = n\pi$$

d'où :

$$x_{min} = L - n \frac{\lambda}{2}$$

avec $n \in \mathbb{N}$.

3. Pour avoir résonance il faut que $\cos(kL) = 0$
ce qui donne

$$\omega = (2n + 1) \frac{\pi V}{2L}$$

4. Cas de la figure 7.b

La condition en $x = L$ devient :

$$F(L, t) = 0 \Rightarrow Ae^{-ikL} - Be^{ikL} = 0 \Rightarrow B = Ae^{-2ikL} \quad (7)$$

A partir des équations (1) et (7), nous obtenons :

$$u(x, t) = Ae^{i\omega t} \left[e^{-ikx} + \frac{B}{A} e^{ikx} \right] = Ae^{i\omega t} [e^{-ikx} + e^{ik(x-2L)}] = Ae^{i(\omega t - kL)} [e^{ik(L-x)} + e^{ik(x-L)}]$$

$$u(x, t) = 2A \cos[k(L - x)] e^{i(\omega t - kL)} \quad (8)$$

Des conditions aux limites (équations (2) et (7)), nous avons :

$$ikTA \left(1 - \frac{B}{A} \right) = F_0 \Rightarrow ikTA(1 - e^{-2ikL}) = F_0 \Rightarrow -2kTAe^{-ikL} \sin(kL) = F_0$$

D'où l'expression de A en fonction de F_0 , k et L :

$$A = -\frac{F_0}{2kT \sin(kL)} e^{ikL}$$

En remplaçant l'expression de A dans l'équation d'onde $u(x, t)$ en (8), on trouve :

$$u(x, t) = \frac{F_0}{kT \sin(kL)} \cos[k(L - x)] e^{i(\omega t + \pi)} \quad (9)$$

Par identification :

$$\Psi(x) = \frac{F_0}{kT \sin(kL)} \cos[k(L - x)], \quad \Phi(t) = e^{i(\omega t + \pi)}$$

Les positions des ventres et des nœuds sont respectivement :

$$x_{max} = L - n \frac{\lambda}{2}$$

et

$$x_{min} = L - (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$$

Nous avons résonance lorsque $\sin(kL) = 0$.

ce qui donne

$$\omega = n \frac{\pi V}{L}$$

Exercice 10

On considère une corde de longueur $L = 63 \text{ cm}$ et de masse linéique $\mu = 2 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^{-1}$. La corde est fixée en ses extrémités (les points $x = 0$ et $x = L$ de l'axe Ox) et tendue avec la tension T_0 . La vitesse des ondes transverses de la corde est $V = 50 \text{ m s}^{-1}$.

1. a. Déterminer la tension T_0 en fonction de μ et V . Donner les dimensions de T_0 , μ et V et vérifier l'homogénéité de la formule obtenue.
 b. Calculer la valeur numérique de la tension T_0 .
 c. Ecrire l'équation d'onde de d'Alembert vérifiée par le déplacement $u(x, t)$.
2. On considère l'onde stationnaire

$$u_1(x, t) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos(\omega_1 t)$$

- a. Montrer que $u_1(x, t)$ est solution de l'équation d'ondes de d'Alembert (question 1.c.), pour une valeur de ω_1 que l'on déterminera littéralement en fonction de L et c puis numériquement. Déterminer littéralement et numériquement la fréquence f_1 et la période T_1 de cette onde.
- b. Dessiner l'aspect de la corde vibrante.
- c. Expliquer le qualificatif **stationnaire** donné à cette onde.

3. On considère l'onde stationnaire

$$u_2(x, t) = A \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin(\omega_2 t)$$

Montrer que l'équation précédente ($u_2(x, t)$) est également solution de l'équation d'onde de la question 1.c. pour une valeur de ω_2 que l'on déterminera littéralement et numériquement. Déterminer littéralement et numériquement la fréquence f_2 et la période T_2 de cette onde

4. On considère l'onde

$$u(x, t) = A \left[\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos(\omega_1 t) + \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin(\omega_2 t) \right]$$

où ω_1 et ω_2 ont les valeurs déterminées dans les questions 2.a. et 3.

- a. Montrer que l'expression précédente est solution de l'équation de d'Alembert de la question 1.c.
- b. Cette onde est-elle stationnaire? Cette onde est-elle périodique?
- c. On pose

$$f(x) = u(x, t = 0) \text{ et } g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0)$$

Représenter graphiquement $f(x)$ et $g(x)$ en fonction de x ($0 \leq x \leq L$).

- d. Expliquer comment un expérimentateur peut créer l'onde $u(x, t)$ en préparant la corde à l'instant $t = 0$.
5. On désire augmenter de 5 % la fréquence du mode de vibration de la corde considéré dans la question 2.

- a. Montrer que c'est possible en modifiant la longueur de la corde, sans modifier la tension. Calculer la nouvelle longueur de la corde.
- b. Donner une autre façon d'obtenir la même modification de la fréquence sans modifier ni la longueur de la corde, ni sa masse linéique. Calculer la nouvelle valeur de la grandeur modifiée.

Solution

1. a. La formule de la corde vibrante donne $T_0 = \mu V^2$. Les dimensions sont $[T_0] = MLT^{-2}$, $[\mu] = ML^{-1}$ et $[V] = LT^{-1}$, $T_0 = \mu V^2$ est bien homogène.
1. b. $T_0 = 5000 \text{ N}$.
1. c. L'équation d'onde est

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0$$

2. a. On calcule $\partial^2 u_1 / \partial t^2 = -\omega_1^2 u_1$ et $\partial^2 u_1 / \partial x^2 = -(\pi^2 / L^2) u_1$

En remplaçant dans l'équation d'onde

$$\left[\frac{\omega_1^2}{V^2} - \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \right] u_1 = 0$$

d'où on tire $\omega_1 = \pi V / L = 2493 \text{ rad s}^{-1}$.

La fréquence est $f_1 = \omega_1 / 2\pi = V / 2L = 397 \text{ Hz}$ et la période $T_1 = 1 / f_1 = 2L / V = 2.52 \text{ ms}$

2. b. La figure de gauche représente la forme de la corde aux instants $t_n = nT_1 / 16$ pour n entier. La période $T_1 = 2.52 \text{ ms}$ est très petite devant le temps de persistance des images rétinienne, la corde apparaît comme sur la figure de droite (Figure 8).

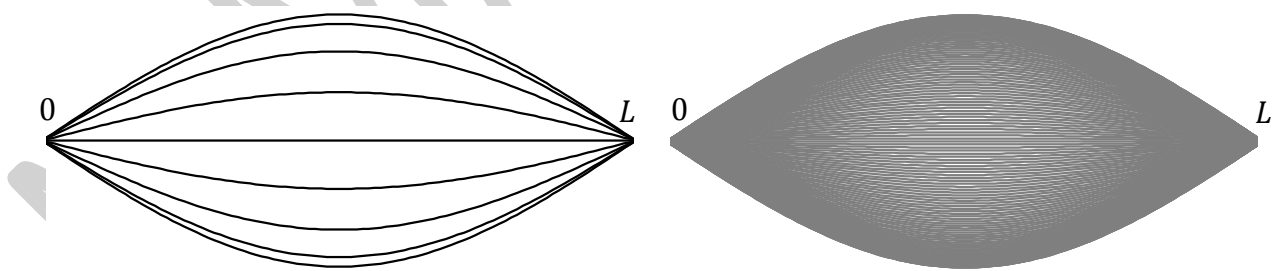


Figure 8

2. c. **Stationnaire** : tous les points de la corde vibrent en phase ou en opposition de phase (comparer à onde progressive). Mathématiquement, $u_1(x, t)$ est factorisé en un produit d'une fonction de t et d'une fonction de x .
3. La résolution est similaire à la question 2. On obtient $\omega_2 = 2\omega_1 = 2\pi V / L = 4886 \text{ rad s}^{-1}$, $f_2 = 2f_1 = V / L = 794 \text{ Hz}$ et $T_2 = T_1 / 2 = L / V = 126 \text{ ms}$.

4. a. $u = u_1 + u_2$ est la somme (superposition) de deux solutions de l'équation d'onde. L'équation d'onde étant linéaire, c'est aussi une solution.
4. b. L'onde u n'est pas stationnaire. L'onde u est périodique de période temporelle T_1 :

$$u(x, t + T_1) = u(x, t).$$

4. c. $f(x)$ représente la forme de la corde à l'instant $t = 0$ (Figure 9.a).

$$f(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$g(x)$ représente la vitesse d'un point d'abscisse x à l'instant $t = 0$ (Figure 9. b).

$$g(x) = A\omega_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

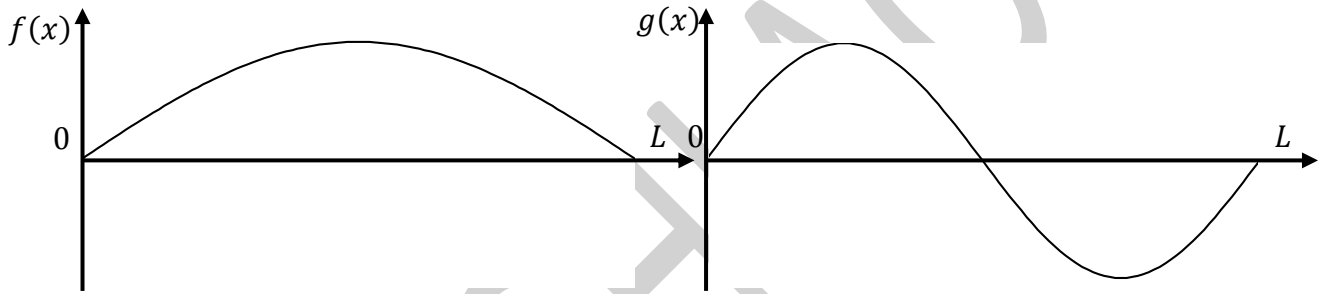


Figure 9. a

Figure 9. b

4. d. L'expérimentateur peut mettre la corde en mouvement en déplaçant transversalement chaque point d'abscisse $x \in [0, L]$ de la corde de $f(x)$ et en lui communiquant la vitesse transverse $g(x)$ à l'instant $t = 0$. Ces conditions initiales déterminent complètement le mouvement de la corde, et, comme $u(x, t)$ y satisfait, l'expérimentateur a ainsi créé l'onde $u(x, t)$.
5. a. La fréquence est

$$f_1 = \frac{V}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

On peut l'augmenter de 5 % en diminuant la longueur L de 5% à tension constante. La nouvelle longueur est $L' = 60 \text{ cm}$.

5. b. On peut augmenter la fréquence de 5% sans modifier la longueur de la corde en augmentant la tension de 10 %. La nouvelle tension est $T'_0 = 5500 \text{ N}$.

Exercice 11

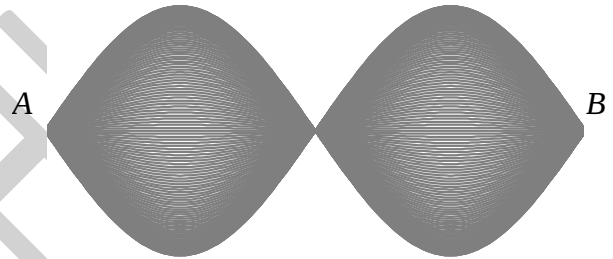
Partie A

Une corde infinie de masse linéique μ est soumise à une tension T_0 , supposée constante et très grande devant son poids. Une onde de pulsation ω arrive de $-\infty$ et progresse dans la direction des x positifs. On étudie les petits déplacements $y(x, t)$ de la corde.

1. Donner l'équation régissant l'évolution du déplacement des particules $y(x, t)$. Comment appelle-t-on cette équation ?
2. Donner l'expression de $y(x, t)$ et déterminer l'impédance de la corde $Z(x)$. Calculer sa valeur numérique, sachant que la corde est en cuivre, de diamètre $d = 0.4 \text{ mm}$ et de masse volumique $\rho = 8900 \text{ kg m}^{-3}$. On donne aussi : $T_0 = 10 \text{ N}$.
3. Calculer numériquement la vitesse de propagation de l'onde.

Partie B

Une corde de longueur $L = 50 \text{ cm}$ est tendue entre deux points fixes, A (d'abscisse $x_A = 0$) et B (d'abscisse $x_B = L$). Sa masse linéique est $\mu = 10 \text{ gm}^{-1}$ et sa tension est T_0 . On observe dans la corde une onde transversale, harmonique, stationnaire de fréquence $f = 500 \text{ Hz}$. La corde prend l'aspect de la figure ci-contre.

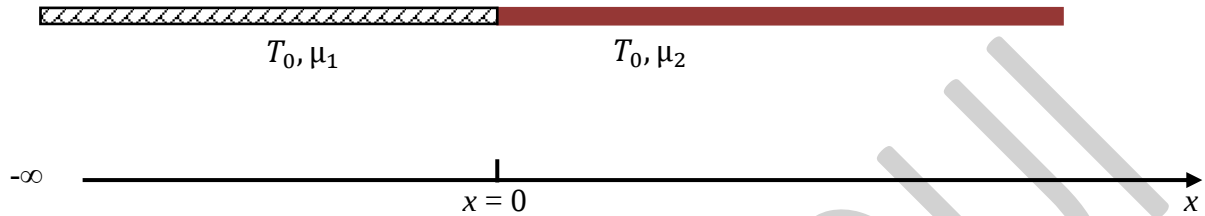


5. Ecrire l'expression de l'onde $y(x, t)$ sous la forme d'une superposition de deux termes. Donner le sens physique de chaque terme.
6. En utilisant la condition, en $x = 0$, montrer que l'onde s'écrit sous la forme du produit de deux fonctions que l'on explicitera.
7. A partir de la forme de la corde, donner la relation entre k et L . On écrira $y(x, t)$ en fonction de x , t , ω , L et son amplitude A .
8. Expliquer le sens des mots *transversale*, *harmonique* et *stationnaire*.
9. Représenter la forme de la corde à divers instants. Expliquer pourquoi la corde prend l'aspect de la figure précédente (figure ci-dessus).
10. Déterminer numériquement la longueur d'onde λ , la vitesse V des ondes de la corde et la tension de la corde T_0 .

Partie C

On se propose maintenant d'étudier la réflexion et transmission entre deux cordes homogènes, semi infinies, en jonction en $x = 0$. Les deux cordes sont maintenues horizontalement par une tension $T_0 =$

10 N. La première corde est en cuivre, sa masse volumique est $\rho_1 = 8900 \text{ kg m}^{-3}$ et son diamètre $d = 0.4 \text{ mm}$, la seconde est en Aluminium, sa masse volumique est $\rho_2 = 2700 \text{ kg m}^{-3}$ et son diamètre $d = 0.4 \text{ mm}$ (Figure ci-dessous). Une onde sinusoïdale, que l'on notera $y_a(x, t)$, d'amplitude A et de pulsation ω se propage dans le sens des x croissants le long de la première corde ($x \leq 0$). Au niveau de la jonction, une onde régressive dans la corde (1) est créée, dont l'amplitude est B , elle sera notée $y_b(x, t)$ ($x \leq 0$). Une 2^{ème} onde, notée $y_c(x, t)$, progressive dans la corde (2) est engendrée ($x \geq 0$). Son amplitude est C .



1. Donner les expressions des différentes contributions, que l'on notera $y_a(x, t)$, $y_b(x, t)$ et $y_c(x, t)$. Que représente chaque terme ?
2. Donner les expressions des ondes résultantes $y_1(x, t)$ (dans la corde 1) et $y_2(x, t)$ (dans la deuxième corde).
3. En utilisant les conditions en $x = 0$, déterminer en fonction des impédances caractéristiques Z_1 et Z_2 , les expressions des coefficients de réflexion R et de transmission T en amplitudes. Calculer numériquement ces coefficients.
4. On définit les densités linéiques des énergies cinétique et potentielle de l'onde comme suit :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \mu \left[\frac{\partial y}{\partial t} \right]^2$$

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} T_0 \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]^2$$

La densité d'énergie totale est : $\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$.

- a. Déterminer les expressions des densités d'énergies cinétiques et potentielles des ondes $y_a(x, t)$, $y_b(x, t)$ et $y_c(x, t)$. On les notera $\mathcal{E}_{ca}$ et $\mathcal{E}_{pa}$ pour l'onde y_a , $\mathcal{E}_{cb}$ et $\mathcal{E}_{pb}$ pour l'onde y_b et enfin $\mathcal{E}_{cc}$ et $\mathcal{E}_{pc}$ pour l'onde y_c .
- b. Calculer les densités d'énergies totales $\mathcal{E}_{ta}$, $\mathcal{E}_{tb}$ et $\mathcal{E}_{tc}$ associées respectivement aux ondes $y_a(x, t)$, $y_b(x, t)$ et $y_c(x, t)$.
- c. On définit en $x = 0$ les coefficients de réflexion α_R et de transmission α_T en énergie par :

$$\alpha_R = \frac{\mathcal{E}_{tb}}{\mathcal{E}_{ta}} \quad \text{et} \quad \alpha_T = \frac{v_2 \mathcal{E}_{tc}}{v_1 \mathcal{E}_{ta}}$$

Calculer en fonction de Z_1 et Z_2 les expressions de α_R et α_T .

- d. Calculer numériquement α_R et α_T . Que peut-on dire à partir de ces rapports ?

Solution

Partie A

1. L'équation est dans le cas des faibles amplitudes :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

v représente la vitesse de propagation de l'onde.

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

L'équation donnant l'évolution de $y(x, t)$ est l'équation d'onde de d'Alembert.

2. Le déplacement est :

$$y(x, t) = Ae^{j(\omega t - kx)}$$

$$Z(x) = \frac{F(x, t)}{\dot{y}(x, t)} = \frac{-T_0 \frac{\partial y}{\partial x}}{\dot{y}(x, t)} = \frac{kT_0}{\omega} = \frac{T_0}{v} = \sqrt{\mu T_0}$$

$$Z(x) = Z_c = \sqrt{\mu T_0} = \sqrt{\rho S T_0} = \sqrt{\rho \pi \frac{d^2}{4} T_0}$$

$$Z_c = 0.11 \text{ kg s}^{-1}$$

3. La vitesse de propagation est :

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = 94.55 \text{ m s}^{-1}$$

Partie B

5. L'expression est :

$$y(x, t) = Ae^{j(\omega t - kx)} + Be^{j(\omega t + kx)}$$

Le premier terme représente une onde progressive, le second une onde régressive. Les deux termes représentent des ondes plane sinusoïdales.

6. La condition en $x = 0$

$$y(0, t) = 0 \Rightarrow A + B = 0$$

En reportant dans l'expression de $y(x, t)$:

$$y(x, t) = Ae^{j\omega t} [e^{-jkx} - e^{jkx}] = -2jA \sin(kx) e^{j\omega t}$$

7. L'onde présente deux fuseaux, nous avons donc :

$$L = \lambda \Rightarrow L = \frac{2\pi}{k}$$

D'où :

$$k = \frac{2\pi}{L}$$

Le déplacement des particules devient :

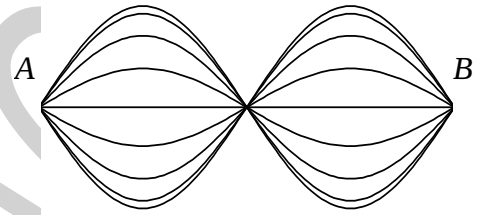
$$y(x, t) = -2jA \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) e^{j\omega t}$$

8. *Transversale* : La direction de vibration des particules est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde (comparer à onde longitudinale).

Harmonique : l'onde est sinusoïdale.

Stationnaire : tous les points de la corde vibrent en phase ou en opposition de phase (comparer à onde progressive). La fonction d'onde est le produit de deux fonctions à variables indépendantes, L'amplitude n'est plus une constante, elle dépend de la position de x . De plus l'onde stationnaire ne propage plus l'énergie.

9. La figure ci-contre représente la forme de la corde aux instants $t_n = nT/16$ pour $n = 0, 1, \dots, 15$. La période $T = 1/f = 0.002 \text{ ms}$ est très petite devant le temps de persistance des images rétinienne. La corde apparaît comme la superposition de toutes les positions de la corde



10. $\lambda = L = 50 \text{ cm}$, $V = \lambda/T = 250 \text{ ms}^{-1}$, $V = \sqrt{T_0/\mu}$
donne $T_0 = \mu V^2 = 625 \text{ N}$.

Partie C

1. Les expressions de chaque contribution :

L'onde incidente en $x = 0$ est $y_a(x, t) = A e^{j(\omega t - k_1 x)}$.

L'onde réfléchiée en $x = 0$ est $y_b(x, t) = B e^{j(\omega t + k_1 x)}$.

L'onde transmise en $x = 0$ est $y_c(x, t) = C e^{j(\omega t - k_2 x)}$.

2. L'onde résultante dans la corde (1) est la superposition de l'onde incidente et réfléchiée :

$$y_1(x, t) = y_a(x, t) + y_b(x, t) = A e^{j(\omega t - k_1 x)} + B e^{j(\omega t + k_1 x)}$$

Dans la corde (2) nous avons une onde transmise :

$$y_2(x, t) = y_c(x, t) = C e^{j(\omega t - k_2 x)}$$

3. La continuité du déplacement donne :

$$y_1(0, t) = y_2(0, t) \Rightarrow A + B = C$$

ou bien

$$1 + R = T \quad (1)$$

Le principe fondamental de la dynamique en $x = 0$, donne :

$$-T_0 \frac{\partial y_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = -T_0 \frac{\partial y_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \Rightarrow j\omega Z_1(A - B) = j\omega Z_2 C$$

Qui s'écrit sous la forme :

$$Z_1(1 - R) = Z_2 T \quad (2)$$

A partir des relations (1) et (2), nous avons :

$$R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{et} \quad T = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Nous avons $Z_1 = \sqrt{\mu_1 T_0} = 0.11 \text{ kg s}^{-1}$, $Z_2 = \sqrt{\mu_2 T_0} = 0.06 \text{ kg s}^{-1}$.

$$R = 0.29, T = 1.29$$

4. En partant des définitions

a. La densité d'énergie cinétique est

$$\mathcal{E}_{ca} = \frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 A^2 [\cos(\omega t - k_1 x)]^2$$

$$\mathcal{E}_{pa} = \frac{1}{2} T_0 k_1^2 [\cos(\omega t - k_1 x)]^2 = \frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 A^2 [\cos(\omega t - k_1 x)]^2 = \mathcal{E}_{ca}$$

De la même manière, nous trouvons :

$$\mathcal{E}_{cb} = \frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 B^2 [\cos(\omega t + k_1 x)]^2$$

$$\mathcal{E}_{pb} = \frac{1}{2} T_0 k_1^2 B^2 [\cos(\omega t + k_1 x)]^2 = \frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 B^2 [\cos(\omega t + k_1 x)]^2 = \mathcal{E}_{cb}$$

Pour l'onde réfléchie.

$$\mathcal{E}_{cc} = \frac{1}{2} \mu_2 \omega^2 C^2 [\cos(\omega t - k_2 x)]^2$$

$$\mathcal{E}_{pc} = \frac{1}{2} T_0 k_2^2 C^2 [\cos(\omega t - k_2 x)]^2 = \frac{1}{2} \mu_2 \omega^2 C^2 [\cos(\omega t - k_2 x)]^2 = \mathcal{E}_{cc}$$

b. Les densités d'énergies totales sont :

$$\mathcal{E}_{ta} = \mathcal{E}_{ca} + \mathcal{E}_{pa} = 2\mathcal{E}_{ca} = \mu_1 \omega^2 A^2 [\cos(\omega t - k_1 x)]^2$$

Pour l'onde (a).

$$\mathcal{E}_{tb} = \mathcal{E}_{cb} + \mathcal{E}_{pb} = 2\mathcal{E}_{cb} = \mu_1 \omega^2 B^2 [\cos(\omega t + k_1 x)]^2$$

Pour l'onde (b).

$$\mathcal{E}_{tc} = \mathcal{E}_{cc} + \mathcal{E}_{pc} = 2\mathcal{E}_{cc} = \mu_2 \omega^2 C^2 [\cos(\omega t - k_2 x)]^2$$

Pour l'onde (c).

c. Le calcul donne :

$$\alpha_R = \frac{\mathcal{E}_{tb}}{\mathcal{E}_{ta}} = \frac{B^2}{A^2} = R^2$$

$$\alpha_T = \frac{v_2}{v_1} \frac{\mathcal{E}_{tc}}{\mathcal{E}_{ta}} = \frac{v_2}{v_1} \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{C^2}{A^2} = \frac{Z_2}{Z_1} T^2$$

d. Nous obtenons :

$$\alpha_R = 0.08 \text{ et } \alpha_T = 0.92$$

La somme $\alpha_R + \alpha_T = 1$, cela traduit la conservation d'énergie.

N. MAGHLAOUI

Ondes acoustiques dans les fluides

Résumé de cours

1. Equation d'onde

Les ondes acoustiques sont des vibrations mécaniques qui se transmettent de proche en proche. Dans le cas d'un fluide parfait, qui se caractérise par l'absence de viscosité, l'onde acoustique est longitudinale. Considérons une onde acoustique de faible amplitude se propageant dans la direction x .

Lors de sa propagation, l'onde acoustique s'accompagne d'une variation infinitésimale de la pression $p(x, t)$ et de la masse volumique $\rho(x, t)$.

Afin d'établir l'équation d'onde, nous nous basons sur trois équations :

- **La relation fondamentale de la dynamique** appliquée à une petite tranche de fluide (les forces agissant sur cette tranche résultant de la surpression p liée au passage de l'onde).

$$\rho_0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

ρ_0 : représente la masse volumique à l'équilibre.

$\dot{u}$: la vitesse de vibration des particules.

- **L'équation de continuité** (conservation de la matière)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = 0$$

- **L'équation d'état** qui spécifie la nature des échanges thermiques ayant lieu dans le fluide. Nous considérons que l'évolution de chaque tranche de fluide se fait à entropie constante. En effet, la transmission d'une surpression est un phénomène propagatif (rapide) tandis que les échanges thermiques sont des processus diffusifs (lents)

$$p = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial u}{\partial x}$$

u représente le déplacement des particules, χ le coefficient de compressibilité adiabatique du fluide.

De plus, nous faisons **l'approximation acoustique** qui considère que la surpression p , la vitesse des particules $\dot{u}$ ainsi que leurs dérivées sont de faibles quantités et Les variations de la masse volumique ρ sont petites.

Dans ces conditions nous obtenons l'équation d'onde suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

où f peut être la pression p , la masse volumique ρ , la vitesse des particules $\dot{u}$ ou le déplacement des particules u .

V représente la vitesse de propagation de l'onde, à ne pas confondre avec la vitesse des particules.

$$V = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}}$$

Dans le cas des fluides parfaits :

$$V = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$$

γ est le rapport des chaleurs massiques C_p/C_v , R est la constante molaire des gaz parfaits, T_0 la température du gaz au repos et M la masse molaire

La solution de l'équation d'onde pour p , u et ρ s'écrit :

$$\begin{aligned} p(x, t) &= F\left(t - \frac{x}{v}\right) + G\left(t + \frac{x}{v}\right) \\ \dot{u}(x, t) &= \frac{1}{\rho_0 V} \left[F\left(t - \frac{x}{v}\right) - G\left(t + \frac{x}{v}\right) \right] \\ \rho(x, t) &= \frac{1}{V^2} \left[F\left(t - \frac{x}{v}\right) + G\left(t + \frac{x}{v}\right) \right] \end{aligned}$$

2. Impédance acoustique

La solution en onde plane progressive et sinusoïdale s'écrit :

$$p(x, t) = p_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

où $k = \omega/V$ représente le module du vecteur d'onde.

Connaissant la loi de comportement du milieu, la vitesse de particules est :

$$\dot{u}(x, t) = \frac{1}{\rho V} p_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

Dans le cas d'une propagation en champ libre, l'impédance est définie comme :

$$Z(x) = \frac{p(x, t)}{\dot{u}(x, t)}$$

Nous trouvons $Z(x) = \rho_0 V$, qui représente l'impédance caractéristique lors d'une propagation en champ libre.

Dans le cas d'une propagation dans un tuyau de section S , l'impédance est définie comme :

$$Z(x) = \frac{p(x, t)}{S \dot{u}(x, t)}$$

Nous trouvons $Z(x) = \rho_0 V/S$, qui représente l'impédance caractéristique lors d'une propagation dans un tuyau de section S .

3. Réflexion-transmission

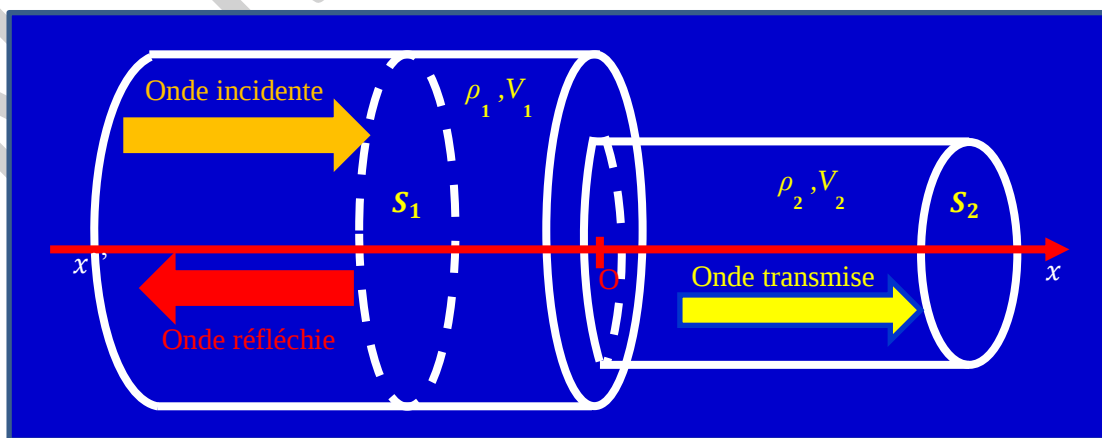


Figure 1

Lors du passage d'un tuyau dans un autre (Figure 1), les conditions aux limites sont : la continuité des surpressions et celle des débits volumiques.

On en déduit les coefficients de réflexion et de transmission en pression sont:

$$R_p = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$T_p = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Les coefficients de réflexion et de transmission en déplacement sont:

$$R_u = R_{\dot{u}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$T_u = T_{\dot{u}} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

avec :

$$Z_1 = \frac{\rho_1 V_1}{S_1}, Z_2 = \frac{\rho_2 V_2}{S_2}$$

Les puissances incidentes, réfléchies et transmises sont respectivement :

$$P_i = S_1 p_i \dot{u}_i$$

$$P_r = -S_1 p_r \dot{u}_r$$

$$P_t = S_2 p_t \dot{u}_t$$

Les intensités associées à ces puissances :

$$I_i = \frac{P_i}{S_1} = p_i \dot{u}_i$$

$$I_r = \frac{P_r}{S_1} = -p_r \dot{u}_r$$

$$I_t = \frac{P_t}{S_2} = p_t \dot{u}_t$$

En on déduit les coefficients de réflexion et de transmission en intensité :

$$R_I = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$$

$$T_I = \frac{I_t}{I_i} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

4. Effet Doppler

L'effet Doppler est un phénomène ondulatoire découvert par le physicien Autrichien Christian Doppler en 1842. Ce phénomène se manifeste lorsque la source S et/ou le récepteur R sont en mouvement. La source émet une onde de fréquence f_s et se déplace à une vitesse v_s , le récepteur se déplace à une vitesse v_R .

La fréquence reçue par le récepteur est alors :

$$f_R = f_s \frac{1 - \frac{v_R}{v} \cos(\varphi)}{1 - \frac{v_s}{v} \cos(\theta)}$$

θ représente l'angle que fait la vitesse de la source $\vec{v}_S$ avec le vecteur unitaire $\vec{u}$, φ représente l'angle que fait le vecteur unitaire $\vec{u}$ avec la vitesse du récepteur $\vec{v}_R$.

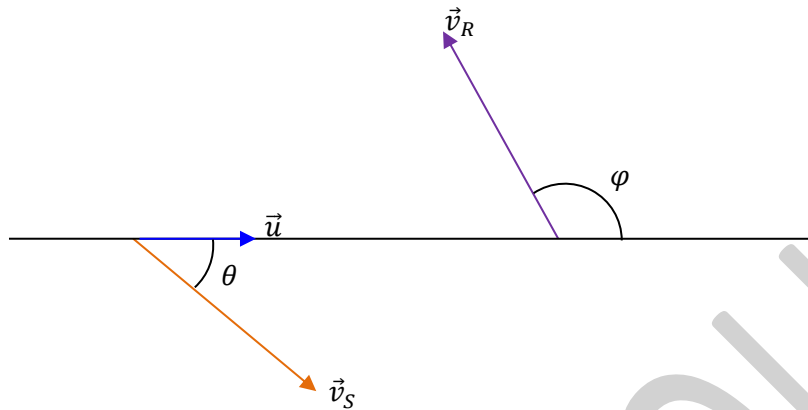


Figure 2

Applications de l'effet Doppler

- Le décalage vers le rouge de la lumière provenant des galaxies lointaines est un effet Doppler (ondes lumineuses) lié à l'expansion de l'univers.
- Dans une lampe spectrale les molécules ont des vitesses différentes par suite de l'agitation thermique. Même si toutes les molécules émettent de la lumière à la même fréquence, l'effet Doppler produit un étalement spectral : on observe un élargissement des raies.
- L'effet Doppler est utilisé pour mesurer la vitesse des hématies dans les vaisseaux sanguins (ondes ultrasonores).
- L'effet Doppler est utilisé pour mesurer la vitesse des automobiles par la police (ondes radar ou lasers infra-rouge).

Exercices et problèmes corrigés

Exercice 1

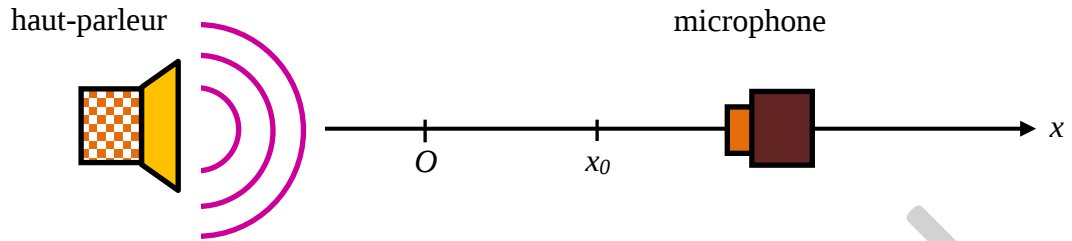


Figure 1 : Mesure de l'onde acoustique dans l'air

1. Un haut-parleur alimenté par une tension sinusoïdale de fréquence $f = (1000 \pm 10) \text{ Hz}$ crée dans l'air une onde plane progressive le long de l'axe Ox (Figure 1). La surpression au point x et à l'instant t est de la forme

$$p(x, t) = p_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}$$

Expliquer le sens de l'expression onde plane progressive.

2. Un microphone placé au point x sur l'axe génère une tension $E(t) = E_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}$ proportionnelle à la surpression p au point x . Un dispositif mesure le déphasage φ . Des mesures pour diverses positions du microphone montrent que le déphasage φ dépend de x suivant la loi

$$\varphi = ax + b \text{ où } a = (18.4 \pm 0.2) \text{ rad m}^{-1}$$

En déduire la valeur numérique de la vitesse du son $V \pm \Delta V$.

Solution

1. Onde plane : la surpression $p(x, y, z, t) = p(x, t)$ est la même sur chaque plan $x = \text{Cte}$ (la surpression ne dépend ni de y ni de z). Ces plans $x = \text{Cte}$ sont les surfaces d'onde (plans équiphases).
Onde progressive : l'onde se propage à vitesse constante sans atténuation ni déformation le long de l'axe Ox dans le sens de x croissant. En effet, la surpression est de la forme $p(x, t) = F(t - x/V)$ avec $F(u) = p_0 \sin(\omega u + \varphi_0)$ et $V = \omega/k$.

2. Le déphasage dépend de x par $\varphi = kx - \varphi_0 = (2\pi f/V)x - \varphi_0$. On a donc mesuré $a = \frac{2\pi f}{V}$. La valeur de b , qui n'est pas utilisée dans la suite, est $b = -\varphi_0$. D'où

$$V = \frac{2\pi f}{a} = 341.5 \text{ ms}^{-1}$$

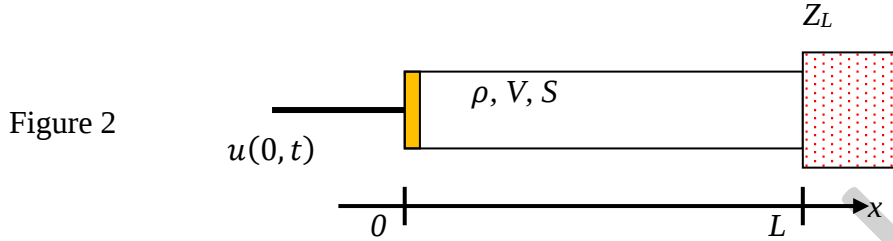
L'incertitude relative sur c est :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta a}{a} = 0.02$$

D'où $\Delta V = 7.1 \text{ ms}^{-1}$. En conclusion la vitesse du son mesurée est : $V = (341.5 \pm 7.1) \text{ ms}^{-1}$.

Exercice 2

Un tuyau cylindrique de section S constante est rempli d'un gaz de masse volumique ρ , où les ondes acoustiques peuvent se propager à la vitesse v . A l'une des extrémités du tuyau en $x = 0$, on place un piston plan qui est animé, suivant l'axe Ox d'un mouvement sinusoïdal d'amplitude U_0 et de pulsation ω . A la position $x = L$, le tuyau est terminé par une impédance acoustique Z_L , voir figure 2.



1. En un point x , le déplacement des particules $u(x,t)$ est donné par :

$$u(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + Be^{i(\omega t + kx)}$$

En tenant compte des conditions aux frontières, calculer A et B en fonction de Z_L , Z_c , k , L et U_0 .

Dans le cas particulier où le tuyau est fermé par une paroi rigide en $x = L$:

2. Montrer que le déplacement peut se mettre sous la forme: $u(x,t) = U(x)e^{i\omega t}$, où $U(x)$ est réel.

Donner l'expression de l'amplitude $U(x)$.

3. En déduire les positions et les valeurs des maxima et des minima de l'amplitude $U(x)$ en valeur absolue.

Solution

1. Conditions aux frontières

$$u(0,t) = U_0 e^{i\omega t} \Rightarrow A + B = U_0$$

$$R = \frac{Be^{ikL}}{Ae^{-ikL}} = \frac{Z_c - Z_L}{Z_L + Z_c}$$

De ces 2 équations nous obtenons :

$$A = \frac{(Z_L + Z_c) U_0 e^{ikL}}{2Z_c \cos(kL) + 2i Z_L \sin(kL)}$$

$$B = \frac{(Z_c - Z_L) U_0 e^{-ikL}}{2Z_c \cos(kL) + 2i Z_L \sin(kL)}$$

2. Les condition aux frontières deviennent :

$$u(0,t) = U_0 e^{i\omega t} \Rightarrow A + B = U_0$$

$$u(L,t) = 0 \Rightarrow Ae^{-ikL} + Be^{ikL} = 0$$

A partir de ces deux relations nous obtenons :

$$u(x,t) = \frac{U_0}{\sin(kL)} \sin[k(L-x)] e^{i\omega t}$$

D'où :

$$U(x) = \frac{U_0}{\sin(kL)} \sin[k(L - x)]$$

3. Positions des ventres :

$$x_n = L - (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$$

Positions des nœuds :

$$x_n = L - n \frac{\lambda}{2}$$

Les amplitudes des ventres :

$$|U(x)|_{\max} = \frac{U_0}{|\sin(kL)|}$$

Les amplitudes des nœuds :

$$|U(x)|_{\max} = 0$$

Problème 1

On considère un tuyau cylindrique de section S contenant un fluide de coefficient de compressibilité adiabatique χ et de masse volumique ρ_0 à l'équilibre.

Partie A

Le tuyau de longueur supposée infinie est parcouru par une onde dont le déplacement de vibration acoustique est :

$$u_p(x, t) = u_{0p} e^{i(\omega t - kx)}$$

1. Donner les expressions de la vitesse acoustique $\dot{u}_p(x, t)$ et de la pression $p_p(x, t)$.
2. Déterminer l'expression de l'intensité acoustique de cette onde et en déduire la valeur numérique de l'amplitude maximale u_{0p} du déplacement des particules sachant que :

$$I_{0p} = 10^{-3} \text{ W m}^{-2} ; V = 340 \text{ m s}^{-1}, f = 1 \text{ kHz}, \rho_0 = 1.21 \text{ kg m}^{-3}.$$

Partie B

Le tuyau a maintenant une longueur finie L et est parcouru par deux ondes acoustiques sinusoïdales de pulsation ω se propageant en sens inverse l'une de l'autre :

$$u_p(x, t) = u_{0p} e^{i(\omega t - kx)} \quad \text{et} \quad u_r(x, t) = u_{0r} e^{i(\omega t + kx)}$$

où u_{0p} et u_{0r} sont des constantes complexes

1. Donner les expressions des pression et vitesse acoustiques en tout point x du tuyau .
2. Le tuyau est ouvert à ses deux extrémités $x = 0$ et $x = L$.
 - a. Quelle est la valeur de la surpression $p(x, t)$ en chacune de ces extrémités.
 - b. En déduire alors que seules certaines fréquences f_n , n entier , peuvent se propager dans le tuyau .

Application numérique :

Calculer la longueur L du tuyau pour que le son fondamental de fréquence $f_1 = 440 \text{ Hz}$ puisse exister.

Solution

Partie A

1. la vitesse des particules est :

$$\dot{u}_p(x, t) = \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} = i\omega u_{0p} e^{i(\omega t - kx)}$$

En utilisant l'équation d'Euler dans le cas unidimensionnel nous avons

$$\frac{\partial p_p(x, t)}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial \dot{u}_p(x, t)}{\partial t} = 0$$

Nous obtenons : $p_p(x, t) = i\omega \rho_0 V u_{0p} e^{i(\omega t - kx)}$.

2. L'intensité est la puissance par unité de surface :

$$I = \frac{\mathbb{P}}{S}$$

avec : $\mathbb{P} = S p_p \dot{u}_p = S \omega^2 \rho_0 V u_{0p}^2 [\sin(\omega t - kx)]^2$

L'intensité instantanée est donc :

$$I = \omega^2 \rho_0 V u_{0p}^2 [\sin(\omega t - kx)]^2$$

L'amplitude de l'intensité :

$$I_{0p} = \omega^2 \rho_0 V u_{0p}^2 \Rightarrow u_{0p} = \sqrt{\frac{I_{0p}}{4\pi^2 f^2 \rho_0 V}}$$

Application numérique : $u_{0p} = 0.24 \mu m$.

Partie B

1. De la même façon nous calculons les vitesses et pressions associés aux ondes incidentes et réfléchies :

$$u_p(x, t) = u_{0p} e^{i(\omega t - kx)} \text{ et } u_r(x, t) = u_{0r} e^{i(\omega t + kx)}$$

L'onde résultante est une superposition des deux ondes précédentes :

$$u(x, t) = u_p(x, t) + u_r(x, t) = e^{i\omega t} [u_{0p} e^{-ikx} + u_{0r} e^{ikx}]$$

Les vitesses et pression associées sont respectivement :

$$\dot{u}(x, t) = \dot{u}_p(x, t) + \dot{u}_r(x, t) = i\omega e^{i\omega t} [u_{0p} e^{-ikx} + u_{0r} e^{ikx}]$$

$$p(x, t) = p_p(x, t) + p_r(x, t) = i\omega \rho_0 V e^{i\omega t} [u_{0p} e^{-ikx} - u_{0r} e^{ikx}]$$

2. Le tuyau est ouvert en ces deux extrémités

a. Tuyau ouvert implique une pression nulle :

$$p(0, t) = p(L, t) = 0$$

b. A partir de ces deux conditions nous obtenons les valeurs des fréquences propres:

$$f_n = \frac{nV}{2L}$$

Application numérique : pour $n = 1$ et $f_1 = 440 \text{ Hz}$, $L = 38.64 \text{ cm}$.

Exercice 3

Un tuyau semi infini de section S , renfermant un gaz de masse volumique ρ , est fermé au point d'abscisse $x = L$ par une impédance terminale $Z_L = Z_c = \rho V/S$ (Figure 3). En $x = 0$ et perpendiculairement à l'axe Ox , une paroi d'épaisseur négligeable qu'on assimile à un piston de masse m est reliée à l'extrémité $x = L$ par l'intermédiaire d'un ressort de raideur b . On envoie de $-\infty$ une onde de pression plane et sinusoïdale $p_i(x, t) = A e^{j(\omega t - kx)}$.

On appellera $p_1(x, t)$ et $p_2(x, t)$ les ondes de pression dans les régions $x < 0$ et $0 < x < L$ respectivement.

1. Donner les expressions de $p_1(x, t)$ et de $p_2(x, t)$. En déduire les expressions des vitesses de particules $\dot{u}_1(x, t)$ et $\dot{u}_2(x, t)$ respectivement associées à $p_1(x, t)$ et $p_2(x, t)$.
2. Ecrire la condition de continuité de la vitesse particulaire au plan d'abscisse $x = 0$.
3. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la paroi de masse m .
4. En déduire l'expression des coefficients de réflexion et de transmission en pression, respectivement R_p et T_p en $x = 0$. En déduire leurs modules ainsi que leurs phases.
5. Que deviennent ces coefficients dans les cas particuliers suivants :
 - a. $\omega = \sqrt{b/m}$.
 - b. $m \rightarrow \infty$.
6. On se place dans le dernier cas particulier où $m \rightarrow \infty$.
 - a. Montrer que le champ de pression, dans la région $x < 0$, s'écrit sous la forme d'un produit :

$$p_1(x, t) = f(x) \cdot g(t)$$

Donner les expressions de $f(x)$ et $g(t)$ en fonction de A , k , ω , x et t .

- b. Sachant que le premier nœud de pression se trouve à une distance $d = 4.2 \text{ cm}$. Déterminer la vitesse de propagation du son dans le fluide, sachant que la fréquence est $f = 2 \text{ kHz}$.

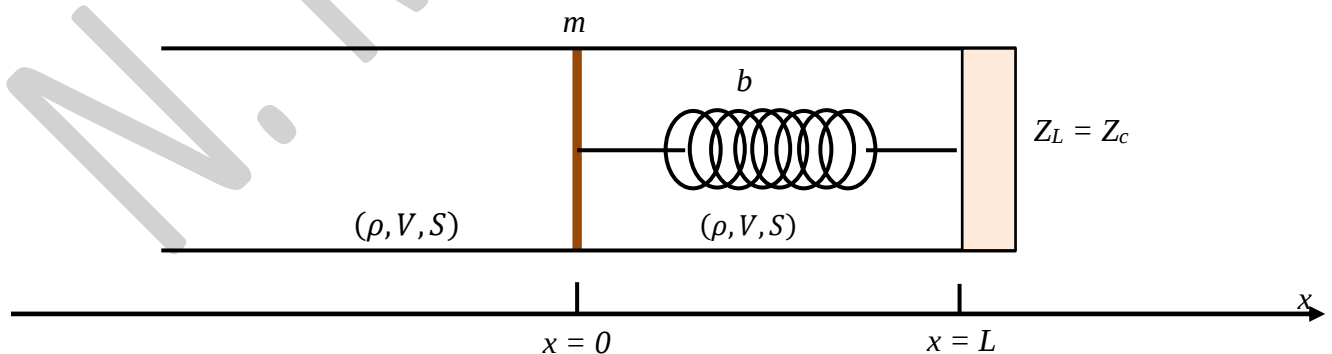


Figure 3

Solution

1. Les expressions des pressions sont :

$$p_1(x, t) = A e^{j(\omega t - kx)} + B e^{j(\omega t + kx)}$$

$$p_2(x, t) = C e^{j(\omega t - kx)}$$

En utilisant l'équation de l'hydrodynamique nous trouvons :

$$\dot{u}_1(x, t) = \frac{1}{\rho V} e^{j\omega t} [A e^{-jkx} - B e^{jkx}]$$

$$\dot{u}_2(x, t) = \frac{C}{\rho V} e^{j(\omega t - kx)}$$

2. En $x = 0$, la continuité de la vitesse particulaire donne :

$$\dot{u}_1(0, t) = \dot{u}_2(0, t) \Rightarrow A - B = C$$

3. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique :

$$Sp_1(0, t) - Sp_2(0, t) - bu_2(0, t) = m \ddot{u}_2(0, t)$$

sachant que : $\dot{u}_1(0, t) = \dot{u}_2(0, t)$.

ce qui donne

$$S[p_1(0, t) - p_2(0, t)] = \left(\frac{b}{j\omega} + jm\omega \right) \dot{u}_2(0, t)$$

donc

$$\rho VS(A + B) = \left[\left(\frac{b}{j\omega} + jm\omega \right) + \rho VS \right] C$$

4. A partir des équations :

$$A - B = C$$

$$\rho VS(A + B) = \left[\left(\frac{b}{j\omega} + jm\omega \right) + \rho VS \right] C$$

avec :

$$Z_0 = \left(\frac{b}{j\omega} + jm\omega \right)$$

et

$$Z_c = \rho VS$$

On trouve aisément :

$$R_p = \frac{B}{A} = \frac{Z_0}{2Z_c + Z_0}$$

et :

$$T_p = \frac{C}{A} = \frac{2Z_c}{2Z_c + Z_0}$$

Leurs modules respectifs sont :

$$|R_p| = \frac{m\omega - \frac{b}{\omega}}{\sqrt{(2\rho VS)^2 + \left(m\omega - \frac{b}{\omega}\right)^2}}$$

$$|T_p| = \frac{2\rho VS}{\sqrt{(2\rho VS)^2 + \left(m\omega - \frac{b}{\omega}\right)^2}}$$

et leurs arguments respectifs sont :

$$\text{Arg}(R_p) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctg}\left(\frac{m\omega - \frac{b}{\omega}}{2\rho VS}\right)$$

$$\text{Arg}(T_p) = -\text{Arctg}\left(\frac{m\omega - \frac{b}{\omega}}{2\rho VS}\right)$$

5. Dans le cas où $\omega = \sqrt{b/m}$, nous avons :

$$R_p = 0 \text{ et } T_p = 1.$$

Dans le cas où $m \rightarrow \infty$:

$$R_p = 1 \text{ et } T_p = 0.$$

6. Dans le cas précédent (question 5.c), le coefficient de réflexion $R_p = 1$. Dans ce cas la pression devient :

$$p_1(x, t) = 2A \cos(kx) e^{j\omega t}$$

$$d = \frac{\lambda}{4} = \frac{V}{4f} \Rightarrow V = 4fd$$

Application numérique :

$$V = 336 \text{ ms}^{-1}$$

Exercice 4

Un tube cylindrique de longueur infinie et de section constante S , contient deux fluides (1) et (2) de masses volumiques ρ_1 et ρ_2 respectivement et où V_1 et V_2 sont les vitesses de propagations respectives dans les milieux 1 et 2. L'origine O du repère est placée en $x = 0$, de sorte que le premier fluide occupe l'espace des $x < 0$ et que le fluide (2) occupe l'espace des $x > 0$ (voir figure 4).

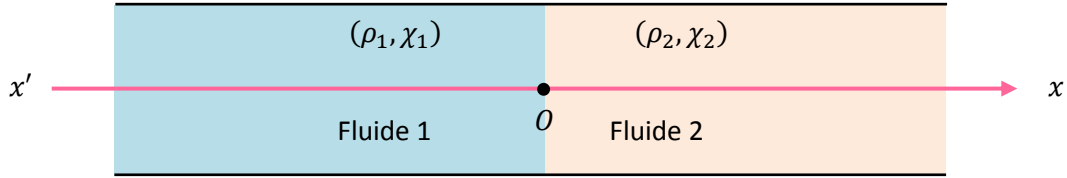


Figure 4

Une onde acoustique plane progressive de pression $p_i(x, t) = A e^{j(\omega t - k_1 x)}$ se propage dans le fluide (1). k_1 représente le module du vecteur d'onde :

$$k_1 = \frac{\omega}{V_1}$$

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{\rho_1 \chi_1}}$$

ρ_1 et χ_1 sont respectivement la masse volumique et le coefficient de compressibilité adiabatique du fluide.

L'onde de pression donne naissance à une onde réfléchie se propageant dans le sens des x décroissants ainsi qu'à une onde transmise se propageant dans le sens des x croissants. Ces deux ondes sont aussi sinusoïdales et progressives.

- Donner, en justifiant votre réponse, les expressions mathématiques réelles des surpressions acoustiques associées aux ondes réfléchies et transmises.
- En appliquant la relation d'Euler, calculer les vitesses des particules $\dot{u}_i$, $\dot{u}_r$ et $\dot{u}_t$ des ondes incidente, réfléchie et transmise.
- L'impédance acoustique d'un fluide à l'abscisse x et à l'instant t s'écrit $Z = p(x, t)/s\dot{u}$.
 - En s'appuyant sur les conditions de continuité caractérisant le passage de l'onde du fluide (1) vers le fluide (2), déduire les deux équations liant les amplitudes des ondes incidentes, transmises et réfléchies.
 - Donner le coefficient de réflexion R_p et de transmission T_p en amplitude en fonction de Z_1 et Z_2 .
- La puissance sonore moyenne véhiculée par chaque onde acoustique est donnée par la relation :

$$\langle P \rangle = S \langle p(x, t) \dot{u}(x, t) \rangle$$

- Déterminer les coefficients de réflexion α_R et de transmission α_T relatifs aux puissances acoustiques. Quelle remarque peut-on faire au sujet de ces coefficients?
- Calculer α_R et α_T si le milieu (1) est de l'air $Z_1 = 450$ Rayleigh et le milieu (2) est de l'eau $Z_2 = 1.5 \cdot 10^6$ Rayleigh.
- Refaire le même calcul de α_R et α_T pour l'eau et la terre d'impédance $Z_3 = 4.2 \cdot 10^6$ Rayleigh.

En analysant les résultats obtenus en b et c peut-on savoir si un poisson dans l'eau est effrayé quand un pêcheur parle ou quand il se déplace sur le rivage ?

Solution

1. L'onde incidente en $x = 0$ s'écrit sous la forme : $p_i(x, t) = A e^{j(\omega t - k_1 x)}$

Cette onde se propage dans le milieu 1 ($x < 0$), dans le sens des x croissants. En $x = 0$, il y a variation d'impédance, ce qui donne naissance à une onde réfléchie qui est régressive dans le milieu 1 et d'une onde transmise qui est progressive dans le milieu 2. Ces deux ondes ont la même pulsation ω , leurs amplitudes respectives sont B et C :

$$p_r(x, t) = B e^{j(\omega t + k_1 x)}$$

$$p_t(x, t) = C e^{j(\omega t - k_2 x)}$$

avec : $k_{1,2} = \omega/V_{1,2}$.

2. A partir la relation d'Euler, nous obtenons

$$\dot{u}_i(x, t) = \frac{A}{\rho_1 V_1} e^{j(\omega t - k_1 x)}$$

$$\dot{u}_r(x, t) = -\frac{B}{\rho_1 V_1} e^{j(\omega t + k_1 x)}$$

$$\dot{u}_t(x, t) = \frac{C}{\rho_2 V_2} e^{j(\omega t - k_2 x)}$$

3. Coefficient de réflexion et de transmission

a. En utilisant les conditions de continuité, nous avons :

$$p_i(0, t) + p_r(0, t) = p_t(0, t) \Rightarrow A + B = C$$

$$\dot{u}_i(0, t) + \dot{u}_r(0, t) = \dot{u}_t(0, t) \Rightarrow \frac{1}{\rho_1 V_1} (A - B) = \frac{C}{\rho_2 V_2}$$

b. A partir des équations de continuité, on trouve:

$$R_p = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}, T_p = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

4. En utilisant la définition de la puissance on trouve :

$$\langle P_i \rangle = \frac{1}{2} \frac{SA^2}{\rho_1 V_1} = \frac{A^2}{2Z_1}$$

$$\langle P_r \rangle = \frac{1}{2} \frac{SB^2}{\rho_1 V_1} = \frac{B}{2Z_1}$$

$$\langle P_t \rangle = \frac{1}{2} \frac{SC^2}{\rho_2 V_2} = \frac{C^2}{2Z_2}$$

où $\langle P_i \rangle$, $\langle P_r \rangle$ et $\langle P_t \rangle$ sont respectivement les puissances moyennes de l'onde incidente, réfléchie et transmise.

a. Les coefficients de réflexion et de transmissions en puissance sont :

$$\alpha_R = \frac{\langle P_r \rangle}{\langle P_i \rangle} = R_p^2 = \left[\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \right]^2$$

$$\alpha_T = \frac{\langle P_t \rangle}{\langle P_i \rangle} = \frac{Z_1}{Z_2} T_p^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

Nous constatons que $\alpha_R + \alpha_T = 1$, ce qui traduit la conservation de puissance dans le cas conservatif.

b. Dans le cas de réflexion air eau, nous trouvons :

$$\alpha_R = 0.99 \text{ et } \alpha_T = 0.01$$

La réflexion est presque totale.

c. Dans le cas d'une réflexion terre eau, nous trouvons :

$$\alpha_R = 0.22 \text{ et } \alpha_T = 0.78$$

A partir des résultats précédents (questions 4.b. et 4.c.) nous concluons que le poisson à plus de chance d'être effrayé lorsque le pêcheur se déplace sur le rivage que lorsqu'il parle.

Exercice 5

Un tuyau de section constante S constitué de deux parties (A, B) distinctes de longueurs respectives L_1 et L_2 , contenant deux fluides de masses volumiques ρ_1 et ρ_2 soumis à une température et une pression constante. Les deux extrémités (voir figure 5) sont fermées par des parois rigides. ($x = -L_1$, $x = L_2$). Les deux parties A et B sont séparées par une surface virtuelle sans masse et ne permettant pas la diffusion du fluide d'une partie vers l'autre.

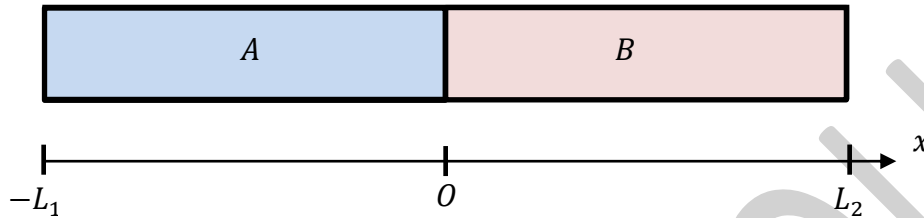


Figure 5

On génère deux ondes acoustiques monochromatiques planes, $u_1(x, t)$ et $u_2(x, t)$: étant les déplacements acoustiques).

$$u_1(x, t) = A_1 \exp j(\omega t - k_1 x) + B_1 \exp j(\omega t + k_1 x), \text{ pour } -L_1 \leq x \leq 0$$

$$u_2(x, t) = A_2 \exp j(\omega t - k_2 x) + B_2 \exp j(\omega t + k_2 x), \text{ pour } 0 \leq x \leq L_2$$

1. En écrivant les conditions aux limites en ($x = -L_1$, $x = L_2$), montrer que les deux ondes de déplacements peuvent se mettre sous la forme:

$$u_1(x, t) = A(x) \exp j(\omega t - \alpha) \text{ et } u_2(x, t) = B(x) \exp j(\omega t - \beta)$$

Préciser les fonctions réelles $A(x)$ et $B(x)$ ainsi que les arguments α et β .

2. Calculer les pressions acoustiques correspondantes $p_1(x, t)$ $p_2(x, t)$.
3. En utilisant les conditions de continuité, en $x = 0$, montrer que l'équation aux pulsations propres sous la forme:

$$a \operatorname{tg}(c\omega) + b \operatorname{tg}(d\omega) = 0$$

Préciser les expressions des constantes a , b , c et d en fonction des longueurs L_1 et L_2 , des masses volumiques ρ_1 et ρ_2 et des vitesses de propagation V_1 et V_2 .

Solution

1. En utilisant la condition en $x = -L_1$:

$$u_1(-L_1, t) = A_1 \exp j(\omega t + k_1 L_1) + B_1 \exp j(\omega t - k_1 L_1) = 0$$

ce qui donne

$$A_1 e^{jk_1 L_1} = -B_1 e^{-jk_1 L_1} \Rightarrow B_1 = -A_1 e^{2jk_1 L_1}$$

en injectant dans l'expression de $u_1(x, t)$, on trouve :

$$u_1(x, t) = -2jA_1 \sin[k_1(x + L_1)] e^{j(\omega t + k_1 L_1)}$$

De la même façon, nous avons :

$$u_2(L_2, t) = A_2 \exp j(\omega t - k_2 L_2) + B_2 \exp j(\omega t + k_2 L_2) = 0$$

d'où :

$$A_2 e^{-jk_2 L_2} = -B_2 e^{jk_2 L_2} \Rightarrow B_2 = -A_2 e^{-2jk_2 L_2}$$

En injectant dans l'expression de $u_2(x, t)$, on trouve :

$$u_2(x, t) = 2jA_2 \sin[k_2(L_2 - x)] e^{j(\omega t - k_2 L_2)}$$

par identification :

$$A(x) = -2jA_1 \sin[k_1(x + L_1)], B(x) = 2jA_2 \sin[k_2(L_2 - x)], \alpha = -k_1 L_1 \text{ et } \beta = k_2 L_2$$

2. En utilisant l'équation d'Euler, nous avons :

$$\frac{\partial p_{1,2}}{\partial x} = \rho_{1,2} \omega^2 u_{1,2}$$

Après calcul :

$$\begin{aligned} p_1(x, t) &= 2jA_1 \rho_1 V_1 \omega \cos[k_1(x + L_1)] e^{j(\omega t + k_1 L_1)} \\ p_2(x, t) &= 2jA_2 \rho_2 V_2 \omega \cos[k_2(L_2 - x)] e^{j(\omega t - k_2 L_2)} \end{aligned}$$

3. En utilisant la continuité des déplacements et des pressions en $x = 0$:

$$\begin{aligned} u_1(0, t) &= u_2(0, t) \Rightarrow -A_1 \sin(k_1 L_1) e^{jk_1 L_1} = A_2 \sin(k_2 L_2) e^{-jk_2 L_2} \\ p_1(0, t) &= p_2(0, t) \Rightarrow A_1 \rho_1 V_1 \cos(k_1 L_1) e^{jk_1 L_1} = A_2 \rho_2 V_2 \cos(k_2 L_2) e^{-jk_2 L_2} \end{aligned}$$

A partir des équations précédentes :

$$\frac{1}{\rho_1 V_1} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega L_1}{V_1}\right) + \frac{1}{\rho_2 V_2} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega L_2}{V_2}\right) = 0$$

par identification :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\rho_1 V_1}, b = \frac{1}{\rho_2 V_2} \\ c &= \frac{L_1}{V_1}, d = \frac{L_2}{V_2} \end{aligned}$$

Exercice 6

Une onde acoustique plane, sinusoïdale de pulsation ω , d'amplitude A , se propage suivant la direction Ox dans un milieu fluide de masse volumique ρ_1 . Elle arrive sous incidence normale sur un second milieu fluide de masse volumique ρ_2 et d'épaisseur L_2 , déposé sur un solide parfaitement rigide (Figure 6). On notera V_1 et V_2 les vitesses de propagation respectives dans chacun des deux milieux fluides. Les vecteurs d'onde correspondants seront notés respectivement k_1 et k_2 .

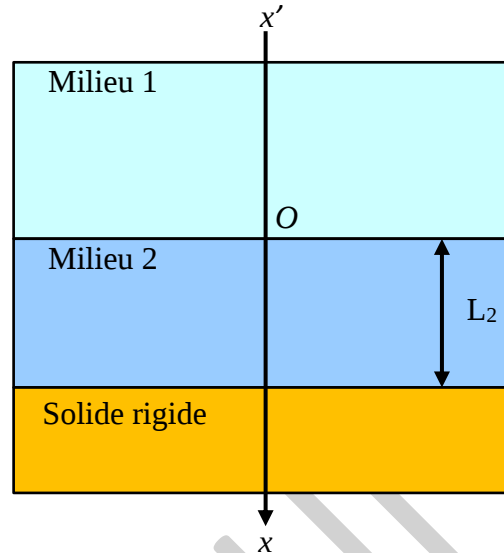


Figure 6

Dans chacun des deux milieux, la pression acoustique s'écrit respectivement

$$p_1(x, t) = Ae^{i(\omega t - k_1 x)} + Be^{i(\omega t + k_1 x)}$$

$$p_2(x, t) = Ce^{i(\omega t - k_2 x)} + De^{i(\omega t + k_2 x)}$$

1. Ecrire les expressions respectives, $\dot{u}_1(x, t)$ et $\dot{u}_2(x, t)$, des vitesses de particule dans le milieu 1 et dans le milieu 2.
2. Ecrire les relations de continuité pour la pression acoustique et pour la vitesse des particules en $x = 0$. En déduire deux relations entre les coefficients A , B , C et D .
3. Ecrire la relation de continuité pour la vitesse de particule en $x = L_2$. En déduire une relation entre les coefficients C et D .
4. En déduire le coefficient de réflexion $R = B/A$. Donner le module et la phase.
5. Mesure de la vitesse V_2
 - a. Quelle est la condition pour que, dans le milieu 2, la pression possède un noeud en $x = 0$ et un seul ventre?
 - b. Sachant que le premier noeud de pression dans le milieu 1 se situe en $x = -L_1$, calculer la vitesse de propagation V_2 en fonction de V_1 , L_1 et L_2 .
 - c. L'expérience est réalisée, dans les conditions ci-dessus, avec de l'eau comme milieu 1 ($V_1 = 1500$ m/s) et de la glycérine comme milieu 2. On mesure $L_1 = 7.5$ mm et $L_2 = 4.95$ mm. Quelle est la vitesse de propagation V_2 des ondes acoustiques dans la glycérine.

Solution

1. A partir de l'équation d'Euler

$$\dot{u}_1(x, t) = \frac{1}{Z_1} e^{i\omega t} [A e^{-ik_1 x} - B e^{ik_1 x}]$$
$$\dot{u}_2(x, t) = \frac{1}{Z_2} e^{i\omega t} [C e^{-ik_2 x} - D e^{ik_2 x}]$$

2. Les relations de continuité en $x = 0$ donnent :

$$p_1(0, t) = p_2(0, t) \Rightarrow A + B = C + D$$
$$\dot{u}_1(0, t) = \dot{u}_2(0, t) \Rightarrow \frac{1}{Z_1} (A - B) = \frac{1}{Z_2} (C - D)$$

3. En $x = L_2$ la vitesse des particules est nulle $\dot{u}_2(L_2, t) = 0 \Rightarrow C e^{-ik_2 L_2} - D e^{ik_2 L_2} = 0$

4. Des relations précédentes nous avons :

$$R = \frac{B}{A} = \frac{Z_1 + jZ_2 \operatorname{ctg}(k_2 L_2)}{jZ_2 \operatorname{ctg}(k_2 L_2) - Z_1}$$

Son module et sa phase sont :

$$|R| = 1, \varphi = 2 \operatorname{Arctg} \left[\frac{Z_2}{Z_1} \operatorname{ctg}(k_2 L_2) \right]$$

5. Mesure de la vitesse V_2

- a. Avoir un nœud de pression en $x = 0$ et un seul ventre implique

$$L_2 = \frac{\lambda_2}{4} = \frac{V_2}{4f}$$

- b. Dans le milieu 1, le premier nœud de pression se trouve en $x = -L_1$, cela implique

$$L_1 = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{V_1}{2f}$$

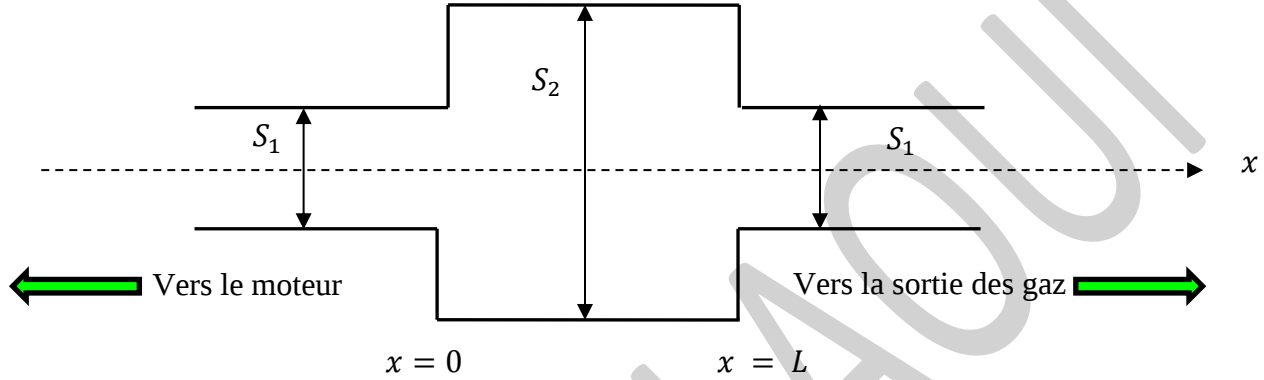
- c. La vitesse est déduite en tenant compte de la conservation de la fréquence

$$V_2 = 2 \frac{L_2}{L_1} V_1$$

Application numérique : $V_2 = 1980 \text{ ms}^{-1}$

Exercice 7

Dans tous les véhicules disposant d'un moteur à explosion (essence, diesel,...), les gaz de combustion sont évacués par un tuyau d'échappement. L'explosion provoquée par la combustion du mélange essence-air donne naissance à une onde de pression qui se propage à l'intérieur de ce tuyau et peut donner lieu à des bruits extrêmement désagréables. Pour limiter l'intensité de ce son, on utilise un pot d'échappement qui est tout simplement constitué d'un tuyau de section supérieure à la section du tuyau d'échappement. On se propose d'étudier le fonctionnement d'un tel dispositif qui peut être modélisé par le schéma de la figure suivante.



Ce système simplifié est constitué d'un tuyau de longueur L et de section $S_2 > S_1$. En $x = L$, ce tuyau est prolongé par un tuyau de longueur infinie et de section S_1 . Ces tuyaux contiennent le même mélange gazeux de masse volumique ρ dans lequel les ondes acoustiques se propagent à la vitesse V . Les impédances caractéristiques, spécifiques et respectives des tuyaux de section S_1 et S_2 sont respectivement :

$$Z_1 = \frac{\rho V}{S_1} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{\rho V}{S_2}$$

1. L'onde acoustique issue du moteur est représenté par:

$$p_i(x, t) = A_1 e^{j(\omega t - kx)}$$

Expliquer pourquoi le champ de pression acoustique peut s'écrire :

Région a ($x \leq 0$) :

$$p_1(x, t) = A_1 e^{j(\omega t - kx)} + B_1 e^{j(\omega t + kx)}$$

Région b ($0 \leq x \leq L$):

$$p_2(x, t) = A_2 e^{j(\omega t - kx)} + B_2 e^{j(\omega t + kx)}$$

Région c ($x \geq L$) :

$$p_3(x, t) = A_3 e^{j(\omega t - kx)}$$

Que représentent A_1, B_1, A_2, B_2 et A_3 ?

2. Calculer les débits $d_1 = S_1 \dot{u}_1(x, t)$, $d_2 = S_2 \dot{u}_2(x, t)$ et $d_3 = S_1 \dot{u}_3(x, t)$ correspondant respectivement aux régions a, b et c. Sachant que $\dot{u}_1, \dot{u}_2$ et $\dot{u}_3$ représentent la vitesse des particules dans chacune de ces régions.

3. Ecrire les relations de continuité (débit et pression) en $x = 0$ et en déduire l'expression de A_1 , en fonction de A_2 , B_2 , Z_1 et Z_2 .
4. Ecrire les relations de continuité (débit et pression) en $x = L$ et en déduire l'expression de A_2 et B_2 en fonction de A_3 , Z_1 et Z_2 .
5. Dans le cas où $S_2 = 4S_1$ et en utilisant les résultats précédents pour A_2 et B_2 , montrer que le coefficient de transmission en intensité acoustique est égal à :

$$\alpha_t = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2 = \frac{1}{1 + \beta[\sin(kL)]^2}$$

6. Pour quelles valeurs de la longueur L , le coefficient α_t est minimal ? En déduire la longueur minimale de L correspondante. Calculer le coefficient α_t correspondant et conclure.

Solution :

1. Dans la région (a) ($x \leq 0$), une onde incidente se propage. En $x = 0$, nous avons une variation d'impédance, l'onde incidente engendre une onde réfléchie dans la même région et une onde transmise dans la (b) région ($0 \leq x \leq L$), nous avons donc dans la région (a) la superposition d'ondes progressive et régressive, d'amplitudes respectives A_1 , B_1 et de pulsation ω :

$$p_1(x, t) = A_1 e^{j(\omega t - kx)} + B_1 e^{j(\omega t + kx)}$$

L'onde transmise à travers la frontière en $x = 0$ est progressive, en $x = L$ cette onde rencontre une variation d'impédance due à la variation de section, cela donne naissance à une onde réfléchie dans la région (b) ($0 \leq x \leq L$), et transmise dans la région (c) ($x \geq L$).

Dans la région (b), nous avons donc la superposition d'ondes progressive et régressive, d'amplitudes respectives A_2 , B_2 et de pulsation ω :

$$p_2(x, t) = A_2 e^{j(\omega t - kx)} + B_2 e^{j(\omega t + kx)}$$

Dans la 3^{ème} région (région (c)), nous avons une onde transmise à travers la frontière en $x = L$, cette onde est progressive, de pulsation ω et d'amplitude A_3 :

$$p_3(x, t) = A_3 e^{j(\omega t - kx)}$$

2. En utilisant la relation de l'hydrodynamique, nous avons :
Dans la région (a) :

$$\dot{u}_1(x, t) = \frac{1}{\rho v} e^{j\omega t} (A_1 e^{-jkx} - B_1 e^{jkx})$$

Dans la région (b) :

$$\dot{u}_2(x, t) = \frac{1}{\rho v} e^{j\omega t} (A_2 e^{-jkx} - B_2 e^{jkx})$$

Dans la région (c) :

$$\dot{u}_3(x, t) = \frac{1}{\rho v} A_3 e^{j(\omega t - kx)}$$

Les débits associés sont :

Dans la région (a) :

$$d_1(x, t) = S_1 \dot{u}_1(x, t) = \frac{1}{Z_1} e^{j\omega t} (A_1 e^{-jkx} - B_1 e^{jkx})$$

Dans la région (b) :

$$d_2(x, t) = S_2 \dot{u}_2(x, t) = \frac{1}{Z_2} e^{j\omega t} (A_2 e^{-jkx} - B_2 e^{jkx})$$

Dans la région (c) :

$$d_3(x, t) = S_1 \dot{u}_3(x, t) = \frac{1}{Z_1} A_3 e^{j(\omega t - kx)}$$

3. Les conditions de continuité en $x = 0$:

$$\begin{aligned} p_1(x, t) = p_2(x, t) &\Rightarrow A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ d_1(x, t) = d_2(x, t) &\Rightarrow \frac{1}{Z_1} [A_1 - B_1] = \frac{1}{Z_2} [A_2 - B_2] \end{aligned}$$

4. Les conditions de continuité en $x = L$:

$$\begin{aligned} p_2(L, t) = p_3(L, t) &\Rightarrow A_2 e^{-jkl} + B_2 e^{jkl} = A_3 e^{-jkl} \\ d_2(x, t) = d_3(x, t) &\Rightarrow \frac{1}{Z_2} [A_2 e^{-jkl} - B_2 e^{jkl}] = \frac{1}{Z_1} A_3 e^{-jkl} \end{aligned}$$

5. Dans le cas particulier où $S_2 = 4S_1$, nous avons $Z_1 = 4Z_2$:

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= A_2 + B_2 \\ A_1 - B_1 &= 4[A_2 - B_2] \\ A_2 e^{-j\alpha} + B_2 e^{j\alpha} &= A_3 e^{-j\alpha} \\ 4[A_2 e^{-j\alpha} - B_2 e^{j\alpha}] &= A_3 e^{-j\alpha} \end{aligned}$$

avec : $\alpha = kL$.

Dans ce qui suit on pose : $\bar{A}_2 = A_2 e^{-j\alpha}$, $\bar{B}_2 = B_2 e^{j\alpha}$ et $\bar{A}_3 = A_3 e^{-j\alpha}$.

Les équations précédentes deviennent :

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{4}(A_1 - B_1) = A_2 - B_2 \quad (2)$$

$$\bar{A}_2 + \bar{B}_2 = \bar{A}_3 \quad (3)$$

$$\bar{A}_2 - \bar{B}_2 = \frac{1}{4}\bar{A}_3 \quad (4)$$

En calculant (1) + (2), (1) – (2), puis (3) + (4) (3) – (4) :

$$\frac{5}{4}A_1 + \frac{3}{4}B_1 = 2A_2 \quad (5)$$

$$\frac{3}{4}A_1 + \frac{5}{4}B_1 = 2B_2 \quad (6)$$

$$2\bar{A}_2 = \frac{5}{4}\bar{A}_3 \Rightarrow 2A_2 = \frac{5}{4}A_3 \quad (7)$$

$$2\bar{B}_2 = \frac{3}{4}\bar{A}_3 \Rightarrow 2B_2 = \frac{3}{4}A_3 e^{-2j\alpha} \quad (8)$$

En remplaçant l'expression de A_2 en (7) dans l'équation 5, et l'expression de B_2 en (8) dans l'équation (6) nous obtenons :

$$\frac{5}{4}A_1 + \frac{3}{4}B_1 = \frac{5}{4}A_3 \Rightarrow 5A_1 + 3B_1 = 5A_3 \quad (9)$$

$$\frac{3}{4}A_1 + \frac{5}{4}B_1 = \frac{3}{4}A_3 e^{-2j\alpha} \Rightarrow 3A_1 + 5B_1 = 3A_3 e^{-2j\alpha} \quad (10)$$

Il devient alors aisé d'éliminer B_1 des deux équations et de trouver :

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{1}{1 + j\frac{9}{8}e^{-j\alpha}\sin(\alpha)} \quad (11)$$

Le module au carré de l'expression précédente est :

$$\alpha_t = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{225}{64}[\sin(\alpha)]^2} \quad (12)$$

7. α_t est minimal lorsque

$$\sin(\alpha) = \pm 1 \Rightarrow \alpha = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$$

avec $n \in \mathbb{N}$.

Sachant que $\alpha = kL$

$$L = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$$

La longueur minimale est donc :

$$L = \frac{\lambda}{4}$$

Dans ce cas la valeur numérique de α_t est :

$$\alpha_t = \frac{1}{1 + \frac{225}{64}} = 0.22$$

Afin de réduire au maximum la pollution sonore, la longueur L doit être égale $(2n + 1)\lambda/4$.

Ondes élastiques dans les solides

Résumé de cours

1. Equation d'onde

- **Cas d'une onde longitudinale**

Considérons une onde acoustique de faible amplitude se propageant suivant la direction x dans un solide déformable continu et isotrope, de section S et de masse volumique ρ (Figure 1).

Lors de sa propagation, l'onde acoustique s'accompagne d'une variation infinitésimale de la déformation $\varepsilon(x, t)$ et de la contrainte $\tau(x, t)$.

Afin d'établir l'équation d'onde, nous nous basons sur deux équations :

- **La relation fondamentale de la dynamique** appliquée à élément du barreau solide de section S et de largeur infinitésimale Δx (les forces agissant sur cette tranche résultant de la variation de contrainte liée au passage de l'onde).

$$\rho S \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x}$$

u_x : le déplacement normal à la section S des particules.

- **La loi de Hooke** qui traduit la nature élastique des matériaux dans le cas des faibles déformations. Cela se manifeste par une relation linéaire entre la contrainte τ et la déformation ε . Dans le cas d'une onde longitudinale

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \frac{F}{S} = \frac{1}{E} \tau$$

avec :

$$\varepsilon = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

E représente le module de Young, qui est une constante caractéristique du matériau.

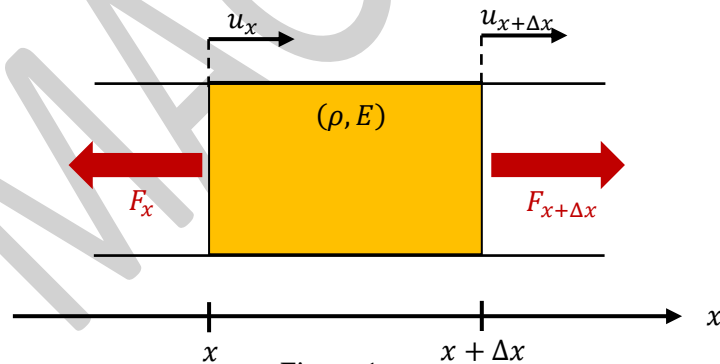


Figure 1

A partir de ces équations, nous obtenons l'équation d'onde de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{v_L^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0$$

avec :

$$v_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

v représente la vitesse de propagation de l'onde longitudinale.

- **Cas d'une onde transversale**

Lorsque l'extrémité du barreau est soumise à une force parallèle à la section S (force de cisaillement), nous pouvons supposer que chaque section du barreau se déplace de bas en haut et de haut en bas sans mouvement horizontal. Le déplacement des particules est alors u_z transversal, l'onde est alors transversale.

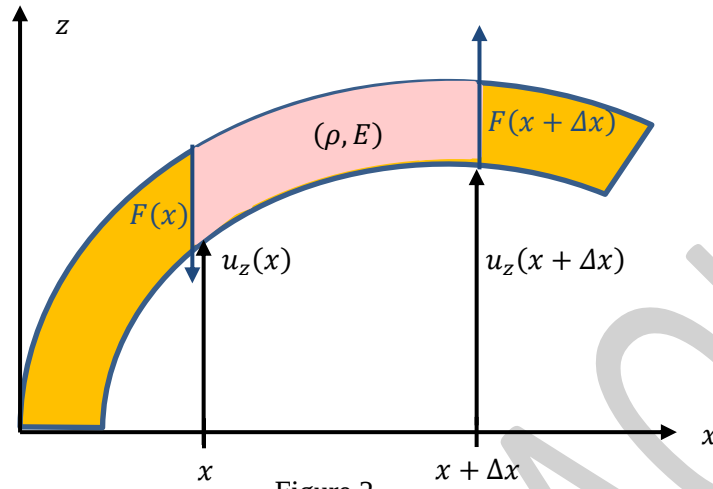


Figure 2

Une démarche analogue au cas de l'onde longitudinale, permet d'obtenir l'équation d'onde de d'Alembert.

La loi de Hooke s'écrit :

$$\varepsilon = \frac{1}{G} \frac{F}{S} = \frac{1}{G} \tau$$

G est une constante caractérisant le matériau, que l'on appelle module de cisaillement.

avec :

$$\varepsilon = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à une tranche d'épaisseur Δx donne:

$$\rho S \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x}$$

Les équations précédentes permettent d'obtenir l'équation de d'Alembert pour une onde transversale dans le solide :

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - \frac{1}{v_T^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0$$

avec :

$$v_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

2. Impédance

Dans le cas d'une onde plane progressive sinusoïdale la solution de l'équation d'onde s'écrit :

$$u_x = A e^{i(\omega t - kx)} \text{ (dans le cas d'une onde longitudinale).}$$

$$u_z = B e^{i(\omega t - kx)} \text{ (dans le cas d'une onde transversale).}$$

ω représente la pulsation de l'onde.

k le module du vecteur d'onde.

On appelle impédance en un point le rapport de l'amplitude complexe de la force à l'amplitude complexe de la vitesse de particule.

Dans le cas d'une onde longitudinale:

$$Z(x) = \frac{F_x}{\dot{u}_x}$$

avec :

$$F_x = -SE \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

Dans le cas d'une onde transversale:

$$Z(x) = \frac{F_z}{\dot{u}_z}$$

avec :

$$F_z = -SG \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Dans le cas de l'onde plane longitudinale progressive et sinusoïdale, nous trouvons:

$$Z(x) = S Z_c$$

avec :

$$Z_c = \sqrt{\rho E}$$

Dans le cas de l'onde plane transversale progressive et sinusoïdale, nous obtenons:

$$Z(x) = S Z_c$$

avec :

$$Z_c = \sqrt{\rho G}$$

3. Réflexion-transmission entre barreaux semi-infinis

Soit deux barreaux de masses volumiques ρ_1 et ρ_2 , de même section S et de longueur semi-infinie, reliés en $x = 0$. Une onde longitudinale venant de $-\infty$ se propage vers $x = 0$ dans le premier barreau, elle donne naissance au point de jonction, $x = 0$, à une onde réfléchie et une onde transmise (Figure 3).

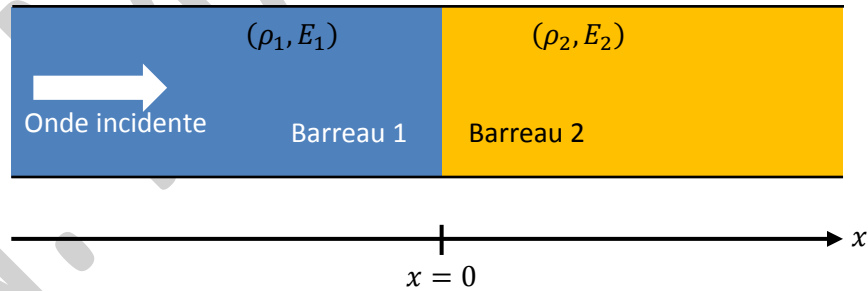


Figure 3

L'écriture de la continuité du déplacement et de la contrainte mécanique en $x = 0$ permet d'obtenir le coefficient de réflexion R_u et le coefficient de transmission T_u définis respectivement par :

$$R_u = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$T_u = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

où $Z_1 = S\sqrt{\rho_1 E_1}$ et $Z_2 = S\sqrt{\rho_2 E_2}$

E_1 et E_2 représentent respectivement les modules de young des barreaux 1 et 2.

Exercices et problèmes corrigés

Exercice 1

Un barreau métallique cylindrique, d'axe $x'Ox$, de surface de section S , a une longueur au repos ℓ . Il s'allonge de $\delta\ell$ lorsqu'il est soumis à deux forces opposées $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ appliquées à ses faces terminales (Figure 1).

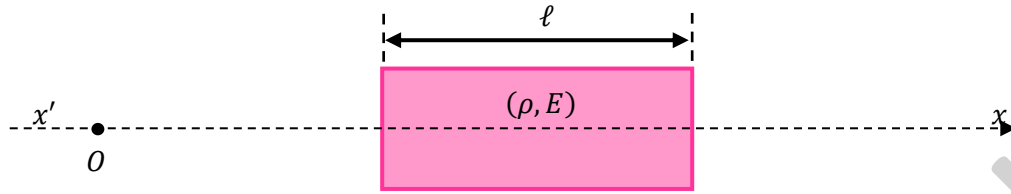
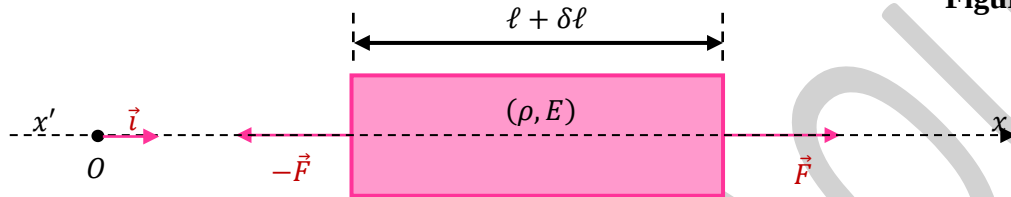


Figure 1



On note $\vec{F} = F\vec{i}$. Pour F suffisamment faible, la variation relative de longueur $\delta\ell/\ell$ est reliée à F par la Loi de Hooke :

$$\frac{\delta\ell}{\ell} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}$$

Où E est une constante appelée module de Young (E dépend de la nature du métal constituant le barreau).

1. En quelle unité SI s'exprime le module de Young E ?
2. Pour calculer la vitesse du son dans un barreau métallique cylindrique homogène très long, d'axe $x'Ox$, de surface de section S , on étudie l'évolution d'une tranche du barreau sous l'effet de la perturbation sonore. **(1)** désigne la partie du barreau située à gauche de la tranche, **(2)** partie située à droite de la tranche.

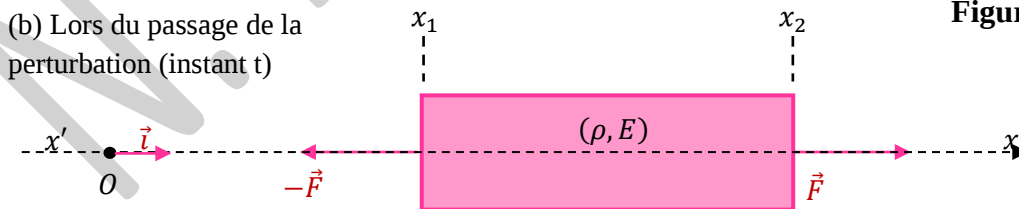
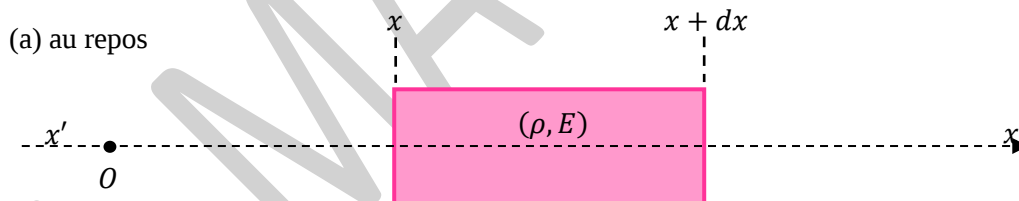


Figure 2

Au repos (Figure a ci-dessus), la tranche a une longueur dx . Elle est comprise entre les plans d'abscisses x et $x + dx$. La masse volumique, dans ce cas, est constante et égale à ρ_0 .

À l'instant t , sous l'effet de la perturbation sonore (Figure b), la tranche est comprise entre les plans x_1 et x_2 , avec $x_1 = x + u(x, t)$ et $x_2 = x + dx + u(x + dx, t)$.

$u(x, t)$ est le déplacement de particules. La masse volumique en x à l'instant t est $\rho(x, t)$. La partie (1) exerce sur la tranche une force $\vec{F}_1$. De même, la partie (2) exerce sur la tranche une force $\vec{F}_2$. On a $\vec{F}_1 = -F(x_1, t)\vec{i}$ et $\vec{F}_2 = F(x_2, t)\vec{i}$.

On se place dans le cadre de l'approximation acoustique. De plus, la surface de section S ne dépend ni de x ni de t .

- 2.a. Exprimer la masse de la tranche en fonction de ρ_0 , S et dx . À l'aide de la relation fondamentale de la dynamique, établir une relation entre $\partial^2 u / \partial t^2$ et une dérivée de F .
- 2.b. Calculer la variation relative de longueur de la tranche lors du passage de l'onde. À l'aide de la Loi de Hooke, établir une relation entre F et une dérivée de u .
- 2.c. Dédire des questions précédentes, l'équation de propagation satisfaite par u .
Donner l'expression de vitesse de propagation v , du son dans le barreau en fonction de E (module de Young) et de ρ_0 .

Application numérique: calculer la vitesse v , en m/s , pour un barreau en acier ($E = 2.10^{11} SI, \rho_0 = 7850 kg/m^3$).

Solution

1.

$$E = \frac{\ell}{\delta \ell} \frac{F}{S} \Rightarrow E \text{ est en } Nm^{-2}$$

- 2.a. La masse de la tranche est $dm = \rho_0 S dx$. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la tranche considérée s'écrit:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = dm \vec{a} \Rightarrow F_2 - F_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rho_0 S dx$$

En tenant compte de l'approximation acoustique,

$$F_2 - F_1 = F(x + dx + u(x + dx, t), t) - F(x + u(x, t), t) \approx dx \frac{\partial F}{\partial x}$$

Nous avons donc:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rho_0 S$$

- 2.b. La variation relative de longueur est:

$$\frac{\delta \ell}{\ell} = \frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

En tenant compte de la loi de Hooke:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{F}{ES}$$

2.c. En dérivant l'expression obtenue en (2.b) et en la reportant dans l'expression (2.a), nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho_0}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} = 5000 \text{ ms}^{-1}$$

Exercice 2

Un barreau d'acier de 10^{-4} m^2 de section droite et de 0.25 m de longueur est libre de se mouvoir en $x = 0$ et il est chargé à l'autre extrémité, en $x = 0.25 \text{ m}$, par une masse de 0.15 kg .

- Calculer la fréquence fondamentale des vibrations longitudinales de ce barreau.
- Déterminer la position à laquelle ce barreau doit être fixé pour causer la plus faible perturbation de son mode fondamental de vibration.
- Quand ce barreau vibre dans son mode fondamental, quel est le rapport de l'amplitude du déplacement de l'extrémité libre à celle qui est chargée par la masse ?
- Quelle est la fréquence du premier harmonique de ce barreau ?

Solution

- Le déplacement des particules :

$$u(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + Be^{i(\omega t + kx)}$$

Nous appliquons le principe fondamental de la dynamique :

$$-SE \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=L}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$S\sqrt{\rho E} [Ae^{-ikL} - Be^{ikL}] = im\omega [Ae^{-ikL} + Be^{ikL}] \quad (1)$$

La condition d'extrémité libre en $x = 0$, permet d'écrire :

$$F(0, t) = 0$$

permet de trouver :

$$A = B \quad (2)$$

Des équations (1) et (2) :

$$\text{tg}(kL) = -\frac{m\omega}{S\sqrt{\rho E}}$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$\text{tg}\left(\frac{\omega L}{v}\right) = -\frac{\omega L}{v} \left(\frac{mv^2}{SEL}\right) \quad (3)$$

Cette équation est du type :

$$\text{tg}(x) = -ax$$

a est une constante.

Afin de résoudre cette équation, je propose de faire un petit programme sous matlab (Voir ci-dessous).

Programme principal faisant appel à une fonction **ftan1**

%calcul du mode fondamental

clear

clc

global a

E=2e11;

rho=7.8e3;

S=1e-4;

v=sqrt(E/rho);

L=0.25;

m=0.15;

a=m*v^2/(L*E*S);

fun=@ftan1;

sol=fzero(fun,pi/2);

omega=sol*v/L;

%Affichage du résultat

disp('Exercice 3')

disp('-----')

disp(['Mode fondamental : w=' num2str(omega) ' rad/s'])

Ci-dessous la fonction **ftan1**

function tanx=ftan1(x)

a=0.7692;

tanx=tan(x)+a*x;

end

Nous trouvons pour le mode fondamentale:

$$\omega = 31816.1456 \text{ rad s}^{-1}$$

La fréquence correspondante est :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 5.0637 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

2. Le barreau doit être fixé au niveau du ventre afin d'avoir un minimum de vibration dans le mode fondamental.

Nous savons que $A = B$ (condition en $x = 0$).

Le déplacement s'écrit alors :

$$u(x, t) = e^{i\omega t} [Ae^{-ikx} + Be^{ikx}] = 2A \cos(kx) e^{i\omega t}$$

Le ventre se trouve à une position x , telle que :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \Rightarrow -2Ak \sin(kx) e^{i\omega t} = 0$$

En d'autres termes: $\sin(kx) = 0$.

La résolution de l'équation précédente donne:

$$x_n = n \frac{\pi v}{\omega}$$

Dans le cas du mode fondamental, nous avons $n = 1$, ce qui donne:

$$x = \frac{\pi v}{\omega}$$

3. Le rapport d'amplitude est:

$$\frac{u(0, t)}{u(L, t)} = \frac{A + B}{Ae^{-ikL} + Be^{ikL}}$$

Comme $A = B$ (condition en $x = 0$)

Le rapport devient:

$$\frac{u(0, t)}{u(L, t)} = \frac{1}{\cos(kL)}$$

4. Un calcul numérique exploitant le programme précédent nous trouvons la fréquence de la 1ère harmonique égale à:

$$\omega = 42955.0207 \Rightarrow f = 6.8365 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

Ondes électromagnétiques dans le vide

Résumé de cours

1. Les équations de Maxwell dans le vide

En 1873, Maxwell publie ses quatre équations. En 1888, Hertz réalise le premier générateur d'ondes électromagnétiques.

Dans le vide en absence de charges et de courants ($\rho = 0, \vec{j}_c = \vec{0}$), les champs électriques $\vec{E}$ et magnétiques $\vec{B}$ obéissent aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot}(\vec{B}) &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

A partir des quatre équations de Maxwell nous montrons que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ obéissent aux équations de d'Alembert :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \vec{0} \\ \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Dans le vide les ondes électromagnétiques se propagent à la vitesse de la lumière :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

2. Solution en onde plane progressive et sinusoïdale

Soit une onde plane se propageant dans le sens positif de l'axe Oz, sans déformation ni atténuation : $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ sont des fonctions de $(\omega t - kz)$.

ω et k sont respectivement la pulsation et le module du vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_z$.

- **Relation de dispersion**

A partir de la relation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

nous démontrons que :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Cette relation est appelée relation de dispersion dans le vide.

- **Transversalité de $\vec{E}$ et $\vec{B}$**

La relation $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ entraîne $E_z = 0$.

$\vec{E}$ est perpendiculaire à $\vec{k}$

Il en est de même pour la champ magnétique.

$\vec{k}$ indique le sens de la propagation.

- **Détermination du champ magnétique $\vec{B}$**

A partir de la relation :

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

nous obtenons :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$$

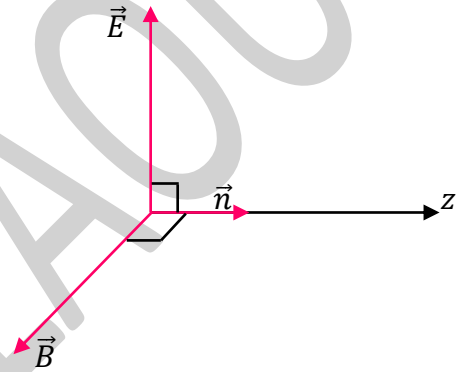
Cette relation peut s'écrire :

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{c}$$

- **Structure de l'onde**

Il s'ensuit que le trièdre $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ forme un trièdre direct dans le cas d'une onde plane à tout instant, et qu'en tout point de l'espace :

$$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$$



3. Polarisation

Soit une onde électromagnétique caractérisée par son vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_z$, son champ électrique est :

$$\vec{E}(M, t) \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz + \varphi) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz + \psi) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

Le champ magnétique associé à cette onde est :

$$\vec{B}(M, t) \begin{cases} B_x = -\frac{E_{0y}}{c} \cos(\omega t - kz + \psi) \\ B_y = \frac{E_{0x}}{c} \cos(\omega t - kz + \varphi) \\ B_z = 0 \end{cases}$$

- **Polarisation rectiligne**

Si $\varphi = \psi + n\pi$, avec $n \in \mathbb{Z}^*$, alors :

$$\frac{E_y}{E_x} = \text{Constante}$$

La direction de $\vec{E}$ reste invariable dans le temps et dans l'espace : l'onde est polarisée rectilignement.

- **Polarisation circulaire ou elliptique**

Si $\varphi = \psi + (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, avec $n \in \mathbb{Z}^*$, alors :

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = 1$$

L'extrémité de $\vec{E}$ (ou de $\vec{B}$), en un point donné M de l'espace, décrit une ellipse au cours du temps, d'axes parallèles à Ox et Oy : l'onde possède une polarisation elliptique (droite ou gauche). Si, de plus, $E_{0x} = E_{0y}$, la polarisation est circulaire.

4. Energie de l'onde électromagnétique

- Expression de la conservation d'énergie

$$\frac{\partial \omega_{EM}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{R} = 0$$

où ω_{EM} est la densité volumique d'énergie contenue dans le volume τ .

$$W = \iiint_{(\tau)} \omega_{EM}(M, t) d\tau$$

et où $\vec{R}$ est le vecteur de Poynting dont le flux à travers une surface S est égal à la puissance pénétrant dans τ .

$$\mathcal{P} = \iint_{(S)} \vec{R} \cdot d\vec{S}$$

- Expression de ω_{EM} et $\vec{R}$

$$\vec{R} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad \text{et} \quad \omega_{EM} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right)$$

Ondes électromagnétiques dans les milieux linéaires homogènes et isotropes

Résumé de cours

1. Les équations de Maxwell dans les milieux linéaires homogènes et isotropes

Dans ce qui suit, nous considérerons des milieux matériels non magnétiques (la perméabilité du milieu μ est égale à la perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{Hm}^{-1}$), homogènes (la permittivité ε est indépendante de la position $\vec{r}$), linéaires et isotropes.

On introduit les champs suivants :

- $\vec{D}$: champ excitation électrique.
- $\vec{H}$: champ excitation magnétique.

Pour des milieux linéaires et isotropes, on a les relations de proportionnalité suivantes :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Dans ce genre de milieu les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

ρ et $\vec{j}$ sont respectivement les densités volumiques de charge et de courant.

2. Cas du plasma

Un plasma est un gaz ionisé, les atomes ou molécules du gaz sont chargés individuellement, mais le milieu est globalement neutre car il y a autant de charges positives que de charges négatives. Un plasma est un milieu dilué, avec de grandes distances entre chaque atome. Les ions étant très lourds comparés aux électrons sont pratiquement immobiles et ne contribuent pas à la propagation de l'onde dans le plasma.

• Conductivité du plasma :

Lorsqu'un plasma est soumis à une onde électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$, les particules de masse m_p portant une charge q_p ont comme équation de mouvement :

$$m_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} = q_p \vec{E}$$

Avec une onde caractérisée par une fonction de propagation à une dimension $\exp i(\omega t - kx)$, on peut supposer une même forme pour la vitesse de la charge. La relation entre la vitesse et le champ électrique est donc :

$$im_p \omega \vec{v}_p = q_p \vec{E}$$

De plus la densité de courant de conduction est donnée par (loi d'Ohm microscopique):

$$\vec{j} = Nq_p \vec{v}_p = \gamma \vec{E}$$

Où :

γ : représente est la conductivité dans le plasma.

N : le nombre de particules par unité de volume.

$\vec{v}_p$: la vitesse des particules.

Finalement, nous trouvons :

$$\gamma = -i \frac{Nq_p^2}{m_p \omega}$$

Cette conductivité est un imaginaire pur, ce qui indique que la vitesse des charges est toujours déphasée de $-\pi/2$ par rapport au champ électrique.

- **Equations de Maxwell et relation de dispersion :**

Les équations de Maxwell dans un tel milieu de permittivité ϵ_0 et de perméabilité μ_0 sont:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= 0 & \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Ces quatre équations permettent de trouver la relation de dispersion dans un plasma :

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

avec :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

et :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}}$$

Cette pulsation appelée pulsation de coupure ou pulsation de plasma sépare le domaine fréquentiel en deux régions :

- Région 1 : caractérisée par : $\omega < \omega_p$.

$$k = \pm i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{v^2}}$$

Il n'y a donc pas de propagation d'onde pour ces fréquences, l'onde est évanescence.

- Région 2 : caractérisée par : $\omega > \omega_p$.

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{v^2}}$$

La relation entre k et ω est non linéaire et donc le milieu est dispersif.

Les vitesses de phase et de groupe sont données par :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Nous trouvons aussi :

$$n = \frac{c}{v_\phi} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

n étant l'indice de réfraction.

Nous remarquons que : $c < v_\phi$ et $n < 1$.

Ceci n'est pas paradoxal car cette vitesse ne correspond pas à la vitesse de propagation de l'énergie (vitesse de groupe).

Nous constatons que : $v_g < c$ et que $v_g \cdot v_\phi = c^2$.

3. Cas des conducteurs

- **Cas des bons conducteurs**

Dans le cas d'un conducteur neutre, la densité macroscopique de charges libres est nulle ($\rho = 0$).

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= 0 \\ \text{div} \vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) &= \mu \vec{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

ajouté à cela $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

γ représente la conductivité.

En prenant $\vec{E}$ sous la forme d'une onde plane sinusoïdale :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Les équations de Maxwell deviennent :

$$\begin{aligned} -i\vec{k} \cdot \vec{E} &= 0 \\ -i\vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 \\ -i\vec{k} \times \vec{E} &= -i\omega \vec{B} \\ -i\vec{k} \times \vec{B} &= (\mu\gamma + i\omega\mu\epsilon)\vec{E} \end{aligned}$$

Nous trouvons la relation de dispersion suivante :

$$k^2 = \mu\epsilon \left(1 - i \frac{\gamma}{\omega\epsilon}\right) \omega^2$$

k est donc complexe, dans le cas d'une onde plane sinusoïdale progressive suivant z , $k = k' - ik''$ et le champ s'écrit :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} = \vec{E}_0 e^{-k''z} e^{i(\omega t - k'z)}$$

Nous avons une onde plane, progressive ($k' > 0$) et atténuée ($k'' > 0$).

Dans le cas des bons conducteurs :

$$\frac{\gamma}{\omega\epsilon} \gg 1$$

$$k = \sqrt{\frac{\mu\gamma\omega}{2}} (1 - i)$$

Les coefficients de propagation k' et d'atténuation k'' sont égaux. A partir de k' nous calculons les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\gamma}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk'} = 2 \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\gamma}}$$

Ces vitesses croissent en fonction de la fréquence.

k'' permet de déterminer l'épaisseur de peau δ :

$$\delta = \frac{1}{k''} = \sqrt{\frac{2}{\mu\gamma\omega}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu\gamma}}$$

L'épaisseur de peau δ représente la distance au bout de laquelle l'amplitude de $\vec{E}$ (celle de $\vec{B}$ également) est divisée par e .

- **Cas des conducteurs parfaits**

Un conducteur parfait correspond à la limite d'une conductivité γ infinie. la densité de courant $\vec{j}$ devant rester finie, la loi d'Ohm $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ impose au champ électrique d'être nul au sein du conducteur parfait ($\vec{E} = \vec{0}$).

Il en résulte les propriétés suivantes :

$$\rho = \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = 0 \text{ il n'y a pas de charges}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{0}$$

Par conséquent, un conducteur parfait se comporte comme un écran vis-à-vis du champ électromagnétique $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

4. Cas des diélectriques parfaits

Dans le cas de ces matériaux, nous avons :

$$\mu = \mu_0, \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r, \rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$$

Dans ces conditions, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

A partir de ces équations, nous obtenons les équations d'ondes pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

où la vitesse de propagation de l'onde :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

L'équation d'onde permet de trouver la relation de dispersion suivante :

$$k = \sqrt{\epsilon_r} \frac{\omega}{c}$$

L'indice de réfraction est $n = \sqrt{\epsilon_r}$.

Réflexion et réfraction entre deux milieux

Résumé de cours

1. Relations de passage

Dans ce qui suit, nous allons étudier la réflexion et transmission entre deux milieux linéaires, homogènes, isotropes et non magnétiques.

Les équations de Maxwell :

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

avec :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

ρ et $\vec{j}$ sont respectivement les densités volumiques de charge et de courant.

conduisent aux relations :

$$\vec{E}_{2t} - \vec{E}_{1t} = \vec{0}$$

$$\vec{B}_{2n} - \vec{B}_{1n} = \vec{0}$$

$$\vec{D}_{2n} - \vec{D}_{1n} = \sigma \vec{e}_n$$

$$\vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t} = \vec{j}_s \times \vec{e}_n$$

σ et $\vec{j}_s$ sont respectivement les densités superficielles de charge et de courant. $\vec{e}_n$ représente le vecteur unitaire normale à la surface orienté du milieu 1 vers le milieu 2 (Figure 1).

Les indices t et n sont respectivement les composantes tangentielle et normale à la surface (S).

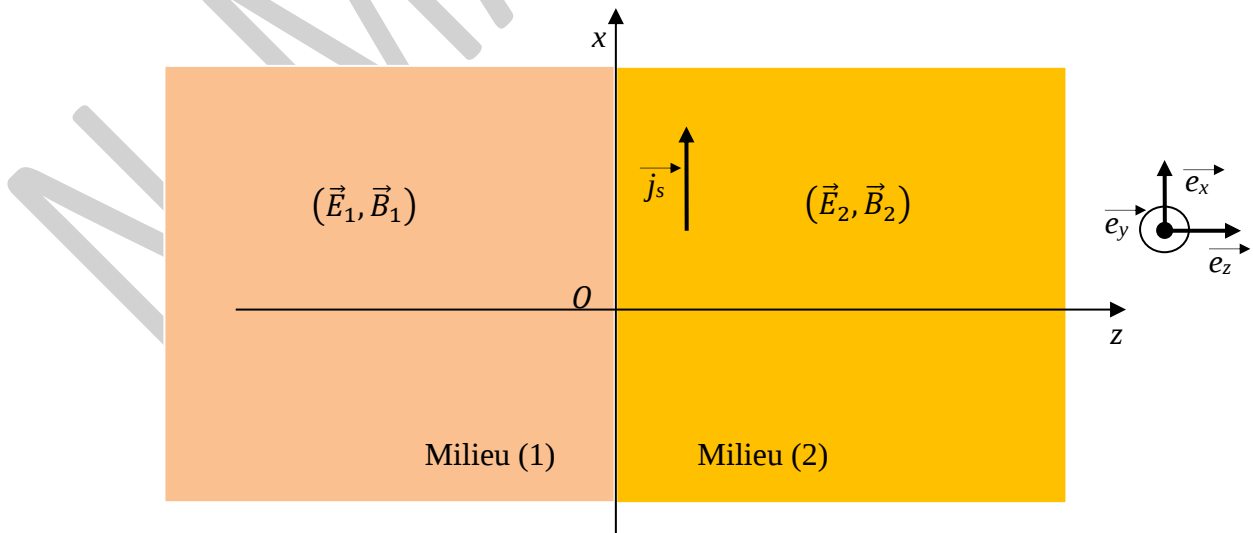


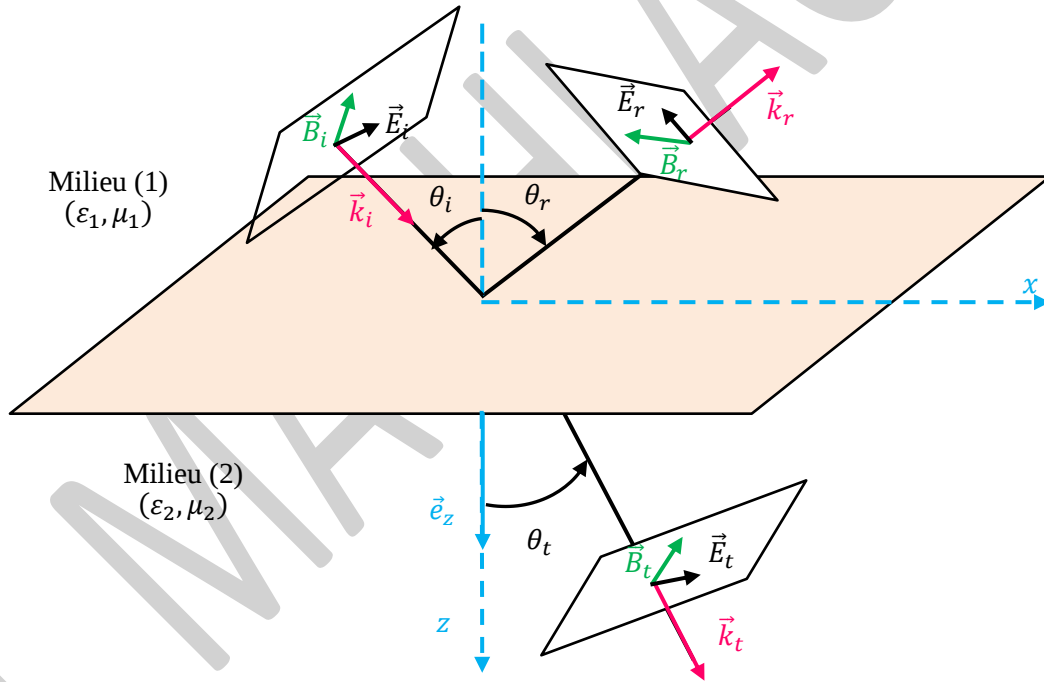
Figure 1

2. Cas de deux diélectriques parfaits séparés par une interface plane

- Relations de passages

Considérons deux diélectriques parfaits, non magnétiques avec des constantes diélectriques ε_1 et ε_2 et perméabilités $\mu_1 = \mu_0$ et $\mu_2 = \mu_0$, séparés par le plan $z = 0$. Les indices de réfraction sont respectivement $n_1 = \sqrt{\varepsilon_{r1}}$ et $n_2 = \sqrt{\varepsilon_{r2}}$. Soit une onde plane incidente sur l'interface, en provenance du milieu 1 (Figure 2). En général, cette onde sera partiellement réfractée dans l'autre milieu et partiellement réfléchie. Nous trouverons ici la relation exacte qui existe entre les ondes incidente, réfractée et réfléchie. Nous procéderons simplement en appliquant les conditions de continuité appropriées à ces trois ondes :

$$\begin{aligned}\vec{E}_{2t} - \vec{E}_{1t} &= \vec{0} \\ \vec{B}_{2n} - \vec{B}_{1n} &= \vec{0} \\ \vec{D}_{2n} - \vec{D}_{1n} &= \vec{0} \\ \vec{B}_{2t} - \vec{B}_{1t} &= \vec{0}\end{aligned}$$



$\vec{u}_i$, $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_t$ sont les vecteurs unitaires des supports des vecteurs champs électriques des différentes ondes, nous pouvons représenter ces dernières en notation complexe par :

- Onde incidente : $\vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \vec{e}_i$.
- Onde réfléchie : $\vec{E}_r = E_{0r} e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \vec{e}_r$.
- Onde transmise : $\vec{E}_t = E_{0t} e^{i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} \vec{e}_t$.

Les vitesses de propagations dans les milieux 1 et 2 sont respectivement v_1 et v_2 :

$$v_1 = n_1 \frac{\omega}{c}, v_2 = n_2 \frac{\omega}{c}$$

- **Lois de Snell et Descartes**

La conservation de la composante tangentielle du champ $\vec{E}$ montre que :

- La fréquence des ondes réfléchies et transmises sont égales à la fréquence de l'onde incidente $\omega = \text{constant}$.
- Les vecteurs d'onde réfléchi et transmis sont contenus dans le plan d'incidence (plan formé par $\vec{k}_i$ et la normale à la surface de séparation au point d'incidence).
- L'angle de réflexion θ_r est égal à l'angle d'incidence θ_i .
- Les angles de transmission θ_r et d'incidence θ_i sont liés par la relation suivante :

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \text{ (loi de la réfraction).}$$

Ces résultats représentent les lois de Snell-Descartes pour la réflexion et la réfraction.

- **Coefficient de réflexion et de transmission**

Champ électrique perpendiculaire au plan d'incidence

Nous allons considérer le phénomène de réflexion-transmission d'une onde plane sinusoïdale arrivant du milieu (1), sur le plan $z = 0$ séparant les deux milieux. On se propose de calculer les coefficients de réflexion r et de transmission t . Dans ce qui suit, nous considérons le cas où le champ incident est perpendiculaire au plan d'incidence (plan de la figure) (Figure 3).

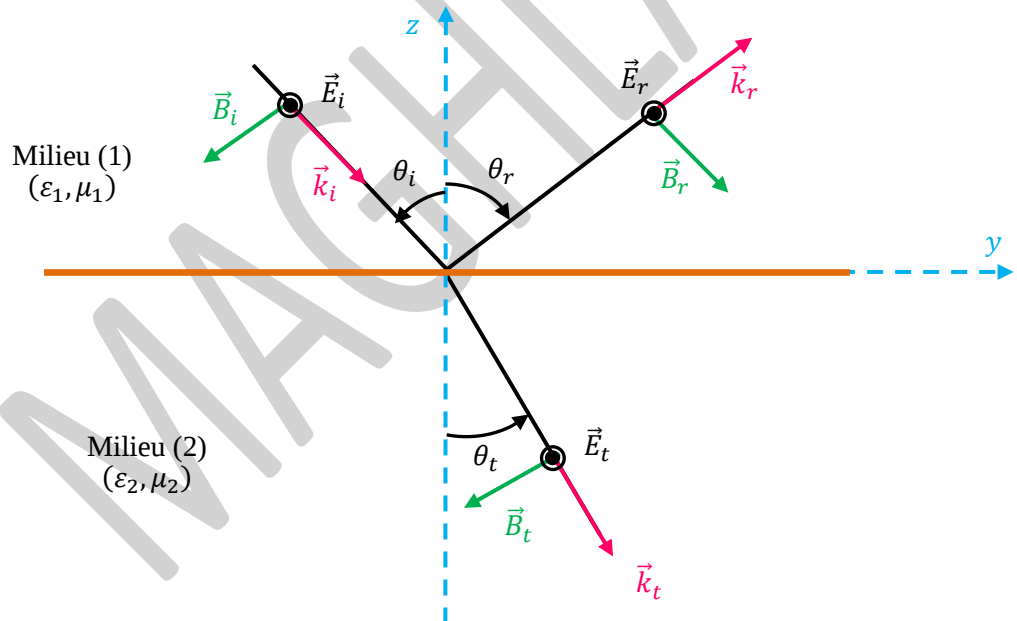


Figure 3

Les différents champs en notation complexe sont :

- Onde incidente : $\vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \vec{e}_x$.
- Onde réfléchie : $\vec{E}_r = E_{0r} e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \vec{e}_x$.
- Onde transmise : $\vec{E}_t = E_{0t} e^{i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} \vec{e}_x$.

avec :

$$\vec{k}_i = n_1 \frac{\omega}{c} (\sin \theta_i \vec{e}_y - \cos \theta_i \vec{e}_z), \vec{k}_r = n_1 \frac{\omega}{c} (\sin \theta_i \vec{e}_y + \cos \theta_i \vec{e}_z), \vec{k}_t = n_2 \frac{\omega}{c} (\sin \theta_t \vec{e}_y - \cos \theta_t \vec{e}_z)$$

Les champs magnétiques associés aux champs $\vec{E}_i$, $\vec{E}_r$ et $\vec{E}_t$ sont respectivement :

$$\begin{aligned}\vec{B}_i &= \frac{\vec{k}_i \times \vec{E}_i}{\omega} = -\frac{n_1}{c} E_{0i} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} (\cos \theta_i \vec{e}_y + \sin \theta_i \vec{e}_z) \\ \vec{B}_r &= \frac{\vec{k}_r \times \vec{E}_r}{\omega} = \frac{n_1}{c} E_{0r} e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} (\cos \theta_i \vec{e}_y - \sin \theta_i \vec{e}_z) \\ \vec{B}_t &= \frac{\vec{k}_t \times \vec{E}_t}{\omega} = -\frac{n_2}{c} E_{0t} e^{i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} (\cos \theta_t \vec{e}_y + \sin \theta_t \vec{e}_z)\end{aligned}$$

La continuité de la composante tangentielle des champs donne :

$$\begin{aligned}E_{0i} + E_{0r} &= E_{0t} \\ n_1 \cos \theta_i (E_{0i} - E_{0r}) &= n_2 \cos \theta_t E_{0t}\end{aligned}$$

Nous trouvons les formules de Fresnel :

$$\begin{aligned}r_{\perp} &= \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \\ t_{\perp} &= \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}\end{aligned}$$

En utilisant la relation suivante :

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

Nous trouvons :

$$\begin{aligned}r_{\perp} &= -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \\ t_{\perp} &= \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)}\end{aligned}$$

La notation $[]_{\perp}$ indique que le champ électrique est dans le plan d'incidence.

Les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude nous permettent de déterminer les coefficients de réflexion et de transmission pour l'énergie.

On définit les facteurs de réflexion $\mathcal{R}$ et de transmission $\mathcal{T}$ en énergie, comme les rapports respectifs des flux d'énergies réfléchi Φ_r et transmis Φ_t au flux incident Φ_i en moyenne dans le temps, à travers la surface S , au niveau de l'interface :

$$\begin{aligned}\langle \Phi_i \rangle &= \langle R_i \rangle S \cos \theta_i \\ \langle \Phi_r \rangle &= \langle R_r \rangle S \cos \theta_i \\ \langle \Phi_t \rangle &= \langle R_t \rangle S \cos \theta_t\end{aligned}$$

$\langle R_i \rangle$, $\langle R_r \rangle$ et $\langle R_t \rangle$ sont respectivement les valeurs moyennes des modules des vecteurs de Poynting pour l'onde incidente, réfléchie et transmise.

Dans le cas d'une onde plane d'amplitude sinusoïdale :

$$\begin{aligned}\langle R_i \rangle &= \frac{n_1}{\mu_0 c} \frac{E_{0i}^2}{2} \\ \langle R_r \rangle &= \frac{n_1}{\mu_0 c} \frac{E_{0r}^2}{2} \\ \langle R_t \rangle &= \frac{n_2}{\mu_0 c} \frac{E_{0t}^2}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, nous trouvons les expressions suivantes :

$$\mathcal{R}_\perp = r_\perp^2 = \left(\frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2$$

$$\mathcal{T}_\perp = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t_\perp^2 = \frac{4n_1 n_2 \cos \theta_i \cos \theta_t}{(n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t)^2}$$

La relation de conservation de l'énergie est ainsi satisfaite :

$$\mathcal{R}_\perp + \mathcal{T}_\perp = 1$$

Champ électrique dans le plan d'incidence

Dans ce cas les champs $\vec{E}_i$, $\vec{E}_r$ et $\vec{E}_t$ sont compris dans le plan d'incidence. Les différentes ondes s'écrivent :

- Onde incidente : $\vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} (\cos \theta_i \vec{e}_y + \sin \theta_i \vec{e}_z)$.
- Onde réfléchie : $\vec{E}_r = E_{0r} e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} (\cos \theta_i \vec{e}_y - \sin \theta_i \vec{e}_z)$.
- Onde transmise : $\vec{E}_t = E_{0t} e^{i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} (\cos \theta_t \vec{e}_y + \sin \theta_t \vec{e}_z)$.

Les champs magnétiques associés à ces champs sont :

- Onde incidente : $\vec{B}_i = n_1 \frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \vec{e}_x$.
- Onde réfléchie : $\vec{B}_r = -n_1 \frac{E_{0r}}{c} e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} \vec{e}_x$.
- Onde transmise : $\vec{B}_t = n_2 \frac{E_{0t}}{c} e^{i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})} \vec{e}_x$.

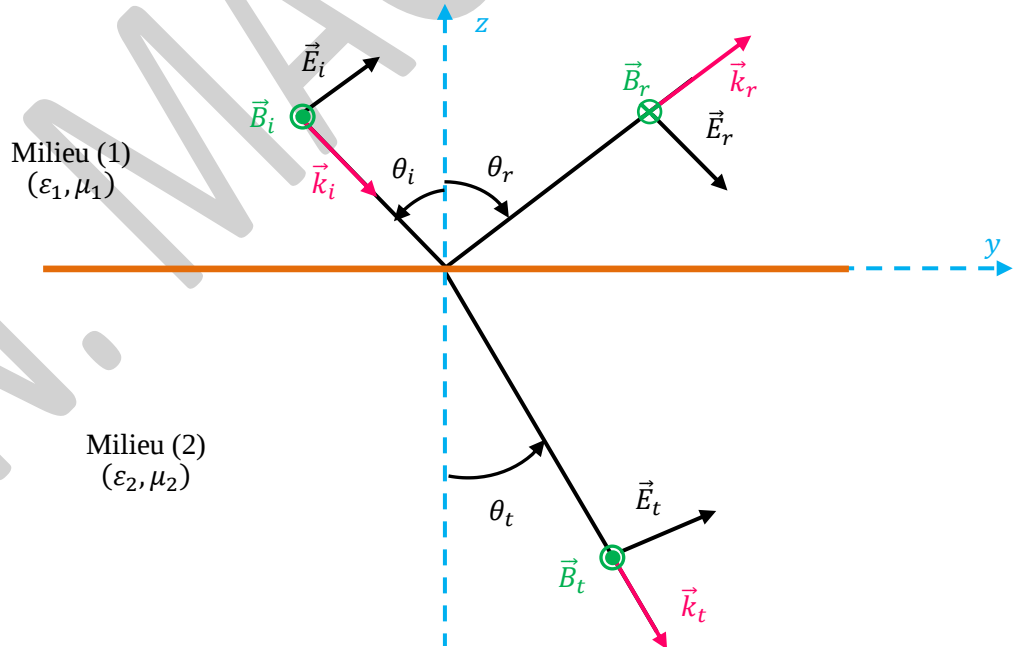


Figure 4

La continuité des composantes tangentielles du champ électrique et magnétique donne :

$$\begin{aligned}(E_{0i} + E_{0r}) \cos \theta_i &= E_{0t} \cos \theta_t \\ n_1(E_{0i} - E_{0r}) &= n_2 E_{0t}\end{aligned}$$

A partir des relations précédentes nous obtenons les coefficients de réflexion et de transmission (Formules de Fresnel) :

$$\begin{aligned}t_{\parallel} &= \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} \\ r_{\parallel} &= \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = -\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}\end{aligned}$$

La notation $[]_{\parallel}$ indique que le champ électrique est dans le plan d'incidence.

En utilisant la même démarche que pour le cas d'un champ électrique perpendiculaire au plan d'incidence, nous trouvons les coefficients de réflexion $\mathcal{R}_{\parallel}$ et de transmission $\mathcal{T}_{\parallel}$ en énergie, dans le cas où le champ électrique est dans le plan d'incidence.

$$\mathcal{R}_{\parallel} = r_{\parallel}^2 = \left[\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \right]^2$$

La conservation de l'énergie étant vérifiée, alors :

$$\mathcal{T}_{\parallel} = 1 - \mathcal{R}_{\parallel} = \frac{4n_1 n_2 \cos \theta_i \cos \theta_t}{(n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t)^2}$$

Dans le cas particulier où $\theta_i = 0$, nous avons $\theta_t = 0$. Les coefficients de réflexion et de transmission s'écrivent :

$$\mathcal{R}_{\perp} = \mathcal{R}_{\parallel} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

et :

$$\mathcal{R}_{\perp} = \mathcal{R}_{\parallel} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

$\mathcal{R}_{\parallel}$ est le seul coefficient à pouvoir s'annuler. Cela se produit lorsque $\theta_i + \theta_t = \pi/2$, ce qui correspond à un angle d'incidence, appelé noté θ_B (Angle de Brewster), tel que :

$$\text{tg}(\theta_B) = \frac{n_2}{n_1}$$

Lorsque $\theta_i = \theta_B$, une extinction totale du rayon réfléchi se produit, accompagnée d'une réfraction complète.

3. Réflexion en incidence normale sur un conducteur parfait

- **Expression du champ résultant**

Supposons que le milieu 2 est un conducteur parfait (conductivité infinie). Une onde électromagnétique plane, harmonique dont le champ électrique est polarisé suivant Ox se propageant dans le vide arrive en incidence normale sur la surface de séparation (Figure 5). Des considérations énergétiques montrent qu'il n'y a pas de champ électromagnétique transmis et que les seuls courants pouvant être induits par cette onde sont sur la surface du métal.

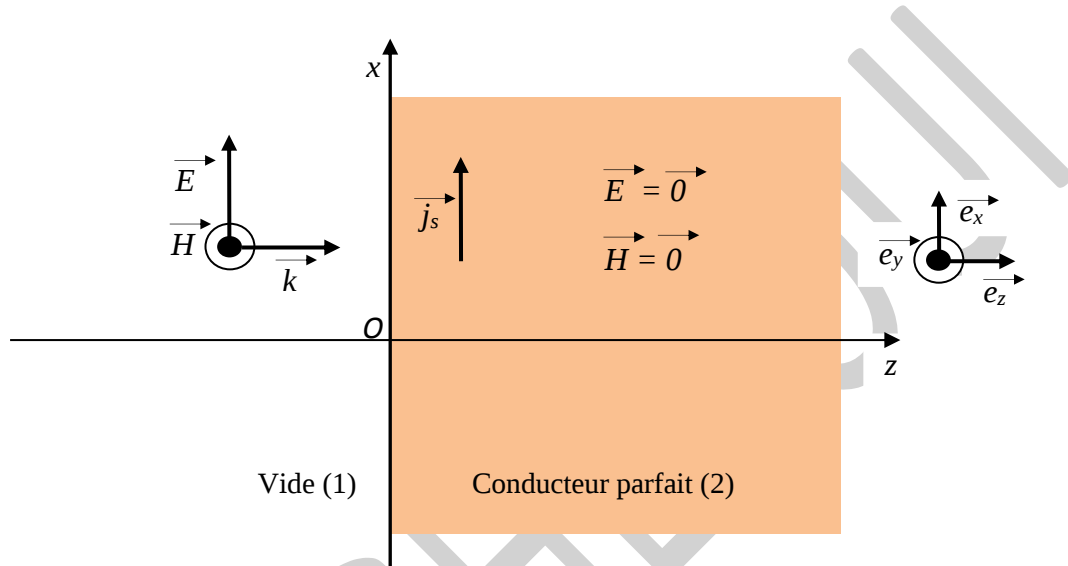


Figure 5

L'expression complexe du champ dans le vide est :

$$\begin{cases} \vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x \\ \vec{H}_i = \frac{E_{0i}}{\mu_0 c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y \end{cases}$$

On cherche l'onde réfléchie sous la forme :

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{i(\omega t + kz)}$$

La composante tangentielle du champ électrique au voisinage de l'interface est nulle, en particulier lorsque x, y, z et t sont nuls :

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{0} \Rightarrow E_{0i} \vec{e}_x + \vec{E}_{0r} = \vec{0}$$

Il y a changement de signe de la composante tangentielle du champ électrique.

Enfin nous trouvons :

$$\vec{E}_r = -\vec{E}_{0i} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x$$

Le champ magnétique associé à cette onde est :

$$\vec{H}_r = \frac{E_{0i}}{\mu_0 c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y$$

Le champ résultant dans le vide s'écrit alors :

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_{0i} e^{i\omega t} [e^{-ikz} - e^{ikz}] \vec{e}_x = -2iE_{0i} \sin(kz) e^{i\omega t} \vec{e}_x \\ \vec{H} = \vec{H}_i + \vec{H}_r = \frac{E_{0i}}{\mu_0 c} e^{i\omega t} [e^{-ikz} + e^{ikz}] \vec{e}_y = \frac{2E_{0i}}{\mu_0 c} \cos(kz) e^{i\omega t} \vec{e}_y \end{cases}$$

Nous constatons que :

- L'onde résultante est stationnaire, mais elle est plane.
- Les champs sont orthogonaux.
- Les champs sont en quadrature de phase.

• **Pression de radiation**

La discontinuité du champ magnétique, toujours en $z = 0$ donne :

$$\vec{H} = \frac{2E_{0i}}{\mu_0 c} e^{i\omega t} \vec{e}_y = -\vec{j}_s \times \vec{e}_n$$

Comme $\vec{e}_n = \vec{e}_z$, alors :

$$\vec{j}_s = \frac{2E_{0i}}{\mu_0 c} e^{i\omega t} \vec{e}_x$$

Le champ magnétique engendré au voisinage de l'interface par $\vec{j}_s$ n'est autre que le champ réfléchi $\frac{E_{0i}}{\mu_0 c} e^{i\omega t} \vec{e}_y$, du côté du vide, et par symétrie $-\frac{E_{0i}}{\mu_0 c} e^{i\omega t} \vec{e}_y$ du côté du conducteur.

Le champ créé par la distribution superficielle de courant se superpose à celui de l'onde incidente. Ainsi, à l'intérieur du conducteur la résultante du champ incident et du champ créé par $\vec{j}_s$ est bien nulle, alors que dans le vide elle donne $2\vec{H}_i$.

Une aire $d\vec{S}$ à la surface du conducteur subit donc de la part du champ incident $\vec{H}_i$ l'action de la force de **Laplace** :

$$d\vec{F} = \vec{j}_s dS \times \vec{B}_i$$

Soit, en fonction de $\vec{E}_{0i}$:

$$\langle d\vec{F} \rangle = \varepsilon_0 E_{0i}^2 dS \vec{e}_z$$

La force moyenne est exercée perpendiculairement au conducteur, de l'extérieur vers l'intérieur : celui-ci subit donc une pression de la part du champ électromagnétique. Sa valeur moyenne dans le temps est :

$$\langle \Pi \rangle = \varepsilon_0 E_{0i}^2$$

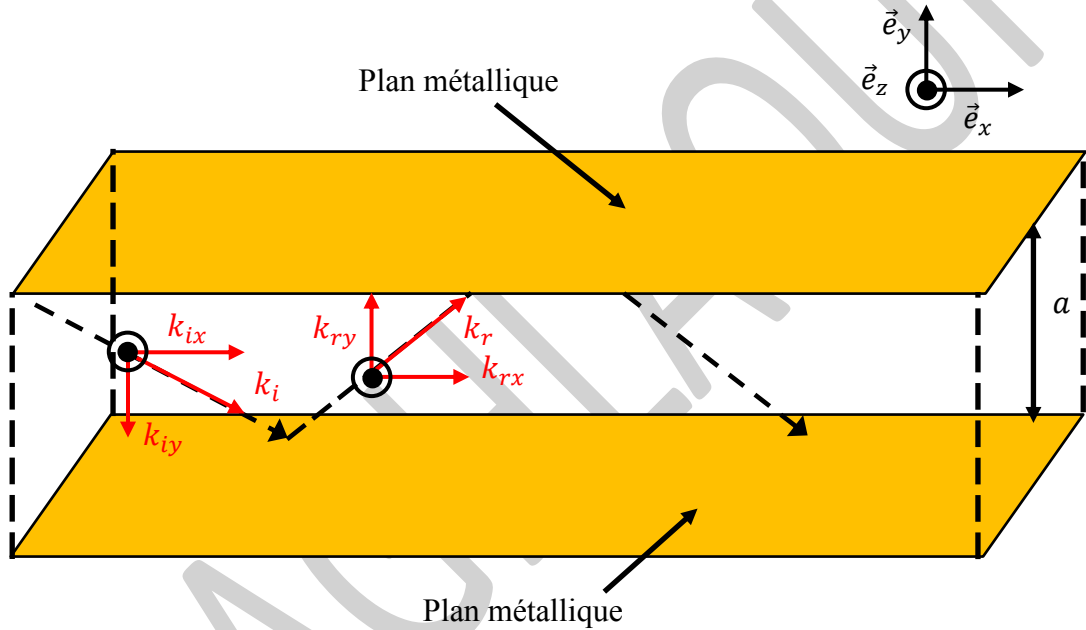
Propagation guidée entre deux plans métalliques parallèles- Application au guide d'onde infini à section rectangulaire

Résumé de cours

1. Détermination du champ électrique $\vec{E}$

Une onde électromagnétique de pulsation ω , peut sous certaines conditions, se propager entre deux plans conducteurs parallèles. Nous supposons ces plans parfaitement conducteurs et illimités dans la direction Ox . L'un des plans est pris pour le plan xOz et l'autre a pour équation $y = a$.

On distingue des modes de propagation pour lesquels le champ électrique est transverse (modes T.E) et ceux pour lesquels le champ magnétique est transverse (modes T.M). Nous nous limiterons à l'étude des modes pour lesquels le champ électrique est polarisé suivant Oz .



$\vec{E}$ est la superposition du champ incident et réfléchi :

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$$

- Onde incidente : $\vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} \vec{e}_z$.
- Onde réfléchie : $\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}$.

avec :

$$\vec{k}_i = \frac{\omega}{c} (\sin \theta_i \vec{e}_x - \cos \theta_i \vec{e}_y), \vec{k}_r = \frac{\omega}{c} (\sin \theta_i \vec{e}_x + \cos \theta_i \vec{e}_y),$$

Le champ électrique sur le plan inférieur est nul, en particulier à l'origine ($x = 0, y = 0, z = 0$), ce permet de trouver :

$$\vec{E}_{0r} = -E_{0i} \vec{e}_z$$

En tenant compte de l'expression précédente, nous avons :

$$\vec{E} = A \sin(\alpha y) e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_z$$

où $A = -2iE_{0i}$ et $\alpha = \frac{\omega}{c} \cos \theta_i$.

Nous savons aussi que

$$\vec{E}(x, y = a, t) = 0$$

cela nous permet de trouver que :

$$\alpha = n \frac{\pi}{a}$$

où n est un entier non nul.

2. Relation de dispersion

L'équation de propagation dans le vide

$$\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Nous trouvons donc :

$$k_n^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(n \frac{\pi}{a}\right)^2$$

Ainsi, seuls les modes de nombre d'onde vérifiant la relation précédente peuvent se propager entre les deux plans. Ces modes sont en nombre fini car k_n n'est réel, en prenant $n > 0$, que si :

Pour $n = 1$, le guide d'onde ne peut propager que des ondes de pulsation supérieure à la pulsation de coupure :

$$\omega_c = \frac{\pi c}{a}$$

Dans ce cas les vitesses de phase v_ϕ et de groupe v_g sont :

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}, v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$$

Dans le cas où $\omega < \omega_c$: alors k est imaginaire pur et l'on a, pour le premier mode :

$$k = \pm i \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2} = \pm \frac{i}{\delta}$$

Par conséquent :

$$\vec{E} = A \sin \frac{\pi y}{a} e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i\omega t} \vec{e}_z$$

L'onde peut pénétrer dans le guide mais ne s'y propage pas. C'est une onde évanescente.

3. Calcul du vecteur de Poynting et de la densité d'énergie

Dans un premier temps, nous commencerons par calculer le champ magnétique $\vec{B}$.

Nous constatons que les ondes qui peuvent se propager dans le guide ne sont pas planes. Il en découle que pour calculer $\vec{B}$ il faut intégrer la relation de Maxwell-Faraday.

A partir de la relation :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Nous trouvons que :

$$\vec{B} = \frac{A}{\omega} [i\alpha \cos \alpha y \vec{e}_x - k \sin \alpha y \vec{e}_y] e^{i(\omega t - kx)}$$

Nous constatons que $B_x \neq 0$: le champ magnétique n'est pas transversal.

Il est clair que $\vec{R} = \vec{E} \times \vec{H}$ n'a pas la direction de propagation du champ électromagnétique à l'instant t . Seule sa valeur moyenne dans le temps a la direction de $\vec{e}_x$. Nous avons en effet :

$$\langle \vec{R} \rangle_t = \frac{1}{2\mu_0} \frac{k}{\omega} A^2 \sin^2(\alpha y) \vec{e}_x$$

On en déduit la valeur moyenne dans l'espace et le temps :

$$\langle \vec{R} \rangle_{t,y} = \frac{A^2}{4\mu_0 c^2} \frac{k}{\omega} \vec{e}_x$$

La densité d'énergie moyenne dans le temps est de même :

$$\langle \omega_{EM} \rangle_t = \frac{1}{2} \left[\epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right]$$

$$\langle \omega_{EM} \rangle_t = \frac{1}{2} \left[\frac{A^2}{c^2} \sin^2(\alpha y) + \frac{A^2}{\omega^2} (\alpha^2 \cos^2(\alpha y) + k^2 \sin^2(\alpha y)) \right]$$

En calculant les valeurs moyennes dans le temps et l'espace intérieur au guide, nous obtenons :

$$\langle \omega_{EM} \rangle_{t,y} = \frac{A^2}{4\mu_0 c^2}$$

Nous obtenons donc :

$$\langle \vec{R} \rangle_{t,y} = v_g \langle \omega \rangle_{t,y} \vec{e}_x$$

L'énergie électromagnétique se propage donc dans le vide en moyenne avec la vitesse de groupe, dans la direction de propagation du champ électromagnétique.

Exercices et problèmes corrigés

Exercice 1

Une onde plane électromagnétique de pulsation ω se propageant dans le vide est donnée par le champ électrique :

$$\vec{E}_1 = A \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z \quad (1)$$

Où $k > 0$ et $A > 0$. La fréquence de l'onde $f = 6 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$.

1. Calculer numériquement la longueur d'onde λ .
Quel est la relation entre ω et k ?
2. a. Ecrire les équations de Maxwell dans le vide en absence de charges et de courants volumiques.
b. En déduire le champ magnétique $\vec{B}_1$ de l'onde.

3. a. Déterminer la densité d'énergie électromagnétique ω_{EM} et le vecteur de Poynting $\vec{\mathcal{R}}$.
b. Quelle est la relation entre ω_{EM} et $\vec{\mathcal{R}}$?
c. Calculer les valeurs moyennes temporelles $\langle \omega_{EM} \rangle$ et $\langle \vec{\mathcal{R}} \rangle$.
d. En quelle unité $\vec{\mathcal{R}}$ est-il mesuré ?

Application numérique : On mesure pour le module de $\langle \vec{\mathcal{R}} \rangle$ la valeur 53,2 (unité S.I. demandée ci-dessus). En déduire la valeur numérique de $\langle \omega_{EM} \rangle$ et l'amplitude A de l'onde (1).

4. En plus de l'onde (1), une deuxième onde de même amplitude, de même fréquence et de polarisation rectiligne suivant z , se propage dans le vide, mais dans une direction opposée à celle de l'onde (1).
 - a. Donner l'expression de cette onde ainsi que du champ magnétique qui lui ait associé.
 - b. Les deux ondes se superposent. Calculer le champ électrique et le champ magnétique de l'onde résultante.
 - c. Quelle est la nature de cette onde ?

Solution

1. La longueur d'onde est :

$$\lambda = \frac{c}{f} = 5 \mu m$$

A partir de l'équation de d'onde pour le champ électrique dans le vide, nous avons :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

2. a. Dans le vide, en absence de toute charge et de courant, les équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- b. Dans le cas d'une onde plane sinusoïdale et uniforme :

$$\vec{B}_1 = \frac{\vec{k}_1 \times \vec{E}_1}{\omega} = \frac{A}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$$

3. a. La densité d'énergie électromagnétique :

$$\omega_{EM} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) = \frac{A^2}{\mu_0 c^2} [\cos(\omega t + kx)]^2$$

Le vecteur de Poynting est :

$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{\vec{E}_1 \times \vec{B}_1}{\mu_0} = -\frac{A^2}{\mu_0 c} [\cos(\omega t + kx)]^2 \vec{e}_x$$

b . La relation entre le vecteur de Poynting et la densité d'énergie électromagnétique est :

$$\vec{\mathcal{R}} = -c \omega_{EM} \vec{e}_x$$

c . les valeurs moyennes sont :

$$\langle \omega_{EM} \rangle = \frac{A^2}{2\mu_0 c^2}, \langle \vec{\mathcal{R}} \rangle = -\frac{A^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_x$$

d . $\vec{\mathcal{R}}$ est mesuré en Wm^{-2} .

Application numérique : $\langle \omega_{EM} \rangle = 1.77 \cdot 10^{-7} Jm^{-3}$, $A = 200 Vm^{-1}$

4. a . L'expression du champ électrique $\vec{E}_2$ est :

$$\vec{E}_2 = A \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$$

On en déduit :

$$\vec{B}_2 = \frac{\vec{k}_2 \times \vec{E}_2}{\omega} = -\frac{A}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

b . La superposition des 2 ondes donne :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2A \cos(kx) \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -\frac{2A}{c} \sin(kx) \sin(\omega t) \vec{e}_y$$

c . La résultante est une onde stationnaire plane.

Exercice 2

1. Deux ondes planes de même fréquence f , polarisées rectilignement, se propagent dans le vide dans un référentiel $Oxyz$ de base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, les champs électriques de ces deux ondes sont, en notation complexe en un point $M(x,y,z)$ de l'espace, à l'instant t :

$$\vec{E}_1 = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y \text{ et } \vec{E}_2 = \alpha E_0 e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_y$$

E_0 et α sont des réels positifs, et $i^2 = -1$; on désignera par c la célérité de la lumière dans le vide.

- 1.1. Calculer les champs $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ associés à $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ respectivement.

- 1.2. Exprimer les ondes $\vec{E}$ et $\vec{B}$ de l'onde résultante, et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$\vec{E} = \mathcal{E}(x) e^{i\omega t} \vec{e}_y, \vec{B} = \mathcal{B}(x) e^{i\omega t} \vec{e}_z$$

- 1.3. Exprimer en fonction de E_0 , α , c , k et x , les amplitudes $|\mathcal{E}(x)|$ et $|\mathcal{B}(x)|$ des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ respectivement en un point $M(x,y,z)$.

On utilisera la transformation : $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$.

2. On appelle le taux d'onde stationnaire le rapport $\tau = |\mathcal{E}_{\max}|/|\mathcal{E}_{\min}|$ des amplitudes maximale et minimale du champ électrique.

- 2.1. Exprimer τ en fonction de α .

- 2.2. Déterminer les positions des plans d'ondes :

où l'amplitude est maximale.

où l'amplitude est minimale.

3. On définit l'impédance réduite (sans dimension) de l'onde électromagnétique résultante en M :

$$Z(x) = \frac{1}{c} \frac{\mathcal{E}(x)}{\mathcal{B}(x)}$$

où $\mathcal{E}(x)$ et $\mathcal{B}(x)$ sont les amplitudes complexes en $M(x,y,z)$ des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Exprimer $Z(0)$ dans le plan $x = 0$, en fonction de α .

Solution

- 1.

- 1.1. Dans le cas d'une onde plane :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$$

On en déduit que :

$$\vec{B}_1 = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_z$$

et :

$$\vec{B}_2 = -\alpha \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_z$$

- 1.2. $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_0 (e^{-ikx} + \alpha e^{ikx}) e^{i\omega t} \vec{e}_y$

$$\vec{B}(M, t) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

D'où : $\vec{B}(M, t) = \frac{E_0}{c} (e^{-ikx} - \alpha e^{ikx}) \vec{e}_z$

- 1.3. L'amplitude complexe du champ $\vec{E}(M, t)$ est, d'après 1.b, et compte tenu du fait que $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$.

$$\mathcal{E}(x) = E_0 (e^{-ikx} + \alpha e^{ikx}) = E_0 [(1 + \alpha) \cos(kx) + i(\alpha - 1) \sin(kx)]$$

L'amplitude du champ $\vec{E}$ est donc :

$$|\mathcal{E}(x)| = E_0 \sqrt{(1 + \alpha)^2 \cos^2(kx) + (\alpha - 1)^2 \sin^2(kx)}$$

Soit :

$$|\mathcal{E}(x)| = E_0 \sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha(\cos^2(kx) - \sin^2(kx))}$$

où :

$$|\mathcal{E}(x)| = E_0 \sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(2kx)}$$

L'amplitude complexe du champ

$$\mathcal{B}(x) = \frac{E_0}{c} (e^{-ikx} - \alpha e^{ikx}) = \frac{E_0}{c} [(1 - \alpha) \cos(kx) - i(\alpha + 1) \sin(kx)]$$

Un calcul analogue à celui mené précédemment permet de déduire :

$$|\mathcal{B}(x)| = \frac{E_0}{c} \sqrt{(1 - \alpha)^2 \cos^2(kx) + (\alpha + 1)^2 \sin^2(kx)}$$

$$|\mathcal{B}(x)| = \frac{E_0}{c} \sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha(\cos^2(kx) - \sin^2(kx))}$$

D'où :

$$|\mathcal{B}(x)| = \frac{E_0}{c} \sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(2kx)}$$

2.

2.1. D'après l'expression de l'amplitude du champ trouvée dans 1.c :

$$|\mathcal{E}_{max}| = E_0 \sqrt{1 + \alpha^2 + 2\alpha} = 1 + \alpha$$

$$|\mathcal{E}_{min}| = E_0 \sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha} = |1 - \alpha|$$

Le taux d'onde stationnaire, est donc :

$$\tau = \frac{|\mathcal{E}_{max}|}{|\mathcal{E}_{min}|} = \frac{1 + \alpha}{|1 - \alpha|}$$

2.2. L'amplitude de $\vec{E}$ est maximale si $\cos(2kx) = 1$, soit, avec n entier :

$$2kx = 2n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{k}$$

L'amplitude de $\vec{E}$ est minimale si $\cos(2kx) = -1$, soit, avec n entier :

$$2kx = (2n + 1)\pi \Rightarrow x = \frac{(2n + 1)\pi}{2k}$$

3. D'après 1.b, les amplitudes complexes des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le plan $x = 0$ sont :

$$\mathcal{E}(0) = E_0(1 + \alpha) \text{ et } \mathcal{B}(0) = \frac{E_0}{c}(1 - \alpha)$$

L'impédance réduite de l'onde est donc dans le plan $x = 0$:

$$Z(0) = \frac{(1 + \alpha)}{(1 - \alpha)}$$

Exercice 3

L'espace est rapporté, en coordonnées cartésiennes, à un repère orthonormé direct (Ox, Oy, Oz) de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On considère deux ondes planes progressives harmoniques polarisées rectilignement, de même pulsation ω et de vecteurs d'ondes respectifs :

$$\vec{k}_1 = k\vec{e}_1 = k\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_z\right) \quad (1)$$

$$\vec{k}_2 = k\vec{e}_2 = k\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x - \frac{1}{2}\vec{e}_z\right) \quad (2)$$

k est une constante réelle ($k > 0$) et où $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont des vecteurs unitaires.

Les champs magnétiques $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ des ondes décrites précédemment sont respectivement, en notation complexe :

$$\vec{B}_1(\vec{r}, t) = B_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r})} \vec{e}_y \quad (3)$$

$$\vec{B}_2(\vec{r}, t) = B_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r})} \vec{e}_y \quad (4)$$

Sachant que les deux ondes se propagent dans le vide.

1. Exprimer k en fonction de ω et c .
2. Déterminer en notation complexe le champ électrique $\vec{E}_1(\vec{r}, t)$ associé au champ magnétique $\vec{B}_1(\vec{r}, t)$.

On écrira la réponse sous forme de vecteur colonne $\begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \\ E_{1z} \end{pmatrix}$ écrit de la façon la plus simple possible en

fonction de x, z, t, c, B_0, ω .

Représenter sur une même figure les vecteurs $\vec{k}_1, \vec{E}_1(\vec{0}, 0)$ et $\vec{B}_1(\vec{0}, 0)$.

3. Même question (y compris la figure) que 2 pour le champ électrique $\vec{E}_2(\vec{r}, t)$ associé au champ magnétique $\vec{B}_2(\vec{r}, t)$.
4. Déterminer en notation complexe les champs électriques $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ et magnétique $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$.

On écrira les réponses sous forme de vecteurs colonnes du type $Ae^{j(\omega t - \alpha x)} \begin{pmatrix} f_x(z) \\ f_y(z) \\ f_z(z) \end{pmatrix}$.

5. Exprimer en notations réelles les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\mathcal{R}}$ ainsi que sa valeur moyenne temporelle et spatiale $\langle \vec{\mathcal{R}} \rangle_{t,z}$ (Valeur moyenne suivant t et z).

Application Numérique : On donne $\langle \|\vec{\mathcal{R}}\| \rangle_{t,z} = 13.3 \text{ Wm}^{-2}$.

En déduire la valeur numérique de B_0 .

Solution

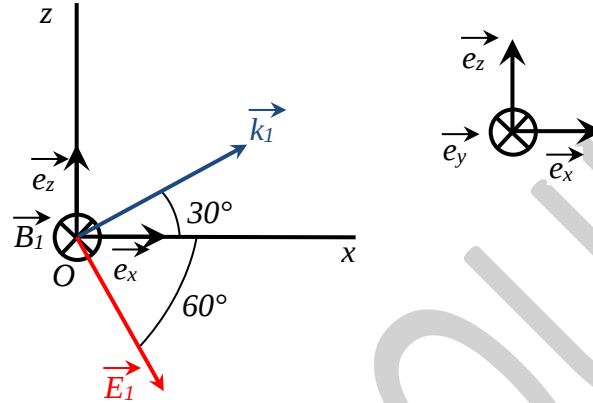
- 1.

$$k = \frac{\omega}{c}$$

2. Dans le cas d'une onde plane harmonique :

$$\vec{B}_1 = \frac{\vec{k}_1 \times \vec{E}_1}{\omega} \Rightarrow \vec{E}_1 = c\vec{B}_1 \times \vec{e}_1$$

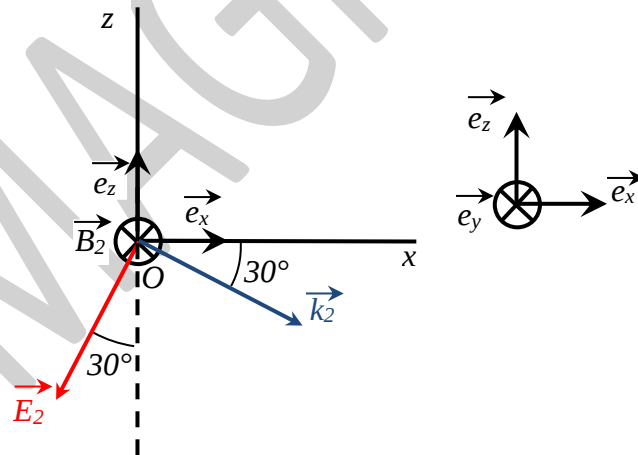
$$\vec{E}_1 = cB_0 e^{j[\omega t - \frac{k}{2}(\sqrt{3}x+z)]} \left[\vec{e}_y \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_x + \frac{1}{2} \vec{e}_z \right) \right] = cB_0 e^{j[\omega t - \frac{k}{2}(\sqrt{3}x+z)]} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$



3. En utilisant la même démarche on trouve :

$$\vec{B}_2 = \frac{\vec{k}_2 \times \vec{E}_2}{\omega} \Rightarrow \vec{E}_2 = c\vec{B}_2 \times \vec{e}_2$$

$$\vec{E}_2 = cB_0 e^{j[\omega t - \frac{k}{2}(\sqrt{3}x-z)]} \left[\vec{e}_y \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_x - \frac{1}{2} \vec{e}_z \right) \right] = cB_0 e^{j[\omega t - \frac{k}{2}(\sqrt{3}x-z)]} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$



4. Calcul de $\vec{E}$ et $\vec{B}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -2cB_0 e^{j\left(\omega t - k\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)} \begin{pmatrix} j\frac{1}{2} \sin\left(\frac{k}{2}z\right) \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{k}{2}z\right) \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 2B_0 e^{j\left(\omega t - k\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\left(\frac{k}{2}z\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. En notation réelle :

$$\vec{E} = 2cB_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin\left(\frac{k}{2}z\right) \sin\left(\omega t - k\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{k}{2}z\right) \cos\left(\omega t - k\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 2B_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\left(\frac{k}{2}z\right) \cos\left(\omega t - k\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{4cB_0^2}{\mu_0} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cos^2\left(\frac{k}{2}z\right) \cos^2\left(\omega t - k\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ 0 \\ \frac{1}{2} \sin\left(\frac{k}{2}z\right) \cos\left(\frac{k}{2}z\right) \sin\left(\omega t - k\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cos\left(\omega t - k\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \end{bmatrix}$$

$$\langle \vec{\mathcal{R}} \rangle_{t,z} = \frac{cB_0^2}{\mu_0} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Application numérique :

$$B_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0 \langle \|\vec{\mathcal{R}}\| \rangle_{t,z}}{\sqrt{3}c}} = 2.54 \cdot 10^{-7} \text{ Tesla}$$

Problème 1

Valeurs numériques des constantes physiques :

- Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$.
- Perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$.
- Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$.
- Charge électrique de l'électron : $-e$ avec $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Partie A

Soit $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la base orthonormée d'un référentiel galiléen Oxyz. On considère le champ électromagnétique statique (dans ce référentiel) donné au point $\vec{r}(x, y, z)$ par :

$$\vec{B}(\vec{r}) = (-\alpha y, \alpha x, 0) \quad \text{et} \quad \vec{E}(\vec{r}) = (0, 0, 0) \quad (1)$$

où $\alpha = 0.1 \text{ Tm}^{-1}$ est une constante.

1. Ecrire les équations de Maxwell.
2. Montrer que le champ (1) est une solution de ces équations.
Déterminer la densité de courant $\vec{j}(\vec{r})$.
3. Calculer numériquement $\vec{j}(\vec{r})$?

Partie B

Une onde plane (onde incidente) électromagnétique de pulsation ω se propageant dans le vide est donnée par le champ électrique :

$$\vec{E}_i = A \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z \quad (2)$$

où $k > 0$ et $A > 0$. La fréquence de l'onde $f = 5 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$.

1. Calculer numériquement la longueur d'onde λ .
2. a. Ecrire les équations de Maxwell dans le vide en absence de charges et de courants volumiques.
b. En déduire le champ magnétique $\vec{B}_i$ de l'onde.
3. a. Déterminer la densité d'énergie électromagnétique ω_{EM} et le vecteur de Poynting $\vec{\mathcal{R}}$.
b. Quelle est la relation entre ω_{EM} et $\vec{\mathcal{R}}$?
c. Calculer les valeurs moyennes temporelles $\langle \omega_{EM} \rangle$ et $\langle \vec{\mathcal{R}} \rangle$.
d. En quelle unité $\vec{\mathcal{R}}$ est-il mesuré ?

Application numérique : On mesure pour le module de $\langle \vec{\mathcal{R}} \rangle$ la valeur 13,3 (unité S.I. demandée ci-dessus). En déduire la valeur numérique de $\langle \omega_{EM} \rangle$ et l'amplitude A de l'onde (2).

4. L'onde incidente (2) se propage dans le demi espace (vide) $x > 0$. Le demi-espace $x \leq 0$ est formé d'un métal parfaitement conducteur. Il apparaît une onde réfléchie qui se superpose à l'onde incidente et dont le champ électrique est de la forme.

$$\vec{E}_r = -A \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z \quad (3)$$

Déterminer le champ magnétique $\vec{B}_r$ de l'onde réfléchie.

5. Le conducteur étant supposé parfait, les champs électriques et magnétiques sont nuls dans le métal. Justifier cette affirmation.
a. Ecrire les relations de passage que vérifient les champs électrique et magnétique à la traversée du plan $x = 0$.

On écrira ces relations en fonction de $\vec{E}_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \vec{E}(x, t)$, $\vec{B}_1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \vec{B}(x, t)$, de la densité surfacique de charge $\sigma(t)$ et du courant surfacique $\vec{j}_s(t)$.

- b. En déduire la densité surfacique de charge $\sigma(t)$ et la densité surfacique de courant $\vec{j}_s(t)$.
Calculer numériquement l'amplitude de $\vec{j}_s(t)$.

Solution

Partie A

1. Les équations de Maxwell sont :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

2. Le rotationnel du champ magnétique $\vec{B}$ est :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 2\alpha \vec{e}_z$$

La divergence du champ électrique est $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$.

On en déduit que le champ (1) est une solution des équations de Maxwell avec :

$$\rho(\vec{r}) = 0$$

et

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{2\alpha}{\mu_0} \vec{e}_z$$

3. le courant volumique est uniforme et vaut numériquement : $\vec{j} = 1.6 \cdot 10^5 \text{ Am}^{-2}$.

Partie B

1. La longueur d'onde : $\lambda = \frac{c}{f} = 6 \mu\text{m}$.

2. a. Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- b. $\vec{E}_i = A \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z, \vec{k}_i = -k \vec{e}_x$

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \times \vec{E}_i}{\omega} = \frac{A}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y$$

3. a.

$$\omega_{EM} = \frac{\epsilon_0 E_i^2}{2} + \frac{B_i^2}{2\mu_0} = \frac{A^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t + kx)$$

$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{\vec{E}_i \times \vec{B}_i}{\mu_0} = -\frac{A^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t + kx) \vec{e}_x$$

- b. la relation entre ω_{EM} et $\vec{\mathcal{R}}$ est : $\vec{\mathcal{R}} = -c \omega_{EM} \vec{e}_x$.

- c. les valeurs moyennes temporelles sont :

$$\langle \omega_{EM} \rangle = \frac{A^2}{2\mu_0 c^2}$$

et :

$$\vec{\mathcal{R}} = -\frac{A^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_x$$

d . $\vec{\mathcal{R}}$ est mesuré en Wm^{-2}

Application numérique :

$$\langle \omega_{EM} \rangle = \frac{\langle \|\vec{\mathcal{R}}\| \rangle}{c} = 4.42 \cdot 10^{-8} Jm^{-3}$$

$$A = \sqrt{2\mu_0 c^2 \langle \omega_{EM} \rangle} = 100 Vm^{-1}$$

4. Le champ magnétique correspondant est :

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \times \vec{E}_r}{\omega} = \frac{A}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

avec : $\vec{k}_r = k\vec{e}_x$

5. La loi d'Ohm s'écrit $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ où $\vec{j}$ est la densité de courant et σ la conductivité. Un conducteur parfait est caractérisé par $\sigma = \infty$. On doit avoir $\vec{E} = \vec{0}$ sinon la puissance par unité de volume dissipée par effet joule, $dP/d\tau = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2$, serait infinie, ce qui est absurde. Les équations de Maxwell restent valables dans un métal. L'équation $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B} = \vec{0}$ et $\vec{B} = \vec{0}$.

a. Les relations de passage en $x = 0$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \vec{D}_{2N} - \vec{D}_{1N} &= \sigma \vec{e}_N \\ \vec{B}_{2N} - \vec{B}_{1N} &= \vec{0} \\ \vec{E}_{2T} - \vec{E}_{1T} &= \vec{0} \\ \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_{2T} - \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_{1T} &= \vec{j}_s \times \vec{e}_N \end{aligned}$$

avec :

$$\vec{e}_N = -\vec{e}_x$$

et où :

N : pour indiquer la composante normale.

T : pour indiquer la composante tangentielle.

1, 2 : pour indiquer le milieu 1 (vide) et le milieu 2 (métal) respectivement.

b. la composante normale du champ électrique est nulle $\vec{E}_{1N} = \vec{E}_{1x} = \vec{0}$ et donc $\sigma = 0$.

$$\vec{B}_{1y} = \vec{B}_{iy} + \vec{B}_{ry} = \frac{2A}{c} \cos(\omega t) \vec{e}_y$$

d'où :

$$\vec{j}_s = \frac{2A}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

L'amplitude de $\vec{j}_s$ est :

$$\frac{2A}{\mu_0 c} = 0.53 Am^{-1}$$

Exercice 4

On donne la représentation complexe du champ électrique d'une onde électromagnétique dans le vide, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E} = \left(0, E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{i(\omega t - k_0 z)}, \alpha E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{i(\omega t - k_0 z)} \right)$$

où α est une constante complexe et k_0 une constante réelle positive.

1. Déterminer α et k_0 en fonction de ω , a , c .
2. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$.
3. Cette onde est-elle plane, harmonique, progressive, transverse électrique, transverse magnétique ?
4. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\mathcal{R}}$ associé à cette onde ainsi que sa valeur moyenne dans le temps $\langle \vec{\mathcal{R}} \rangle_t$ (Valeur moyenne suivant t).

Solution

1. Le champ électrique vérifie l'équation de Maxwell-Gauss dans le vide : $\text{div}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ et l'équation de d'Alembert dans le vide. Nous en déduisons :

$$\frac{\pi}{a} + i\alpha k_0 = 0$$

et :

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

d'où :

$$k_0 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}, \alpha = \frac{i\pi}{ak_0}$$

2. L'onde n'est pas plane, le calcul du champ magnétique $\vec{B}$ se fait par l'intermédiaire de l'équation de Maxwell-Faraday. Tout calcul fait nous obtenons :

$$\vec{B} = -\frac{\omega}{k_0 c^2} E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{i(\omega t - k_0 z)} \vec{e}_x$$

3. Cette onde n'est pas plane, car l'ensemble des points équiphasés n'appartiennent pas à un plan. Cette onde est harmonique de pulsation ω .

Cette onde est progressive suivant z , car l'exposant de l'exponentiel est fonction de $\omega t - k_0 z$.

Cette onde est transverse magnétique car $\vec{B} \cdot \vec{k}_0 = 0$ et $\vec{E} \cdot \vec{k}_0 \neq 0$.

4. En utilisant la définition du vecteur de Poynting :

$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{R}} &= \frac{\pi\omega}{ak_0^2 c^2 \mu_0} E_0^2 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - k_0 z) \sin(\omega t - k_0 z) \vec{e}_y \\ &\quad + \frac{\omega}{k_0 c^2 \mu_0} E_0^2 \left[\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \right]^2 [\cos(\omega t - k_0 z)]^2 \vec{e}_z \end{aligned}$$

Sa valeur moyenne est :

$$\langle \vec{\mathcal{R}} \rangle_t = \frac{\omega}{k_0 c^2 \mu_0} E_0^2 \left[\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \right]^2 \vec{e}_z$$

L'énergie et l'onde se propage dans le même sens.

Exercice 5

Une onde électromagnétique plane, sinusoïdale, dont le champ électrique est polarisé rectilignement suivant Oy , se propage suivant Ox dans un milieu linéaire, homogène et isotrope, neutre de permittivité $\varepsilon = 2.56 \cdot \varepsilon_0$, de perméabilité $\mu = \mu_0$ et de conductivité nulle. On donne : $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.

1. Quelle est la relation de dispersion $\omega = f(k)$ de ce milieu diélectrique.
2. Pour une onde de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}$, calculer le champ magnétique $\vec{B}$ associé à $\vec{E}$.
3. Calculer, pour ce diélectrique, les grandeurs suivantes :
 - La vitesse v , l'impédance caractéristique Z et son rapport η à celle du vide Z_0 .
 - Le module du vecteur d'onde $\vec{k}$.
 - La longueur d'onde λ .
 - La densité d'énergie moyenne.

Pour une onde d'amplitude $E_0 = 100 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$ et dans les cas suivants :

micro-onde : $f_1 = 1.25 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$.

Onde lumineuse : $f_2 = 3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.

Solution

1. L'équation de propagation se déduit de celle du vide en remplaçant ε_0 par ε :

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Dans le cas d'une onde plane sinusoïdale :

$$\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$$

d'où la relation de dispersion suivante :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{\varepsilon \mu_0}$$

2. L'onde étant plane, on a :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} = \frac{kE}{\omega} \vec{e}_x \times \vec{e}_y \\ \vec{B} &= \frac{k}{\omega} E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_z \end{aligned}$$

3. La vitesse de propagation de l'onde :

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0}}$$

soit :

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 1.88 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Impédance caractéristique :

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} = 235.5 \Omega$$

Rapport à l'impédance du vide :

$$\eta = \frac{Z}{Z_0} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = 0.625$$

Densité d'énergie :

$$\omega_{EM} = 0.113 \text{ J m}^{-3}$$

Micro-onde :

$$f_1 = 1.5 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$$

$$k_1 = \frac{2\pi f_1}{v} = 501 \text{ m}^{-1} \quad \text{et} \quad \lambda_1 = \frac{v}{f_1} = 1.25 \text{ cm}$$

Onde lumineuse :

$$f_2 = 4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$k_2 = \frac{2\pi f_2}{v} = 1.34 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{v}{f_2} = 0.47 \text{ }\mu\text{m}$$

Exercice 6

La conductivité γ d'un métal reste pratiquement constante et égale à sa valeur γ_0 en courant continu, tant que la fréquence demeure inférieure à 10^{13} Hz environ. Il apparaît ensuite très rapidement un déphasage de $\pi/2$ entre le courant et le champ électrique, et γ devient inversement proportionnel à la pulsation ω , soit :

$$\gamma = \frac{i\gamma_0}{\omega\tau}$$

avec : $\tau = 10^{-14} \text{ s}$.

1. Dans quel domaine de fréquence, peut-on négliger le courant de déplacement de Maxwell devant le courant de conduction, dans le cas du cuivre où $\gamma_0 = 59.6 \cdot 10^6 \text{ }\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\epsilon = \epsilon_0$.
2. On étudie la propagation d'une onde électromagnétique, sinusoïdale de pulsation ω , dans un conducteur de conductivité γ , de permittivité ϵ_0 et de perméabilité μ_0 (caractéristiques du vide). On néglige le courant de déplacement devant le courant de conduction.

On se restreint au cas où les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne dépendent que du temps et de la coordonnée z , soit :

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}}(z)e^{i\omega t}$$

$$\vec{B} = \vec{\mathcal{B}}(z)e^{i\omega t}$$

$\vec{\mathcal{E}}(z)$ et $\vec{\mathcal{B}}(z)$ ayant à priori des composantes complexes.

- a. Ecrire les équations de Maxwell en représentation complexe.
- b. En déduire les équations différentielles découplées, vérifiées respectivement par $\vec{\mathcal{E}}(z)$ et $\vec{\mathcal{B}}(z)$. On posera $\delta = \sqrt{2/\mu_0 \omega \gamma}$.
- c. Quelle est la solution de l'équation vérifiée par $\vec{\mathcal{B}}(z)$, sachant que le conducteur n'occupe que le demi espace limité par le plan $z = 0$, du côté positif de Oz ? On désignera par $\vec{\mathcal{B}}(0)$ la valeur de $\vec{\mathcal{B}}$ en $z = 0$.
- d. Nous supposons que $\vec{\mathcal{B}}$ est polarisé suivant la direction Oy :

$$\vec{\mathcal{B}} = \mathcal{B}(z)e^{i\omega t}\vec{e}_y$$

Exprimer $\vec{B}$ en fonction de $\mathcal{B}(0)$, z et δ .

Donner les expressions de $\vec{\mathcal{E}}$ et de la densité volumique de courant $\vec{j}$ en fonction de $\mathcal{B}(0)$, z , δ et γ .

Application numérique : On donne :

$$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}, \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}, \gamma = 59.6 \cdot 10^6 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Calculer δ pour les fréquences $f_1 = 10^{10} \text{ Hz}$ et $f_2 = 50 \text{ Hz}$.

Solution

1. La densité de courant de déplacement s'exprime par :

$$\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Dans le cas d'un champ sinusoïdale :

$$\vec{j}_D = i\omega\varepsilon_0\vec{E}$$

La densité de courant de conduction est :

$$\vec{j}_C = \gamma\vec{E}$$

Les modules sont :

$$\|\vec{j}_D\| = \omega\varepsilon_0\|\vec{E}\| \text{ et } \|\vec{j}_C\| = \gamma\|\vec{E}\|$$

Pour pouvoir négliger $\vec{j}_D$ devant $\vec{j}_C$, il faut donc :

$$\omega\varepsilon_0 \ll \gamma \quad \text{soit} \quad f \ll \frac{\gamma_0}{2\pi\varepsilon_0} \cong 10^{18} \text{ Hz}$$

Cette condition est toujours vérifiée lorsque $\gamma = \gamma_0$.

Si $f \geq 10^{13} \text{ Hz}$, la conductivité devient :

$$\gamma = \frac{i\gamma_0}{\omega\tau}$$

La condition devient alors :

$$f \ll \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0}$$

ou encore :

$$f \ll \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0\tau}} \cong 4 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

Cette condition est généralement vérifiée pour les champs usuels.

2. Le conducteur étant neutre à l'échelle macroscopique, nous avons $\rho = 0$.

a. Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$[\text{div} \vec{\mathcal{E}}(z)e^{i\omega t}] = 0 \quad (1)$$

$$[\text{div} \vec{\mathcal{B}}(z)e^{i\omega t}] = 0 \quad (2)$$

$$[\vec{\text{rot}} \vec{\mathcal{E}}(z)]e^{i\omega t} = -i\omega [\vec{\mathcal{B}}(z)]e^{i\omega t} \quad (3)$$

$$[\vec{\text{rot}} \vec{\mathcal{B}}(z)]e^{i\omega t} = \mu_0 \gamma [\vec{\mathcal{E}}(z)]e^{i\omega t} \quad (4)$$

b. Calculons les dérivées secondes :

$$\vec{\text{rot}}[\vec{\text{rot}} \vec{\mathcal{E}}] = \vec{\text{grad}}[\text{div} \vec{\mathcal{E}}] - \Delta \vec{\mathcal{E}} = -\Delta \vec{\mathcal{E}} \quad (5)$$

de plus :

$$\vec{\text{rot}}[\vec{\text{rot}} \vec{\mathcal{E}}] = -i\omega \vec{\text{rot}}[\vec{\mathcal{B}}] = -i\omega \mu_0 \gamma \vec{\mathcal{E}} \quad (6)$$

Des équations (5) et (6) nous obtenons :

$$\Delta \vec{\mathcal{E}} - i\omega \mu_0 \gamma \vec{\mathcal{E}} = \vec{0}$$

qui s'exprime :

$$\frac{d^2 \vec{\mathcal{E}}}{dz^2} = i\omega \mu_0 \gamma \vec{\mathcal{E}}$$

ou encore :

$$\frac{d^2 \vec{\mathcal{E}}}{dz^2} = \frac{2i}{\delta^2} \vec{\mathcal{E}}$$

de la même manière, nous obtenons pour le champ magnétique $\vec{\mathcal{B}}$:

$$\frac{d^2 \vec{\mathcal{B}}}{dz^2} = \frac{2i}{\delta^2} \vec{\mathcal{B}}$$

c. L'équation caractéristique de ces équations différentielles est :

$$r^2 = \frac{2i}{\delta^2} = \frac{2}{\delta^2} e^{i\frac{\pi}{2}}$$

dont les racines sont :

$$r_1 = \frac{1+i}{\delta} \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{1+i}{\delta}$$

La solution acceptable pour $\vec{\mathcal{B}}$ est :

$$\vec{\mathcal{B}}(z) = \vec{\mathcal{B}}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-i\frac{z}{\delta}}$$

L'amplitude réelle ne peut croître lorsqu'on pénètre dans le conducteur.

d. Si $\vec{\mathcal{B}}$ est porté par Oy , on peut écrire :

$$\vec{\mathcal{B}} = B(0) e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \vec{e}_y$$

L'équation (4) permet alors de déterminer le champ $\vec{\mathcal{E}}$:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{\mu_0 \gamma} \vec{\text{rot}}[B \vec{e}_y] = -\frac{1}{\mu_0 \gamma} \frac{dB}{dz} \vec{e}_x$$

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{1+i}{\mu_0 \gamma \delta} B(0) e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \vec{e}_x$$

On en déduit :

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\sqrt{2}}{\mu_0 \gamma \delta} B(0) e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4})} \vec{e}_x$$

D'où la densité volumique de courant :

$$\vec{j}_c = \gamma \vec{E} = \frac{\sqrt{2}}{\mu_0 \delta} B(0) e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta} + \frac{\pi}{4})} \vec{e}_x$$

Application numérique :

Pour $f_1 = 10^{10} \text{ Hz}$, on trouve :

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega_1 \gamma}} = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \pi f_1 \gamma}}$$

$$\delta_1 = 0.66 \mu\text{m}$$

Pour $f_2 = 50 \text{ Hz}$:

$$\delta_2 = 9.3 \text{ mm}$$

Exercice 7

Un conducteur parfait occupe toute la partie de l'espace correspondant à $z > 0$. Sa surface libre représentée par le plan xOy est au contact de l'air assimilée au vide (Figure 1). Une onde incidente plane, progressive, monochromatique de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}_i = k\vec{e}_z$. Est caractérisée par son champ électrique polarisé rectilignement suivant xOy :

$$\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x$$

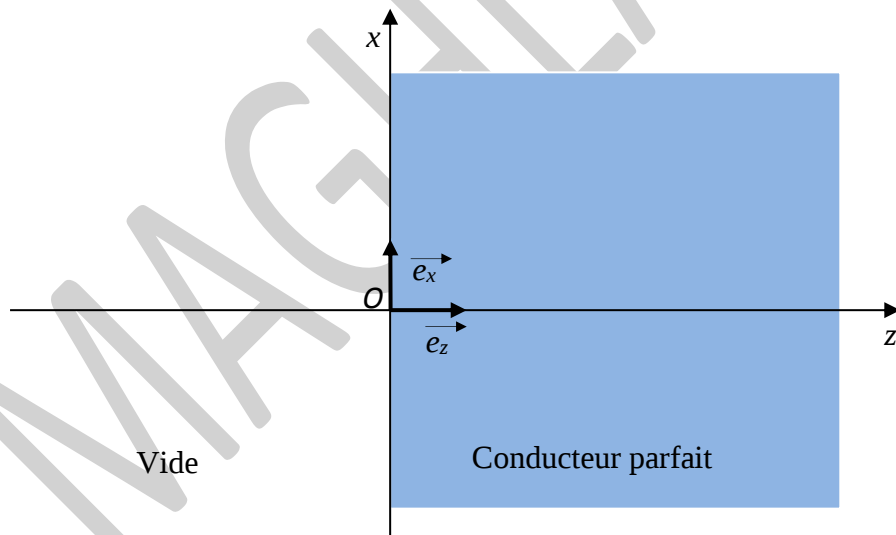


Figure 1

1. Dans l'hypothèse du conducteur parfait, que valent le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ à l'intérieur du conducteur.
2. Déterminer les grandeurs suivantes :
 - a. Le champ électrique réfléchi $\vec{E}_r$, en fonction de E_0 , ω et k .
 - b. Les champs magnétiques incident $\vec{B}_i$ et réfléchi $\vec{B}_r$.
 - c. Les densités superficielles de charge σ et de courant $\vec{J}_s$, à partir des relations de continuités.
3. Onde stationnaire résultante.
 - a. Exprimer les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ de l'onde résultante.
 - b. Représenter sur un même schéma $E(z)$ à deux instants différents.

4. Onde entre deux conducteurs.

On place un conducteur identique au précédent à $z = -L$. Montrer que :

- Si l'on impose L , seules les fréquences f_n que l'on déterminera peuvent convenir.
- Si l'on impose la longueur d'onde λ , seules des longueurs L_n que l'on déterminera, peuvent convenir.

Solution

1. Dans l'hypothèse du conducteur parfait, à l'intérieur du conducteur, on a :

$$\vec{E} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{0}$$

2. a. L'onde réfléchi a la même pulsation ω , le vecteur d'onde $\vec{k}_r = -\vec{k}_i = -k\vec{e}_z$ (incidence normale) et le champ réfléchi $\vec{E}_r$ est déphasé de π par rapport à $\vec{E}_i$.

On a donc : $\vec{E}_r = -E_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x$.

- b. Expressions de $\vec{B}_i$ et $\vec{B}_r$:

Dans le cas d'une onde plane sinusoïdale et progressive, nous avons

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \times \vec{E}_i}{\omega} \Rightarrow \vec{B}_i = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y$$

$$\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \times \vec{E}_r}{\omega} \Rightarrow \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y$$

- c. Calcul de σ et $\vec{J}_s$

$\vec{E}$ étant tangentielle, $\vec{D}_n$ est nul et ne subit donc pas de discontinuité. Par conséquent $\sigma = 0$.

En revanche, le champ magnétique résultant $\vec{B}_r$ étant tangentiel, il subit une discontinuité. Par conséquent, il apparaît en $z = 0$ une densité superficielle de courant $\vec{J}_s$ donnée par :

$$\mu_0(\vec{J}_s \times \vec{e}_z) = -\frac{2E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{e}_y$$

d'où :

$$\vec{J}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} e^{i\omega t} \vec{e}_x$$

3. Onde stationnaire résultante

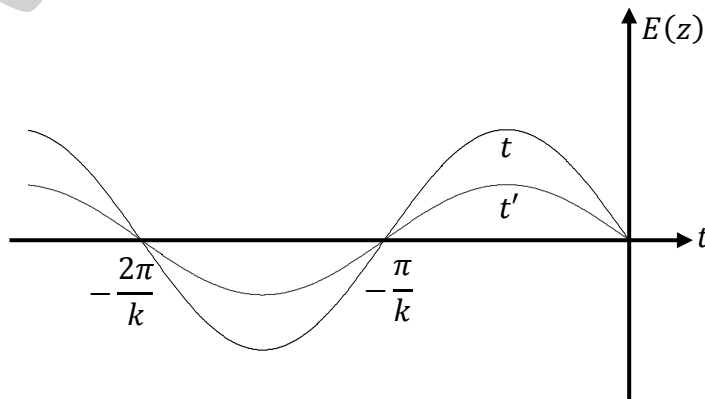
- a. Cette onde résulte de la superposition de l'onde incidente et réfléchi :

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kz) \vec{e}_x$$

$$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = 2E_0 \cos(\omega t) \cos(kz) \vec{e}_y$$

- b. Représentation

L'onde résultante est stationnaire à la différence des ondes incidente et réfléchi, qui se propagent.



4. Onde entre deux conducteurs

Avec le deuxième conducteur placé en $z = -L$, il faut que $\vec{E}(-L, t) = \vec{0}$ quel que soit t .

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi \quad (n \text{ entier} > 0)$$

a . Si L est imposé, alors $k_n = n\pi/L$

$$\text{Soit : } f_n = nc/2L$$

b . Si λ est imposée. Les longueurs L qui conviennent sont $L_n = n\lambda/2$.

Ces valeurs discrètes de f ou L correspondent aux modes propres de la cavité constituée par l'espace limité les deux conducteurs.

Exercice 8

On considère un tuyau à section rectangulaire (guide d'ondes) dont les parois sont parfaitement conductrices (Figure 2).

À l'intérieur de ce guide d'ondes, le champ électrique $\Delta\vec{E}$ satisfait à l'équation :

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On s'intéresse aux ondes, de pulsation ω , se propageant dans la direction $x'x$ et telles que $E_x = 0$ (ondes transversales électriques). De plus, nous nous limiterons uniquement à l'étude de la composante E_z (on pose $E_y = 0$).

Les conditions aux limites imposent que $\vec{E}$, sur une paroi conductrice, est soit nul soit normal à cette paroi.

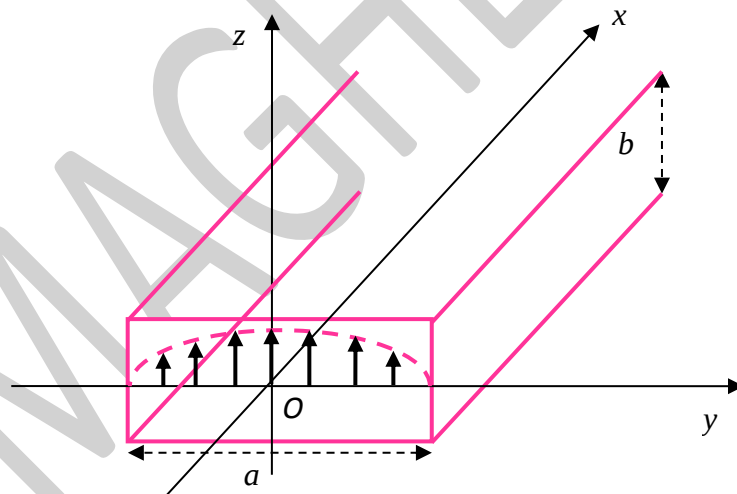


Figure 2

1. Montrer que le vecteur $\vec{E}$ de composantes :

$$E_x = 0, \quad E_y = 0$$

$$\text{et } E_z = E_0 \cos(n\pi y/a) \cos(\omega t - k'_n x), \quad \text{avec } n \text{ entier impair}$$

$$\text{Ou } E_z = E_0 \sin(n\pi y/a) \cos(\omega t - k'_n x), \quad \text{avec } n \text{ pair}$$

satisfait à ces conditions aux limites.

On parlera, alors, de *mode transversal-électrique* TE_{n0} . Dans ce qui suit, on va s'intéresser au mode TE_{10} .

2. En utilisant les équations précédentes, déterminer k'_1 en fonction de ω , c et a . Montrer que seules les ondes de pulsation ω supérieure à une certaine valeur ω_{c1} peuvent se propager selon le mode TE_{10} . Déterminer ω_{c1} (pulsation de coupure du mode considéré).

Calculer la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe v_g . Quelle relation y a-t-il entre v_ϕ , v_g et c ?
Tracer, sur un même graphique, les courbes représentant les variations de v_ϕ et de v_g en fonction de ω .

3. Comment faut-il choisir la dimension a du guide afin que, ω étant fixée, seul le mode TE_{10} se propage à l'exclusion de tous les autres modes TE_{n0} avec $n \geq 2$?

Solution

1. Sur une paroi conductrice, $\vec{E}$ doit être soit nul soit perpendiculaire à la paroi. $\vec{E}$ étant vertical, il est perpendiculaire aux parois horizontales. Les conditions aux limites imposent donc uniquement que $E_z = 0$ pour $y = \pm a/2$. Vérifions que les formes proposées satisfont bien à ces conditions.
pour n impair $E_z \propto \cos(n\pi y/a) = 0$ si $y = \pm a/2$ car $\cos(\pm n\pi/2) = 0$
pour n pair $E_z \propto \sin(n\pi y/a) = 0$ si $y = \pm a/2$ car $\sin(\pm n\pi/2) = 0$
2. Pour $n = 1$, on a :

$$E_z = E_0 \cos(\pi y/a) \cos(\omega t - k'_1 x)$$

D'autre part, l'équation de propagation s'écrit :

$$\Delta E_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

On reporte l'expression de E_z dans cette dernière équation et on obtient :

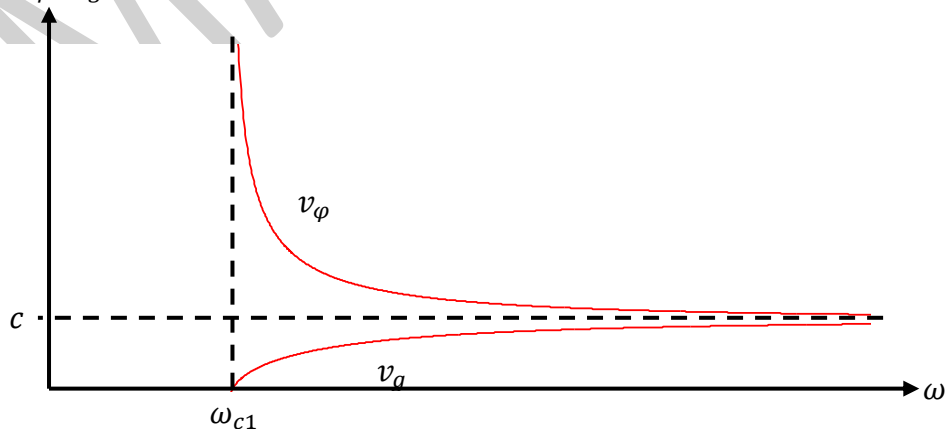
$$(k'_1)^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

Pour qu'il y ait propagation, on doit avoir k'_1 réel donc :

$$\omega \geq \frac{\pi c}{a} = \omega_{c1}$$

$$v_\phi = \frac{\omega}{k'_1} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{c1}^2}{\omega^2}}}, v_g = \frac{d\omega}{dk'_1} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_{c1}^2}{\omega^2}}$$

On remarque que $v_\phi \cdot v_g = c^2$.



3. Pour le mode TE_{n0} , à l'aide de l'équation de dispersion établie dans la réponse à la question précédente

$$(k'_n)^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

avec la pulsation de coupure $\omega_{cn} = n\pi c/a$.

Pour que le mode TE_{10} se propage, il faut que $\omega > \omega_{c1} = \pi c/a$.

Pour que les modes TE_{n0} avec $n \geq 2$, ne se propagent pas, il faut que $\omega < \omega_{cn} = n\pi c/a$, $\forall n \geq 2$.

On doit donc avoir

$$\frac{\pi c}{a} < \omega < \frac{2\pi c}{a}$$

D'où :

$$\frac{\pi c}{\omega} < a < \frac{2\pi c}{\omega}$$

Exercice 9

- On considère le champ électrique $\vec{E}$, dans le vide, défini par ses coordonnées dans un repère cartésien $Oxyz$:

$$E_x = E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \exp[i(\omega t - kz)], \quad E_y = 0, \quad E_z = 0$$

E_0 et b sont réels. Quelle relation doit vérifier b , k , ω et c pour que $\vec{E}$ soit le champ électrique d'une onde électromagnétique dans le vide ?

- Montrer que pour ω inférieur à une certaine pulsation ω_c que l'on déterminera, aucune propagation n'est possible.
 - Quelle est la nature de l'onde dans ce cas ?
 - Calculer la distance $z = d$ pour laquelle l'amplitude de cette onde est divisée par 5.
- Calculer pour $\omega > \omega_c$ la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe v_g ? (c est la vitesse de propagation de la lumière dans le vide).
- Montrer qu'une telle onde satisfait aux conditions aux limites si l'espace est limité par deux plans conducteurs parfaits, parallèles à xOz et situés en $y_1 = -pb/2$ et $y_2 = pb/2$ (p entier impair).
 - Application Numérique : $p = 1$, $b = 3\text{cm}$.
Calculer f_c .
Pour $f = 1\text{GHz}$ calculer d .
Pour $f = 10\text{GHz}$, donner les valeurs de v_ϕ et v_g .
- Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ associé au champ électrique $\vec{E}$. Qu'est-ce qu'on constate ?
- Calculer le vecteur de Poynting $\vec{R}$ ainsi que sa valeur moyenne dans le temps et dans l'espace $\langle \vec{R} \rangle_{t,y}$.
- Déterminer la densité d'énergie électromagnétique ω_{EM} ainsi que sa valeur moyenne spatio-temporelle qu'on note $\langle \omega_{EM} \rangle_{t,y}$.
- Quelle est la relation entre $\langle \vec{R} \rangle_{t,y}$ et $\langle \omega_{EM} \rangle_{t,y}$. Conclure.

Solution

- L'équation de propagation d'onde dans le vide est :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Dans notre cas, cette équation se simplifie :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

Nous obtenons :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{b^2} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{b^2}}$$

2. Pour avoir phénomène de propagation il faut que k soit réel, d'où :

$$\omega \geq \frac{\pi c}{b}$$

On appelle la fréquence de coupure : $\omega_c = \pi c/b$

- Dans le cas où $\omega < \omega_c$, l'onde est évanescente.
- En posant $k = \pm i/\delta$.

avec :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{b^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}$$

L'amplitude est divisée par 5 en $z = d$.

$$e^{\delta/d} = 5 \Rightarrow d = \delta \ln(5)$$

3. Dans le cas $\omega \geq \omega_c$, k est réel. Dans ce cas l'onde se propage à l'intérieur du guide. Les vitesses de phase et de groupe sont respectivement :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}, v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}$$

4. Conditions de nullité du champ en $y = \pm pb/2$ quel que soit z et t .

$$E_x(y = \pm pb/2) = 0 \Rightarrow \cos\left(\pm \frac{\pi p}{2}\right) = 0$$

Avec p entier impair.

Application Numérique :

La fréquence de coupure est $f_c = 5 \text{ GHz}$.

Pour une fréquence $f = 1 \text{ GHz}$, l'onde est évanescente. La distance parcourue pour laquelle l'amplitude est divisée par 5 est $d = 1.58 \text{ cm}$.

Pour une fréquence $f = 10 \text{ GHz}$, l'onde se propage à l'intérieur du guide. Les vitesses de phase et de groupe sont :

$$v_\phi = 3.46 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}, v_g = 2.60 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

5. A partir de l'équation de Maxwell Faraday, nous avons :

$$\vec{B} = E_0 \left[\frac{k}{\omega} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \vec{e}_y + \frac{i\pi}{\omega b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \vec{e}_z \right] \exp[i(\omega t - kz)]$$

En notation réelle :

$$\vec{B} = E_0 \left[\frac{k}{\omega} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y - \frac{\pi}{\omega b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin(\omega t - kz) \vec{e}_z \right]$$

Nous constatons que le champ est transverse électrique et non transverse magnétique.

6. En utilisant la définition du vecteur de Poynting

$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$$

On trouve :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{R}} = \frac{E_0^2}{\mu_0} & \left[\frac{k}{\omega} \cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z \right. \\ & \left. + \frac{\pi}{\omega b} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin(\omega t - kz) \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y \right] \end{aligned}$$

La valeur moyenne temporelle est :

$$\langle \vec{\mathcal{R}} \rangle_t = \frac{E_0^2}{2\mu_0} \frac{k}{\omega} \cos^2 \left(\frac{\pi y}{b} \right) \vec{e}_z$$

La valeur moyenne spatio temporelle est :

$$\langle \vec{\mathcal{R}} \rangle_{t,y} = \frac{E_0^2}{4\mu_0 v_\phi} \vec{e}_z$$

7. La densité d'énergie électromagnétique ω_{EM} est :

$$\omega_{EM} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right)$$

d'où :

$$\langle \omega_{EM} \rangle_{t,y} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \langle E^2 \rangle_{t,y} + \frac{\langle B^2 \rangle_{t,y}}{\mu_0} \right)$$

Après calcul nous obtenons :

$$\langle \omega_{EM} \rangle_{t,y} = \frac{\langle E^2 \rangle_{t,y}}{4\mu_0 c^2}$$

8. Nous avons :

$$\langle \vec{\mathcal{R}} \rangle_{t,y} = \langle \omega_{EM} \rangle_{t,y} v_g \vec{e}_z$$

On conclut que l'énergie électromagnétique en moyenne s'écoule dans le même sens que l'onde, avec une vitesse v_g . v_g est donc la vitesse d'écoulement de l'énergie.

Problème 2

Le milieu interstellaire est un plasma extrêmement raréfié constitué de n_e électrons par unité de volume et de divers ions et molécules.

On considère une onde électromagnétique qui se propage dans ce milieu et donnée en notation complexe Par :

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x, \quad \vec{B} = B_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y \quad (1)$$

Où ω , k , E_0 et B_0 sont des constantes réelles et positives.

1. Ecrire les champs réels $\vec{E}$ et $\vec{B}$.
2. Calculer le vecteur de Poynting du champ électromagnétique (1), au point $M = (x, y, z)$ et à l'instant t , en fonction de E_0 , B_0 , ω , k , c et ϵ_0 .
3. Ecrire les équations de Maxwell dans le vide.

Sachant que le champ électromagnétique (1) vérifie ces équations de Maxwell, en déduire :

- a. La densité de charge électrique $\rho(M, t)$ dans le milieu.
- b. La valeur de B_0 en fonction de ω , k et E_0 .
- c. que la densité de courant $\vec{j}(M, t)$ dans le milieu s'écrit en notation complexe :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (2)$$

où σ est un nombre complexe que l'on exprimera en fonction de ω , k , c et ϵ_0 .

4. On note $\vec{v}(x, y, z, t) = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$ le champ de vitesse des électrons du milieu. On fait l'hypothèse que les électrons ont un mouvement oscillatoire parallèle à l'axe Ox et que leur champ de vitesse ne dépend ni de x ni de y . On écrira donc, en notation complexe :

$$\vec{v}(z, t) = v_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x \quad (3)$$

où v_0 est une constante complexe.

On utilisera dans la suite l'équation suivante :

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e \vec{E} \quad (4)$$

Cette équation est l'équation du mouvement d'un électron (masse m , charge $-e$) soumis à la force électrique $\vec{F}_e = -e \vec{E}$. On a écrit, pour l'accélération de l'électron :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad (5)$$

Ce qui est exact pour le champ de vitesse (3).

- a. En réalité, l'électron subit également une force magnétique $\vec{F}_m$ due au champ $\vec{B}$ de l'onde. Quelle est l'expression de $\vec{F}_m$?
- b. Quelle condition la constante v_0 doit-elle satisfaire pour que la force magnétique $\vec{F}_m$ soit négligeable par rapport à la force électrique $\vec{F}_e$?
- c. En utilisant l'équation (4), déterminer v_0 en fonction de m , ω , e et E_0 .

5. La densité de courant est due au mouvement des électrons :

$$\vec{j} = -n_e e \vec{v} \quad (6)$$

- a. Justifier cette affirmation : on expliquera l'équation (6) et pourquoi on peut négliger les courants dus aux ions.
- b. En utilisant l'équation (6), exprimer $\vec{j}$ en fonction de n_e , e , m , ω et $\vec{E}$.

6. a. Montrer que l'onde étudiée vérifie une relation de dispersion de la forme :

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2 \quad (7)$$

et exprimer la valeur de ω_p en fonction de n_e , e , m et ε_0 .

- b. Que pouvez vous dire de l'onde pour $0 < \omega < \omega_p$?

Application numérique : On mesure $\omega_p = 10^4 \text{ s}^{-1}$. Calculer n_e .

7. Calculer la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe v_g de l'onde dans le milieu en fonction de c , ω_p et ω .

Application numérique :

- Donner une valeur numérique de ω qui correspond à la lumière visible rouge sachant que sa longueur d'onde est : $\lambda_R = 8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.
- Calculer numériquement les vitesses v_g et v_ϕ pour cette lumière (rouge).

8. Un pulsar situé à la distance L nous envoie des impulsions électromagnétiques d'environ 50 millisecondes et se répétant à une période voisine de la seconde. Chaque impulsion est une superposition d'ondes du type (1) pour diverses fréquences. A l'émission d'une impulsion par le pulsar, ces diverses ondes sont émises simultanément quelle que soit leur fréquence. Mais, sur Terre, après propagation à la vitesse de groupe v_g dans le plasma interstellaire, il y a un retard entre les temps d'arrivée des différentes fréquences.

Exprimer le retard δt entre les temps d'arrivée des composantes de fréquences f_1 et f_2 ($f_1 < f_2$). On supposera que n_e est constant sur le trajet de l'onde et on simplifiera l'expression en tenant compte du fait que $f_1 \gg \omega_p$ et $f_2 \gg \omega_p$. On donnera δt en fonction de c , ω_p , f_1 , f_2 et L .

Quelle est la composante qui arrive en premier?

Application numérique :

On mesure un retard $\delta t = 0.11 \text{ s}$ pour les fréquences $f_1 = 400 \text{ MHz}$ et $f_2 = 500 \text{ MHz}$.

En déduire la distance L en parsecs ($1 \text{ pc} = 3.09 \cdot 10^{16} \text{ m}$).

Le pulsar est-il dans notre galaxie ? Notre galaxie a un diamètre de 30 kpc .

Solution

1. Les champs réels sont :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x, \quad \vec{B} = B_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

2. Le vecteur de Poynting est :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} [\cos(\omega t - kz)]^2 \vec{e}_z = \varepsilon_0 c^2 E_0 B_0 [\cos(\omega t - kz)]^2 \vec{e}_z$$

Les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

3. Pour le champ électromagnétique décrit en (1) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -ikE_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = ikB_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B}, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}$$

- a. En utilisant le théorème de Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \rho = 0.$$

- b. D'après le théorème de Maxwell Faraday :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow B_0 = \frac{k}{\omega} E_0$$

- c. A partir du théorème de Maxwell Ampère :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow ikB_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x = \mu_0 \vec{j} + \frac{i\omega}{c^2} E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$$

En utilisant le résultat de la question 3.b. on trouve :

$$\vec{j} = i\varepsilon_0 \left(\frac{k^2 c^2 - \omega^2}{\omega} \right) \vec{E}$$

$$\text{d'où : } \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

avec :

$$\sigma = i\varepsilon_0 \left(\frac{k^2 c^2 - \omega^2}{\omega} \right)$$

4. a. L'expression de la force magnétique $\vec{F}_m$:

$$\vec{F}_m = -e(\vec{v} \times \vec{B}) = -evB\vec{e}_z$$

$$\vec{v}(z, t) = |v_0| \cos(\omega t - kz + \varphi) \vec{e}_x, \quad \vec{B} = B_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

ce qui donne :

$$\vec{F}_m = -e|v_0|B_0 \cos(\omega t - kz + \varphi) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_z$$

- b. L'ordre de grandeur de la force magnétique :

$$|\vec{F}_m| = e|v_0|B_0$$

L'ordre de grandeur du champ électrique :

$$|\vec{F}_e| = eE_0$$

On pourra négliger la force magnétique si le rapport :

$$\frac{|\vec{F}_m|}{|\vec{F}_e|} = \frac{|v_0|B_0}{E_0} = \frac{|v_0|}{v_\phi}$$

est très petit par rapport à 1. La condition est donc $|v_0| \ll v_\phi$.

On peut aussi écrire la condition $|v_0| \ll c$ qui signifie que les électrons sont non relativistes.

c. En portant les expressions (1) et (3) dans (4) :

$$im\omega v_0 = -eE_0$$

on a donc :

$$v_0 = \frac{-e}{im\omega} E_0$$

5. a. L'équation (6) donne la densité de courant d'une classe de particules (les électrons) de vitesse $\vec{v}$.

Le mouvement de l'ion de masse M s'obtient par la même méthode que pour un électron.

On vient de montrer que l'amplitude de la vitesse d'un électron est :

$$v_0 = \frac{-e}{im\omega} E_0$$

Celle de l'ion est :

$$V = \frac{e}{iM\omega} E_0$$

Le rapport

$$\frac{|V|}{|v_0|} = \frac{m}{M} \ll 1$$

Les charges volumiques des électrons et des ions étant de même ordre de grandeur (le milieu est neutre), les courants dus aux ions sont négligeables par rapport courants dus aux électrons. Tout se passe comme si les ions étaient immobiles.

b. La densité de courant est :

$$\vec{j} = -n_e e \vec{v} = \frac{n_e e^2}{im\omega} \vec{E}$$

6. a. En comparant 3. c. avec 5. b. :

$$\sigma = i\varepsilon_0 \left(\frac{k^2 c^2 - \omega^2}{\omega} \right) = -i \frac{n_e e^2}{m\omega}$$

Ce qui nous permet d'obtenir la relation suivante :

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2$$

où :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m\varepsilon_0}}$$

b. Pour $0 < \omega < \omega_p$, cette relation donne :

$$k = \pm i \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$$

L'onde ne se propage pas (onde évanescence).

Application numérique : $n_e = 3.15 \cdot 10^4 \text{ m}^{-3}$.

7. Les vitesses de phase et de groupe sont respectivement :

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

et :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Application numérique :

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_R} = 2.3 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

on a donc : $\omega \gg \omega_p$ et donc : $v_{\varphi} \approx v_g \approx 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$.

8. La composante de fréquence f met pour arriver jusqu'à nous le temps :

$$t(f) = \frac{L}{v_g} = \frac{L}{c} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Dans le cas des hautes fréquences ($\omega \gg \omega_p$):

$$t(f) \approx \frac{L}{c} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right] = \frac{L}{c} \left[1 + \frac{\omega_p^2}{8\pi^2 f^2} \right]$$

La composante de plus haute fréquence f_2 arrive en premier.

le retard δt est :

$$\delta t = t_1 - t_2.$$

t_1 représente le temps d'arrivée de la composante de fréquence f_1 .

t_2 représente temps d'arrivée de la composante de fréquence f_2 .

$$\delta t = \frac{L\omega_p^2}{8\pi^2 c} \left[\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2} \right]$$

Application numérique :

$$L = 1.2 \cdot 10^{19} \text{ m} = 375 \text{ pc}$$

Le pulsar est dans notre galaxie.

Exercice 10

Deux ondes électromagnétiques planes progressives monochromatiques, polarisées rectilignement, se propagent dans le vide, dans le même sens (sens du vecteur unitaire $\vec{e}$).

A l'endroit où on se trouve les deux champs s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_{01} \cos(\omega_1 t) \\ \vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_{02} \cos(\omega_2 t + \varphi) \end{cases} \quad (1)$$

1. Calculer les champs magnétiques $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$ associés respectivement aux champs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ en fonction du vecteur unitaire $\vec{e}$, de $\vec{E}_{01}$, $\vec{E}_{02}$ et de c ($\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$).
2. Calculer les valeurs moyennes des vecteurs de Poynting $\langle \vec{\mathcal{R}}_1 \rangle$ et $\langle \vec{\mathcal{R}}_2 \rangle$ associés respectivement aux champs électromagnétiques $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$ et $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$, en fonction de μ_0 , c , E_{01} , E_{02} et $\vec{e}$.
3. Calculer l'onde résultante $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ et $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ ainsi que le vecteur de Poynting $\langle \vec{\mathcal{R}} \rangle$ associé à cette onde en fonction de μ_0 , c , E_{01} , E_{02} , $\vec{E}_{01}$, $\vec{E}_{02}$ et $\vec{e}$.

Quand a-t-on : $\langle \vec{\mathcal{R}} \rangle \neq \langle \vec{\mathcal{R}}_1 \rangle + \langle \vec{\mathcal{R}}_2 \rangle$.

On donne :

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

Solution

1. Dans le cas d'une onde plane :

$$\begin{cases} \vec{B}_1 = \frac{1}{c} (\vec{e} \times \vec{E}_1) \\ \vec{B}_2 = \frac{1}{c} (\vec{e} \times \vec{E}_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{B}_1 = \frac{1}{c} (\vec{e} \times \vec{E}_{01}) \cos(\omega_1 t) \\ \vec{B}_2 = \frac{1}{c} (\vec{e} \times \vec{E}_{02}) \cos(\omega_2 t + \varphi) \end{cases}$$

2. Les vecteurs de Poynting associés à ces ondes sont :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{R}}_1 = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E}_1 \times \vec{B}_1) \\ \vec{\mathcal{R}}_2 = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E}_2 \times \vec{B}_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{\mathcal{R}}_1 = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E}_{01} \times (\vec{e} \times \vec{E}_{01}) [\cos(\omega_1 t)]^2 \\ \vec{\mathcal{R}}_2 = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E}_{02} \times (\vec{e} \times \vec{E}_{02}) [\cos(\omega_2 t + \varphi)]^2 \end{cases}$$

En utilisant l'identité $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B})$ et sachant que $\vec{e}$ est perpendiculaire aux champs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$, nous trouvons :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{R}}_1 = \frac{E_{01}^2}{\mu_0 c} [\cos(\omega_1 t)]^2 \vec{e} \\ \vec{\mathcal{R}}_2 = \frac{E_{02}^2}{\mu_0 c} [\cos(\omega_2 t + \varphi)]^2 \vec{e} \end{cases}$$

Les valeurs moyennes des vecteurs de Poynting sont :

$$\begin{cases} \langle \vec{\mathcal{R}}_1 \rangle = \frac{E_{01}^2}{2\mu_0 c} \vec{e} \\ \langle \vec{\mathcal{R}}_2 \rangle = \frac{E_{02}^2}{2\mu_0 c} \vec{e} \end{cases}$$

3. Le champ électromagnétique résultant est :

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_{01} \cos(\omega_1 t) + \vec{E}_{02} \cos(\omega_2 t + \varphi) \\ \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{1}{c} [(\vec{e} \times \vec{E}_{01}) \cos(\omega_1 t) + (\vec{e} \times \vec{E}_{02}) \cos(\omega_2 t + \varphi)] \end{cases}$$

Le vecteur de Poynting associé à ce champ est :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{R}} &= \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} [(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \times (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)] \\ &= \frac{1}{\mu_0} [(\vec{E}_1 \times \vec{B}_1) + (\vec{E}_2 \times \vec{B}_2) + (\vec{E}_1 \times \vec{B}_2) + (\vec{E}_2 \times \vec{B}_1)] \end{aligned}$$

Les deux premiers termes, non mixte, sont définies comme $\vec{\mathcal{R}}_1 = \vec{E}_1 \times \vec{B}_1$ et $\vec{\mathcal{R}}_2 = \vec{E}_2 \times \vec{B}_2$

Les termes mixtes $\vec{E}_1 \times \vec{B}_2$ et $\vec{E}_2 \times \vec{B}_1$ donnent :

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 \times \vec{B}_2 &= \frac{1}{c} [\vec{E}_{01} \times (\vec{e} \times \vec{E}_{02})] \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t + \varphi) \\ &= \frac{1}{c} (\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}) \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t + \varphi) \vec{e} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 \times \vec{B}_1 &= \frac{1}{c} [\vec{E}_{02} \times (\vec{e} \times \vec{E}_{01})] \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t + \varphi) \\ &= \frac{1}{c} (\vec{E}_{02} \cdot \vec{E}_{01}) \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t + \varphi) \vec{e} \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'expression de $\vec{\mathcal{R}}$:

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{R}}_1 + \vec{\mathcal{R}}_2 + \frac{1}{\mu_0 c} [(\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}) \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t + \varphi) + (\vec{E}_{02} \cdot \vec{E}_{01}) \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t + \varphi)] \vec{e}$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est :

$$\begin{aligned} \langle \vec{\mathcal{R}} \rangle &= \langle \vec{\mathcal{R}}_1 \rangle + \langle \vec{\mathcal{R}}_2 \rangle \\ &+ \frac{1}{\mu_0 c} [(\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}) \langle \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t + \varphi) \rangle \\ &+ (\vec{E}_{02} \cdot \vec{E}_{01}) \langle \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t + \varphi) \rangle] \vec{e} \end{aligned}$$

Pour que $\langle \vec{\mathcal{R}} \rangle = \langle \vec{\mathcal{R}}_1 \rangle + \langle \vec{\mathcal{R}}_2 \rangle$, il faut satisfaire à l'une des conditions suivantes :

- $\vec{E}_{01}$ perpendiculaire à $\vec{E}_{02}$ ($\vec{E}_{01} \perp \vec{E}_{02}$).

ou

ω_1 différent de ω_2 ($\omega_1 \neq \omega_2$).

Exercice 11

1. Rappeler les équations de passage à la surface de séparation entre deux diélectriques parfaits et non chargés.
2. On considère une OEM plane harmonique se propageant dans un milieu isotrope et homogène, non magnétique (perméabilité magnétique μ_0) d'indice de réfraction n réel.
Déterminer la relation entre les amplitudes E_0 et B_0 des vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.
3. Le champ électrique s'écrit sur un plan de référence d'équation $z = 0$:

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - \varphi) \vec{e}$$

$\vec{e}$ Étant un vecteur unitaire. Donner l'expression de ce champ en un point M de position z . Comment s'écrit alors le champ magnétique associé ? Quelle est la relation entre la longueur d'onde dans le diélectrique λ et la longueur d'onde dans le vide λ_0 ?

On considère une couche diélectrique d'indice de réfraction n_1 et d'épaisseur d séparant deux milieux diélectriques d'indices de réfractons n et n_s (Figure 3). Ces différents milieux sont isotropes, homogènes, transparents et non magnétiques.

On définit le plan xOy par la surface séparant la couche et le milieu supérieur (d'indice n), et l'axe Oz orienté de celui-ci et vers cette couche. Une onde plane sinusoïdale, de longueur d'onde dans le vide λ_0 et de polarisation rectiligne parallèle à $x'\alpha$, se propage dans le milieu supérieur et atteint la couche diélectrique en incidence normale (Figure 3).

Les champs des différentes ondes sont notés de la manière suivante :

$\vec{E}_i$ et $\vec{B}_i$ pour l'onde progressive se propageant dans le milieu supérieur.

$\vec{E}_r$ et $\vec{B}_r$ pour l'onde régressive se propageant dans le milieu supérieur.

$\vec{E}_t$ et $\vec{B}_t$ pour l'onde progressive se propageant dans la couche intermédiaire.

$\vec{E}_d$ et $\vec{B}_d$ pour l'onde régressive se propageant dans la couche intermédiaire.

$\vec{E}_s$ et $\vec{B}_s$ pour l'onde transmise dans le milieu inférieur.

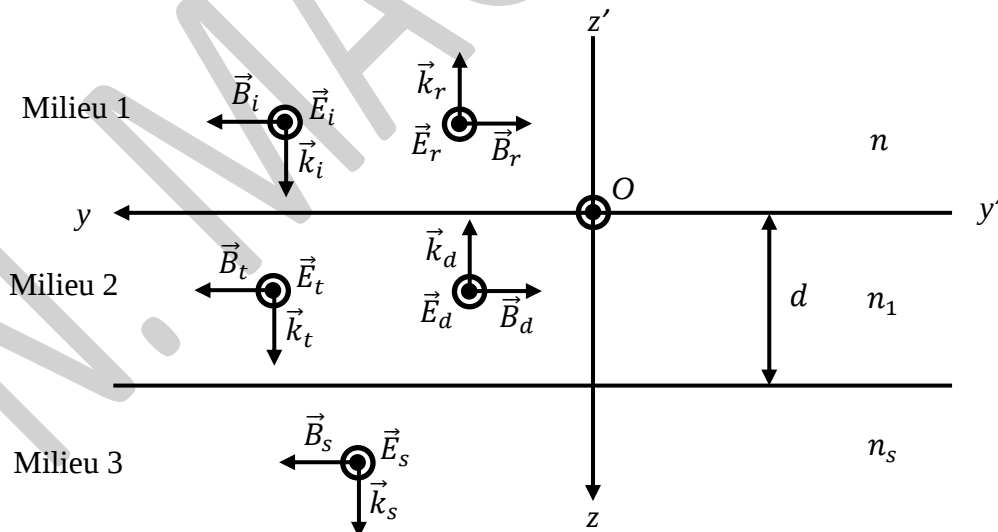


Figure 3

On sait que les directions de polarisation ne sont pas changées au cours d'une réflexion transmission.

- Ecrire les différents champs en notation complexe à l'aide des amplitudes électriques E_{0i} , E_{0r} , E_{0t} , E_{0d} et E_{0s} , indicées de la même manière que les champs correspondants.
- Donner les quatre équations traduisant les conditions de continuité du champ électromagnétique sur les limites de la couche en $z = 0$ puis en $z = d$.
- Déterminer enfin E_{0r} et E_{0s} en fonction de E_{0i} et des indices des milieux.
En déduire le rapport $|E_{0s}|^2 / |E_{0i}|^2$.
- On introduit en réalité la couche de diélectrique entre deux milieux d'indices quelconques dans le but d'améliorer la transmission de l'onde d'un milieu à l'autre. Montrer que, si l'épaisseur et l'indice de réfraction de la couche sont bien choisis, il est possible de supprimer totalement l'onde réfléchie dans le milieu supérieur.
- Calculer alors le facteur énergétique de transmission entre les deux milieux. Est-il plus élevé qu'en l'absence de couche intermédiaire ?
- Quelles pourraient être les applications pratiques de ceci ?

Solution

- Les équations de passage sont :

$$\vec{D}_{2N} - \vec{D}_{1N} = \vec{0} \Rightarrow \varepsilon_2 \vec{E}_{2N} - \varepsilon_1 \vec{E}_{1N} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\vec{B}_{2N} - \vec{B}_{1N} = \vec{0} \quad (2)$$

$$\vec{E}_{2T} - \vec{E}_{1T} = \vec{0} \quad (3)$$

$$\vec{H}_{2T} - \vec{H}_{1T} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B}_{2T} - \vec{B}_{1T} = \vec{0} \quad (4)$$

où ε_1 ε_2 sont respectivement les permittivités des deux diélectrique.

Les indices N et T indiquent respectivement les composantes normale et tangentielle du champ.

Les indices 1 et 2 indiquent respectivement les milieux diélectriques 1 et 2.

- La relation entre les deux amplitudes :

Dans le cas d'onde plane et en absence de toute charge et de tout courant, nous avons :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$$

Ce qui donne :

$$B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \frac{E_0}{v_\phi} = \frac{nE_0}{c}$$

c représente la vitesse de propagation de l'onde dans le vide.

n représente l'indice de réfraction du diélectrique.

- Le champ électrique en un point z est :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k_\pm z - \varphi) \vec{e}$$

$k_\pm$ représente le vecteur d'onde dans le cas d'une onde progressive où régressive.

$$k_\pm = \pm k \vec{e}_z$$

Le champ magnétique $\vec{B}$ est :

$$\vec{B} = \pm \frac{nE_0}{c} \cos(\omega t - k_\pm z - \varphi) (\vec{e}_z \times \vec{e})$$

$$k = \frac{\omega}{v_\phi}$$

v_ϕ est la vitesse de phase de l'onde.

La relation entre λ_0 et λ est :

$$n = \frac{c}{v_\phi} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

a. Les expressions des différents champs :

Dans la couche supérieure d'indice n :

$$\begin{cases} \vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x, & \vec{B}_i = n \frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y \\ \vec{E}_r = E_{0r} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x, & \vec{B}_r = -n \frac{E_{0r}}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y \end{cases} \quad (5)$$

Dans la couche intermédiaire d'indice n_1 :

$$\begin{cases} \vec{E}_t = E_{0t} e^{i(\omega t - k_d z)} \vec{e}_x, & \vec{B}_t = n_1 \frac{E_{0t}}{c} e^{i(\omega t - k_d z)} \vec{e}_y \\ \vec{E}_d = E_{0d} e^{i(\omega t + k_d z)} \vec{e}_x, & \vec{B}_d = -n_1 \frac{E_{0d}}{c} e^{i(\omega t + k_d z)} \vec{e}_y \end{cases} \quad (6)$$

Dans la couche du bas d'indice n_s :

$$\vec{E}_s = E_{0s} e^{i(\omega t - k_s z)} \vec{e}_x, \vec{B}_s = n_s \frac{E_{0s}}{c} e^{i(\omega t - k_s z)} \vec{e}_y \quad (7)$$

b. Les différents champs sont tangentiels :

$$\begin{cases} \vec{E}_i(0, t) + \vec{E}_r(0, t) = \vec{E}_t(0, t) + \vec{E}_d(0, t) \\ \vec{B}_i(0, t) + \vec{B}_r(0, t) = \vec{B}_t(0, t) + \vec{B}_d(0, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} + E_{0d} \\ n(E_{0i} - E_{0r}) = n_1(E_{0t} - E_{0d}) \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \vec{E}_t(d, t) + \vec{E}_d(d, t) = \vec{E}_s(d, t) \\ \vec{B}_t(d, t) + \vec{B}_d(d, t) = \vec{B}_s(d, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{0t} e^{-ik_d d} + E_{0d} e^{ik_d d} = E_{0s} e^{-ik_s d} \\ n_1(E_{0t} e^{-ik_d d} - E_{0d} e^{ik_d d}) = n_s E_{0s} e^{-ik_s d} \end{cases} \quad (9)$$

c. A partir des équations (8) et (9) :

$$E_{0r} = \frac{AD e^{-2ik_d d} - BC}{AC - BD e^{-2ik_d d}} E_{0i}$$

$$E_{0s} = e^{i(k_s - k_d)d} \frac{(A^2 - B^2)}{AC - BD e^{-2ik_d d}} E_{0i}$$

avec : $A = n + n_1$, $B = n_1 - n$, $C = n_1 + n_s$, $D = n_1 - n_s$.

Le rapport des modules au carré :

$$\frac{|E_{0s}|^2}{|E_{0i}|^2} = \frac{(A^2 - B^2)^2}{[AC - BD \cos(2k_d d)]^2 + [BD \sin(2k_d d)]^2}$$

d. Eliminer la réflexion revient à :

$$\begin{aligned} E_{0r} = 0 &\Rightarrow AD e^{-2ik_d d} - BC = 0 \\ AD \cos(2k_d d) - BC - iAD \sin(2k_d d) &= 0 \end{aligned}$$

Cela est possible si :

$$\sin(2k_d d) = 0 \Rightarrow d = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$$

et : $AD \pm BC = 0$

Après calcul nous obtenons la deuxième condition :

$$n_1 = \sqrt{nn_s}$$

e. Dans le cas où les conditions de la question précédente sont satisfaites :

$$\frac{|E_{0s}|^2}{|E_{0i}|^2} = \frac{(A^2 - B^2)^2}{(AC + BD)^2}$$

Après calcul

$$\frac{|E_{0s}|^2}{|E_{0i}|^2} = \frac{n}{n_s}$$

En absence de couche intermédiaire le coefficient de transmission en énergie devient :

$$\frac{|E_{0s}|^2}{|E_{0i}|^2} = \frac{4n^2}{(n + n_s)^2}$$

Il devient aisé de vérifier que la couche intermédiaire permet de croître le coefficient de réflexion.

f. Parmi les applications existantes des couches antireflets sont dans le domaine de l'optique.

Sujets de concours et Examens corrigés

Examen Final, Janvier 2020 (USTHB)

Licence L2-ST

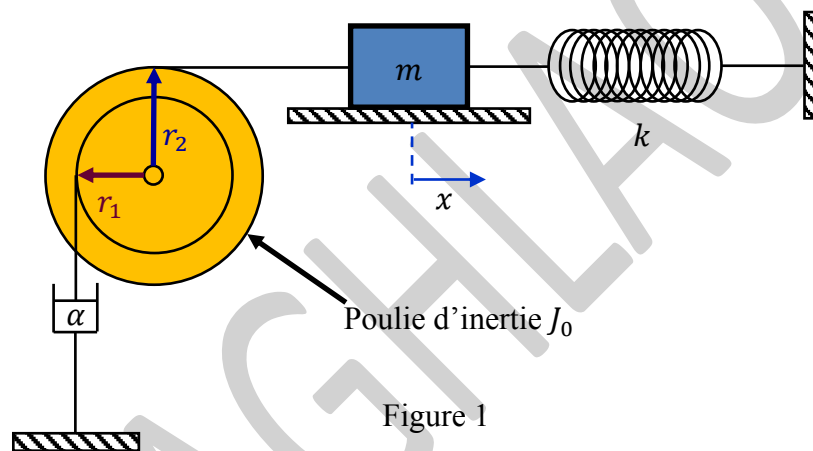
Durée 1h15

Exercice 1

Le système de la figure 1 montre une poulie de centre O , de moment d'inertie J_0 , composée de deux disques solidaires de rayons r_1 et r_2 . Au rayon r_1 est attaché un amortisseur α . Au rayon r_2 sont reliés une masse M et un ressort de constante de raideur k .

Le système a une fréquence propre f_0 égale à 5 Hz.

On donne : $M = 10 \text{ kg}$, $J_0 = 5 \text{ kg m}^2$, $r_1 = 10 \text{ cm}$ et $r_2 = 25 \text{ cm}$.



1. Trouver l'équation du mouvement, régissant l'évolution de $x(t)$, en fonction des données du problème.
2. Quand on donne à la masse M un déplacement initial, le système effectue des oscillations. L'amplitude initiale est réduite de 80% après 10 période. Trouver la valeur du coefficient d'amortissement α (On supposera que l'amortissement est très faible).
3. Déterminer la solution de l'équation du mouvement, sachant que $x(0) = 4 \text{ cm}$ et $\dot{x}(0) = 0$.

Exercice 2

Soit un système à un degré de liberté, composé d'une masse m , reliée à un bâti par l'intermédiaire d'un ressort k et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α . Ce système est soumis à une excitation harmonique de sa base $y(t) = y_0 e^{j\omega t}$, comme le montre la figure (Figure 2).

On donne : $m = 10 \text{ kg}$, $\alpha = 20 \text{ kg s}^{-1}$, $k = 4 \cdot 10^3 \text{ N m}^{-1}$, $y_0 = 0.05 \text{ m}$ et $\omega = 5 \text{ rd/s}$.

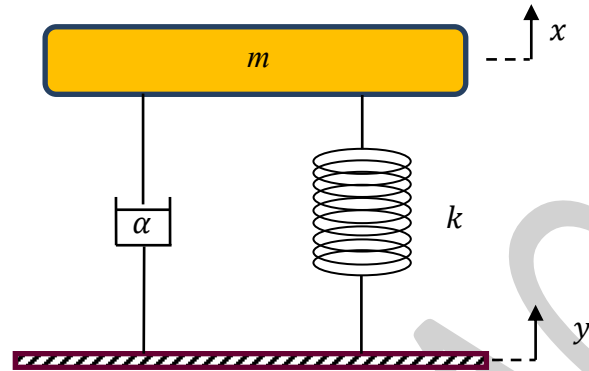


Figure 2

1. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit sous la forme :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = (k + j\alpha\omega)y$$

2. Calculer la solution de l'équation dans le régime permanent.
3. Calculer le rapport des amplitudes de la réponse permanente à celle du mouvement de la base $y(t)$.

Exercice 3

Pour le système de la figure ci-dessous (Figure 3).

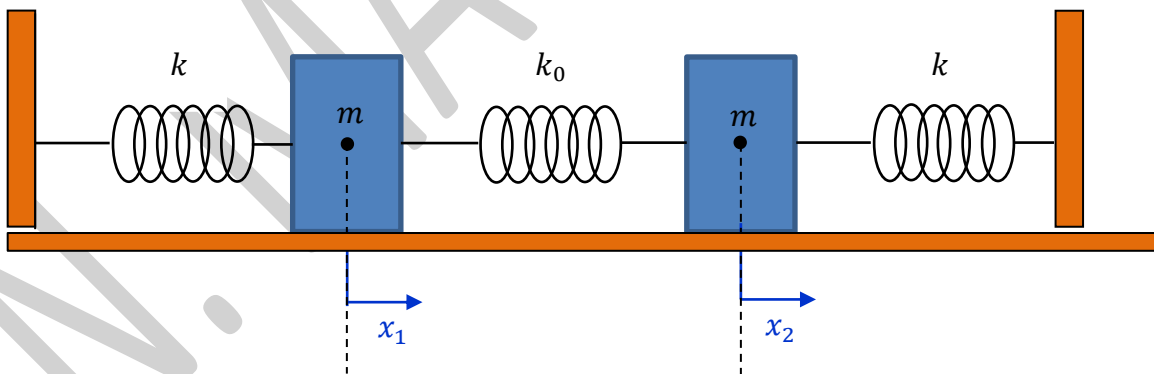


Figure 3

1. Ecrire les équations du mouvement des deux masses.
2. En utilisant les conditions initiales : $x_1(0) = a$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, déterminer les réponses des deux masses en spécifiant les pulsations propres.
3. Ecrire les réponses des deux masses sous la forme de produits de cosinus et de sinus. En introduisant un couplage lâche $C = \frac{k_0}{k}$, montrer qu'il existe des battements pour les deux masses et que celles-ci sont en quadrature de phase.

Solution

Exercice 1

1. Equation du mouvement

- Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}(J_0 + mr_2^2)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{J_0}{r_2^2} + m\right)\dot{x}^2$$

- Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

- Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha r_1^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\alpha \frac{r_1^2}{r_2^2} \dot{x}^2$$

L'équation du mouvement est :

$$\left(\frac{J_0}{r_2^2} + m\right)\ddot{x} + \alpha \frac{r_1^2}{r_2^2} \dot{x} + kx = 0$$
$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Avec :

$$\delta = \frac{\alpha r_1^2}{2(J_0 + mr_2^2)}, \omega_0 = \sqrt{\frac{kr_2^2}{(J_0 + mr_2^2)}}$$

2. Calcul du coefficient de frottement α

$$D = \frac{1}{10} \ln(5)$$

$$\delta = \frac{D}{T_a} \approx \frac{D}{T_0} = \frac{\alpha r_1^2}{2(J_0 + mr_2^2)} \Rightarrow \alpha = \frac{2(J_0 + mr_2^2)}{r_1^2} D f_0$$

Nous obtenons :

$$\alpha = 905.31 \text{ kg s}^{-1}$$

3. La solution s'écrit :

$$x(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$$

Avec $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \approx \omega_0$ et $\delta = 0.8 \text{ s}^{-1}$

Nous déduisons : $A = x_0 = 0.04 \text{ m}$ et $\varphi = 0$.

La solution devient :

$$x(t) = A e^{-0.8t} \cos(31.41t)$$

Exercice 2

1. Equation du mouvement

- Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k(x - y)^2$$

- Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

- Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x} - \dot{y})^2$$

- Equation du mouvement

$$m\ddot{x} + \alpha(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = ky + \alpha\dot{y}$$

2. La solution du régime permanent

L'équation du mouvement se met sous la forme :

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 y + 2\delta\dot{y}$$

Avec :

$$\delta = \frac{\alpha}{2m}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Nous avons :

$$y = y_0 e^{i\omega t}$$

La solution du régime permanent s'écrit alors :

$$x = x_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$$

Dans ce cas, l'équation du mouvement devient :

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega)x = (\omega_0^2 + 2i\delta\omega)y$$

Ce qui donne :

$$x_0 e^{i\varphi} = \frac{(\omega_0^2 + 2i\delta\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega)} y_0$$

L'amplitude est :

$$x_0 = \sqrt{\frac{(\omega_0^4 + 4\delta^2\omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} y_0$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{(16 \times 10^4 + 4 \times 25)}{(4 \times 10^2 - 25)^2 + 4 \times 25}} 0.05 = 0.0533 \text{ m}$$

L'argument :

$$\varphi = \text{Arctg}\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2}\right) - \text{Arctg}\left(\frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\right)$$

$$\varphi = \text{Arctg}\left(\frac{10}{4 \times 10^2}\right) - \text{Arctg}\left(\frac{10}{(4 \times 10^2 - 25)}\right) = -0.0017 \text{ rd}$$

3. Le rapport d'amplitude :

$$\frac{x_0}{y_0} = \sqrt{\frac{(\omega_0^4 + 4\delta^2\omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = 1.066$$

Exercice 3

1. Equation du mouvement

- Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2}[kx_1^2 + kx_2^2 + k_0(x_2 - x_1)^2]$$

- Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$$

- Equation du mouvement

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 + k_0(x_1 - x_2) = 0 \\ m\ddot{x}_2 + kx_2 + k_0(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k + k_0)x_1 - k_0x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + (k + k_0)x_2 - k_0x_1 = 0 \end{cases}$$

2. Nous recherchons des solutions sinusoïdales, les pulsations propres sont déterminées à partir de :

$$(-m\omega^2 + k)(-m\omega^2 + k + 2k_0) = 0$$

Nous obtenons :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_0}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 + \frac{2k_0}{k}}$$

Les solutions :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi) \\ x_2(t) = A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi) + A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi) \end{cases}$$

Les rapports d'amplitudes :

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = 1, \frac{A_{22}}{A_{11}} = -1$$

D'où

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

A partir des conditions initiales : $x_1(0) = a$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, nous trouvons :

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{a}{2} [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] \\ x_2(t) = \frac{a}{2} [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)] \end{cases}$$

3. Les solutions peuvent s'écrire sous la forme de produits :

$$\begin{cases} x_1(t) = a \cos \left[\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \right) t \right] \cos \left[\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) t \right] \\ x_2(t) = a \sin \left[\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \right) t \right] \sin \left[\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \right) t \right] \end{cases}$$

Comme :

$$\frac{k_0}{k} \ll 1$$

Alors :

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_0}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 + \frac{2k_0}{k}} \approx \omega_1 (1 + C)$$

Cela permet d'écrire :

$$\omega_2 - \omega_1 = C\omega_1 \text{ et } \omega_2 + \omega_1 = (2 + C)\omega_1 \approx 2\omega_1$$

$$\begin{cases} x_1(t) = a \cos(\omega_1 t) \cos\left(\frac{C\omega_1}{2} t\right) \\ x_2(t) = a \sin(\omega_1 t) \sin\left(\frac{C\omega_1}{2} t\right) \end{cases}$$

Nous observons le phénomène de battement, les masses oscillent en quadrature de phase.

Examen de rattrapage, Février 2020 (USTHB)

Licence L2-ST

Durée 1h30

Exercice 1

Un cylindre plein et homogène, de masse M et de rayon R , peut rouler sans glisser sur un plan horizontal. Ce cylindre est relié à un bâti fixe B_1 par un ressort de raideur k au point B (Figure 1). Un ressort de constante de raideur k_0 relie le point A de l'axe du cylindre à un bâti fixe B_2 . On repère le cylindre par l'angle de rotation $\theta(t)$.

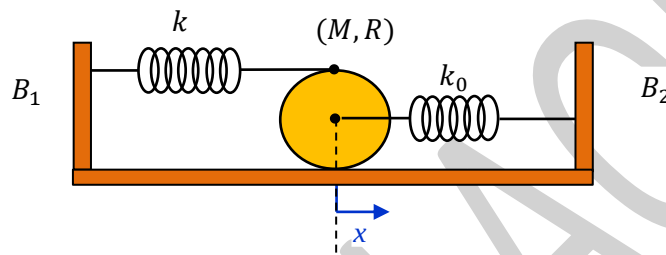


Figure 1

1. Etablir l'équation de mouvement du système régissant l'évolution de $\theta(t)$.
2. Exprimer la période propre T_0 du mouvement de ce système en fonction de M , k et k_0 .
3. Déterminer l'expression de $\theta(t)$ en tenant compte des conditions initiales :

$$\theta(0) = 5^\circ \text{ et } \dot{\theta}(0) = 0 \text{ rad s}^{-1}$$

Exercice 2

On remplace le ressort de raideur k par un amortisseur de coefficient d'amortissement visqueux α (Figure 2).

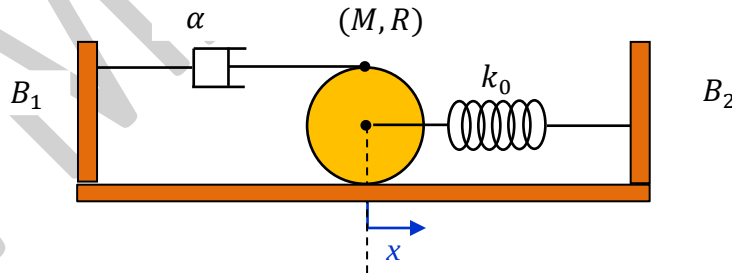


Figure 2

1. Etablir l'équation du mouvement en fonction de la coordonnée θ .
2. On suppose qu'au bout de 4 pseudos périodes l'amplitude initiale de vibration est diminuée de 60 %. Si la période des oscillations est égale à 0.6 s, calculer le coefficient d'amortissement α .
3. Calculer l'énergie dissipée du système pendant une période pour une solution approximative :

$$\theta(t) = \frac{\pi}{16} \cos(\omega_a t)$$

On donne :

$$M = 2 \text{ kg}, R = 10 \text{ cm}$$

Exercice 3

Le bâti B_2 est maintenant animé d'un mouvement sinusoïdal et horizontal, son déplacement est donné par $s(t) = s_0 e^{j\omega t}$ (Figure 3).

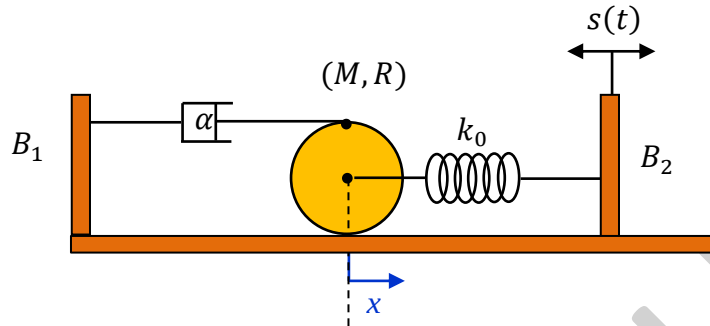


Figure 3

1. Etablir l'équation du mouvement.
2. Donner l'expression de l'amplitude des oscillations en fonction de ω .
3. Calculer l'amplitude s_0 sachant qu'à la résonance l'amplitude maximale de θ , vaut $\theta_{max} = \pi/10$.

Exercice 4

Dans le système précédent on remplace l'amortisseur par un ressort de raideur k' et on insère entre le ressort k_0 et le bâti B_2 un oscillateur constitué d'une masse m et d'un ressort de constante de raideur k , pour former un système à deux degrés de liberté (Figure 4). Le mouvement de la masse m est repéré par la coordonnée x_2 . On posera $x_1 = R\theta$ et on choisira les conditions suivantes :

$$m = \frac{3}{2}M \text{ et } k = 4k'$$

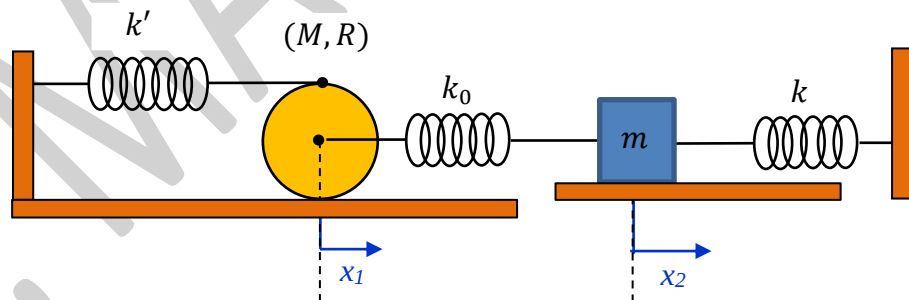


Figure 4

1. Etablir les équations du mouvement en fonction de x_1 et x_2 .
2. Calculer les pulsations propres de ce système en fonction de k , k_0 et m .
3. Donner les solutions générales $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Solution

Exercice 1

1. L'équation du mouvement

- Energie potentielle :

$$U = \frac{1}{2}(4k + k_0)R^2\theta^2$$

- Energie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} \frac{3}{2} MR^2 \dot{\theta}^2$$

- L'équation du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

Nous obtenons

$$\frac{3}{2} M \ddot{\theta} + (4k + k_0)\theta = 0$$

2. L'équation du mouvement s'écrit :

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

Avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2(4k + k_0)}{3M}}$$

La période propre T_0 :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{3M}{(8k + 2k_0)}}$$

3. La solution $\theta(t)$ s'écrit :

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

En tenant compte des conditions initiales :

$$\theta(0) = 5^\circ = 0.087 \text{ rd} \quad \text{et} \quad \dot{\theta}(0) = 0 \text{ rd s}^{-1}$$

Nous trouvons :

$$\theta(t) = 0.087 \cos(\omega_0 t)$$

Exercice 2

1. L'équation du mouvement

- Energie potentielle :

$$U = \frac{1}{2} k_0 R^2 \theta^2$$

- Energie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} \frac{3}{2} MR^2 \dot{\theta}^2$$

- La fonction de dissipation :

$$D = \frac{1}{2} 4\alpha R^2 \dot{\theta}^2$$

- L'équation du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \text{ ou bien } \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

Nous obtenons

$$\ddot{\theta} + 2\delta \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

Avec :

$$\delta = \frac{4\alpha}{3M}, \omega_0 = \sqrt{\frac{2k_0}{3M}}$$

2. Le décrétement logarithmique est

$$D = \frac{1}{4} \ln(2.5) = 0.23$$

Nous obtenons :

$$\alpha = \frac{3M\delta}{4} = \frac{3M}{4} \frac{D}{T_a} = 0.57 \text{ kg s}^{-1}$$

3. L'énergie dissipée en une période

$$\Delta E = \int_t^{t+T} P_\alpha(t) dt$$

P_α représente la puissance dissipée par l'amortisseur.

T la période d'oscillation.

$$\Delta E = 4\alpha R^2 \omega_a^2 \left(\frac{\pi}{16}\right)^2 \int_t^{t+T} [\sin(\omega_a t)]^2 dt = 4\alpha R^2 \omega_a^2 \left(\frac{\pi}{16}\right)^2 \frac{T}{2}$$

Nous obtenons:

$$\Delta E = \alpha R^2 \omega_a \frac{\pi^3}{64} = 0.29 \text{ J}$$

Exercice 3

1. L'équation du mouvement

- Energie potentielle :

$$U = \frac{1}{2} k_0 (R\theta - s)^2$$

- Energie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} \frac{3}{2} M R^2 \dot{\theta}^2$$

- La fonction de dissipation :

$$D = \frac{1}{2} 4\alpha R^2 \dot{\theta}^2$$

- L'équation du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

Nous obtenons

$$\frac{3}{2} MR^2 \ddot{\theta} + 4\alpha R^2 \dot{\theta} + k_0 R^2 \theta = k_0 R s$$

$$\ddot{\theta} + 2\delta \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{2k_0}{3MR} s$$

Avec :

$$\delta = \frac{4\alpha}{3M}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2k_0}{3M}}$$

2. La solution du régime permanent est :

$$\theta(t) = \theta_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

L'amplitude s'écrit :

$$\theta_0 = \frac{\frac{2k_0}{3MR} s_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}$$

3. L'amplitude θ_{max} est :

$$\theta_{max} = \theta_0(\omega_R) = \frac{\frac{2k_0}{3MR} s_0}{2\delta \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \Rightarrow s_0 = \frac{3MR\delta}{k_0} \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \theta_{max}$$

$$s_0 = \frac{2R\delta}{(\omega_a^2 + \delta^2)} \omega_a \theta_{max}$$

$$s_0 = 2.27 \text{ mm}$$

Exercice 4

1. L'équation du mouvement

- Energie potentielle :

$$U = \frac{1}{2} [4k' x_1^2 + k x_2^2 + k_0 (x_2 - x_1)^2]$$

- Energie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} M \dot{x}_1^2 + m \dot{x}_2^2 \right)$$

- L'équation du mouvement :

$$\begin{cases} \frac{3}{2} M \ddot{x}_1 + (4k' + k_0) x_1 - k_0 x_2 = 0 \\ m \ddot{x}_2 + (k_0 + k) x_2 - k_0 x_1 = 0 \end{cases}$$

Or :

$$m = \frac{3}{2}M \text{ et } k = 4 k'$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k + k_0)x_1 - k_0x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + (k_0 + k)x_2 - k_0x_1 = 0 \end{cases}$$

2. Les pulsations propres sont déterminées à partir de l'équation :

$$((k + k_0) - m\omega^2) - k_0^2 = 0 \Rightarrow (k - m\omega^2)(k + 2k_0 - m\omega^2) = 0$$

Nous trouvons :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_0}{m}}$$

3. Les solutions s'écrivent :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Examen de rattrapage, Janvier 2017 (USTHB)

Licence L2-ST

Durée 1h30

Exercice 1

Une poulie de moment d'inertie J_0 , constituée de deux disques de rayons respectifs r et $2r$, peut osciller sans frottement autour d'un axe fixe, passant par son centre de gravité. Deux masses $m_1 = m$ et $m_2 = m$ sont fixées aux extrémités d'une tige de masse négligeable et de longueur 2ℓ , soudée à la poulie. Cette poulie est reliée d'une part à un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α , fixés à un bâti fixe comme l'indique la figure 1. On suppose qu'à l'équilibre la tige est verticale ($\theta = 0 \text{ rad}$). On abandonne le système après l'avoir écarté de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 suffisamment faible pour admettre les approximations des faibles angles. Pour un amortissement négligeable ($\alpha = 0$).

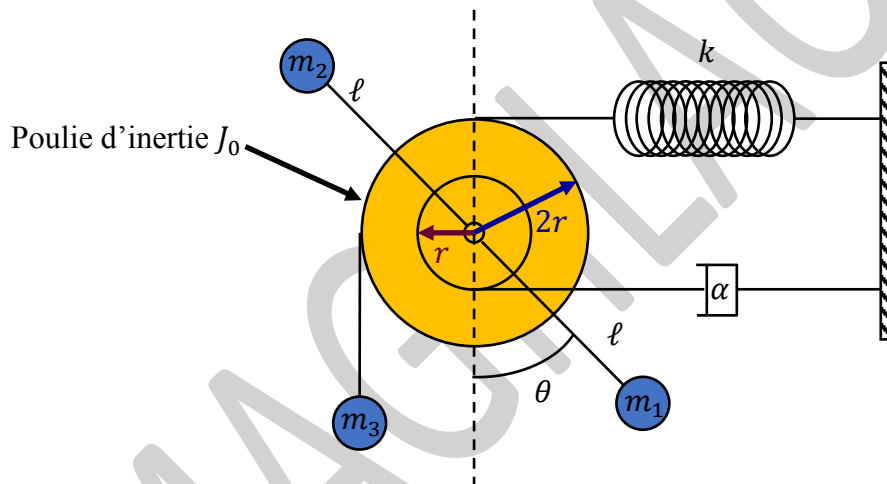


Figure 1

1. Exprimer l'énergie cinétique T , l'énergie potentielle U et le Lagrangien du système en fonction de θ .
2. Etablir l'équation du mouvement en précisant l'expression de la pulsation propre ω_0 .
3. Pour un amortissement non nul ($\alpha \neq 0$), trouver la nouvelle équation différentielle du mouvement. Dédurre l'expression du facteur d'amortissement δ et donner l'expression de la solution $\theta(t)$ en régime pseudo-périodique.

On donne :

$$\theta(0) = \frac{\pi}{36} \text{ rad}, \dot{\theta}(0) = 0 \text{ rad s}^{-1}$$

Application numérique :

$$m = 3 \text{ kg}, \ell = 0.5 \text{ m}, r = 0.2 \text{ m}, k = 5225 \text{ N m}^{-1}, \alpha = 2463 \text{ k s}^{-1}, J_0 = 5 \text{ kg m}^2 \quad \text{et} \quad g = 10 \text{ m s}^{-2}$$

Exercice 2

Une force sinusoïdale de forme $F(t) = F_0 e^{j\omega t}$ est appliquée sur la masse m_2 du système précédent (Figure 2).

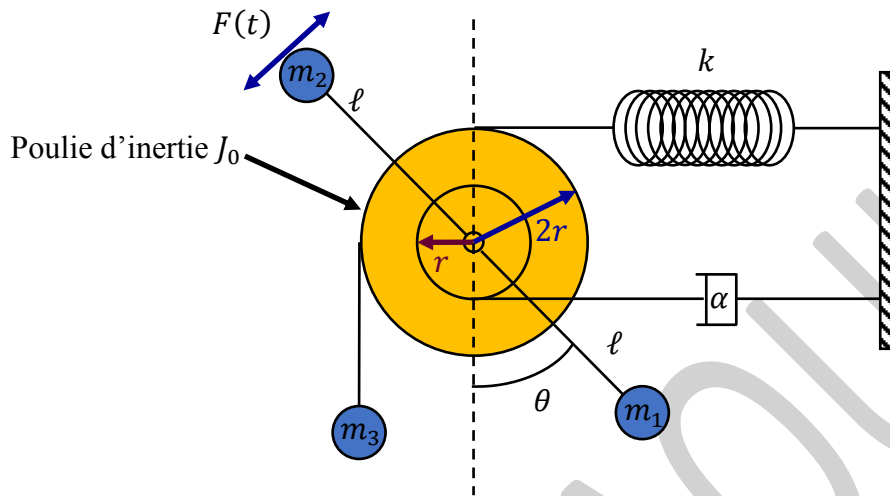


Figure 2

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
2. Donner sa solution en régime permanent.
3. Pour $\omega = \omega_0$, calculer le module de l'amplitude et le déphasage φ entre la réponse du système et la force appliquée.

On donne : $F_0 = 200 \text{ N}$.

Exercice 3

Un cylindre homogène de masse $m_1 = m$ et de rayon R peut rouler sans glisser au-dessus d'un plateau de masse $m_2 = 2m$ qui peut coulisser sans frottement sur un plan horizontal. Un premier ressort de raideur k relie l'axe du cylindre au plateau, lui-même relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un second ressort de raideur k . Ecarté de sa position d'équilibre puis relâché, le système effectue des oscillations de faibles amplitudes. On décrit ce système à l'aide des deux coordonnées x_1 et x_2 (Figure 3).

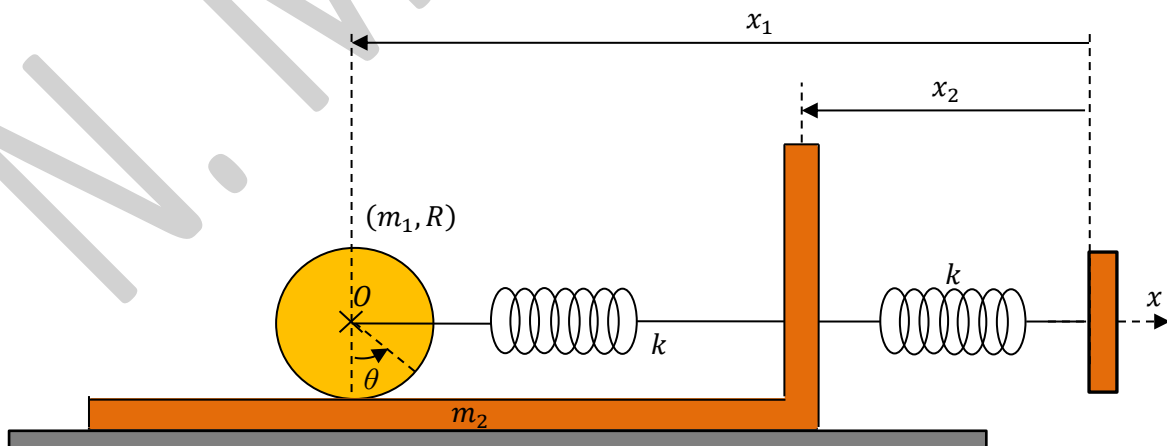


Figure 3

1. Montrer que le Lagrangien du système s'écrit sous la forme suivante :

$$L = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} m \dot{x}_1^2 - m \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{5}{2} m \dot{x}_2^2 \right] - \frac{1}{2} [k x_1^2 + 2k x_2^2 - 2k x_1 x_2]$$

2. Etablir les équations différentielles du mouvement en x_1 et x_2 , puis déterminer les deux pulsations propres du système.
3. Déterminer les rapports d'amplitudes correspondant à ces pulsations propres.

Exercice 4

Les deux masses du système de la figure 4 sont couplées par un ressort de raideur k_0 et par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α_0 . Deux ressorts de raideurs k_1 et k_2 et deux amortisseurs de coefficients visqueux α_1 et α_2 relient les deux masses m_1 et m_2 à des bâtis fixes. Une force sinusoïdale de la forme $F(t) = F_0 e^{j\omega t}$, est appliquée à la masse m_2 (Figure 4). x_1 et x_2 sont respectivement les déplacements des masses m_1 et m_2 .

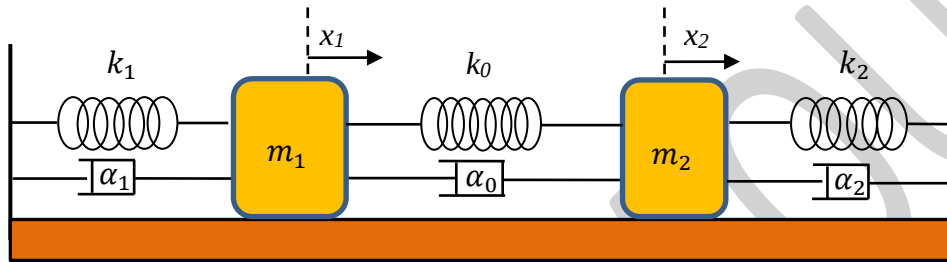


Figure 4

1. Etablir les équations différentielles du mouvement en fonction de x_1 et x_2 .
2. Donner les équations intégral-différentielles du mouvement.
3. Calculer l'impédance d'entrée du système dans le cas des faibles amortissements ($\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$).

Solution

Exercice 1

1. Pour $\alpha = 0$,

L'énergie cinétique du système :

$$T = \frac{1}{2}(J_0 + 3m\ell^2 + 8mr^2)\dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle du système :

$$U = \frac{1}{2}(4kr^2 - mg\ell)\theta^2$$

Le Lagrangien du système est :

$$L = T - U = \frac{1}{2}[(J_0 + 3m\ell^2 + 8mr^2)\dot{\theta}^2 - (4kr^2 - mg\ell)\theta^2]$$

2. L'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(4kr^2 - mg\ell)}{(J_0 + 3m\ell^2 + 8mr^2)}}$$

3. Pour $\alpha \neq 0$, la fonction de dissipation est :

$$D = \frac{1}{2}\alpha r^2\dot{\theta}^2$$

L'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Avec :

$$\delta = \frac{\alpha r^2}{2(J_0 + 3m\ell^2 + 8mr^2)}$$

La solution dans le cas du régime oscillatoire amorti est :

$$\theta(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi) \text{ avec : } \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Application numérique :

$$\omega_0 = 10 \text{ rd s}^{-1}, \delta = 6 \text{ s}^{-1}, \omega_a = 8 \text{ rd s}^{-1}$$

Les conditions initiales permettent de trouver :

$$A = \theta(0) \frac{\omega_0}{\omega_a} = 0.11 \text{ rd s}^{-1}$$

et

$$\varphi = -\text{Arctg} \frac{\delta}{\omega_a} = -0.64 \text{ rd}$$

Exercice 2

1. L'équation du mouvement est :

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = Ce^{j\omega t}$$

Avec :

$$C = \frac{F_0\ell}{(J_0 + 3m\ell^2 + 8mr^2)}$$

2. La solution du régime permanent est de la même forme que le second membre :

$$\theta(t) = \theta_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

θ_0 représente son amplitude et φ sa phase.

$$\theta_0 = \frac{C}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$\varphi = -\text{Arctg} \frac{2\delta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

3. Pour $\omega = \omega_0$

$$\theta_0 = \frac{C}{2\delta\omega_0} = 0.10 \text{ rd}$$

et

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ rd}$$

Exercice 3

1. Le Lagrangien du système :

$$T = T_{m_1} + T_{m_2}$$

$$T_{m_1} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1R^2}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2\right]$$

Avec :

$$x_1 = x_2 + R\theta \Rightarrow R\dot{\theta} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2$$

De plus :

$$T_{m_2} = \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 = \frac{1}{2}2m\dot{x}_2^2$$

Nous obtenons :

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}m\dot{x}_1^2 - m\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{5}{2}m\dot{x}_2^2\right]$$

L'énergie potentielle du système :

$$U = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}[kx_1^2 + 2kx_2^2 - 2kx_1x_2]$$

Nous trouvons :

$$L = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}m\dot{x}_1^2 - m\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{5}{2}m\dot{x}_2^2\right] - \frac{1}{2}[kx_1^2 + 2kx_2^2 - 2kx_1x_2]$$

2. Les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} \frac{3}{2}m\ddot{x}_1 - \frac{1}{2}m\ddot{x}_2 + kx_1 - kx_2 = 0 \\ \frac{5}{2}m\ddot{x}_2 - \frac{1}{2}m\ddot{x}_1 + 2kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

L'équation caractéristique qui permet le calcul des pulsations propres :

$$\left(k - \frac{3}{2}m\omega^2\right)\left(2k - \frac{5}{2}m\omega^2\right) - \left(k - \frac{1}{2}m\omega^2\right)^2 = 0$$

On obtient :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{7m}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3. Les solutions x_1 et x_2 s'écrivent :

$$\begin{cases} x_1 = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 = A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Les rapports d'amplitudes sont :

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{2}{3}, \frac{A_{22}}{A_{12}} = -1$$

Exercice 4

1. Les énergies cinétique et potentielle du système sont :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \\ U &= \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}k_0(x_2 - x_1)^2 \end{aligned}$$

La fonction de dissipation :

$$D = \frac{1}{2}\alpha_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_0(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2$$

Le travail de la force extérieure :

$$W = F x_2$$

Les équations du mouvement :

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + \alpha_1\dot{x}_1 + \alpha_0(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1x_1 + k_0(x_1 - x_2) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + \alpha_2\dot{x}_2 + \alpha_0(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2x_2 + k_0(x_2 - x_1) = F \end{cases}$$

2. Les équations intégrées-différentielles :

$$\begin{cases} m_1 \frac{d\dot{x}_1}{dt} + \alpha_1\dot{x}_1 + \alpha_0(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 \int \dot{x}_1 dt + k_0 \int (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) dt = 0 \\ m_2 \frac{d\dot{x}_2}{dt} + \alpha_2\dot{x}_2 + \alpha_0(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 \int \dot{x}_2 dt + k_0 \int (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) dt = F \end{cases}$$

3. Dans le cas des faibles amortissements ($\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$), les équations aux vitesses en notation complexe sont :

$$\begin{cases} jm_1\omega\dot{x}_1 + \frac{k_1}{j\omega}\dot{x}_1 + \frac{k_0}{j\omega}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = 0 \\ jm_2\omega\dot{x}_2 + \frac{k_2}{j\omega}\dot{x}_2 + \frac{k_0}{j\omega}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = F \end{cases}$$

A partir des deux équations :

$$Z_e = \frac{F}{\dot{x}_2} = \frac{(k_1 + k_0 - m_1\omega^2)(k_2 + k_0 - m_2\omega^2) - k_0^2}{j\omega(k_1 + k_0 - m_1\omega^2)}$$

Examen Final Physique 3, Février 2020 (ENST Dergana)

Licence L2-ST

Durée 1h30

Exercice 1

Deux tiges, de longueur $2L$ (de masse négligeable), sont soudées ensemble à angle droit (Figure 1). Les tiges portent à leurs extrémités des masses ponctuelles m et peuvent tourner autour de l'axe horizontal fixe passant par le point de soudure. Les frottements sont symbolisés par l'amortisseur de coefficient α .

A l'équilibre (représenté en pointillés) le ressort n'est pas déformé.

1. Trouver l'énergie cinétique T , l'énergie potentielle U , ainsi que la fonction de dissipation D (dans le cas des faibles amplitudes).
2. Trouver le Lagrangien et déduire l'équation du mouvement.
3. Sachant que $\alpha = 16 \text{ kg s}^{-1}$, $m = 1 \text{ kg}$, $k = 16 \text{ Nm}^{-1}$: trouver la nature du mouvement.
4. Quelle est la valeur de α à ne pas dépasser pour avoir des oscillations.
5. Pour quelle valeur de α l'amplitude diminue à $1/7$ de sa valeur initiale après 2 oscillations complètes (On supposera que $T_a \approx T_0$).
6. Donner le circuit électrique équivalent en explicitant l'analogie mécanique-électrique.

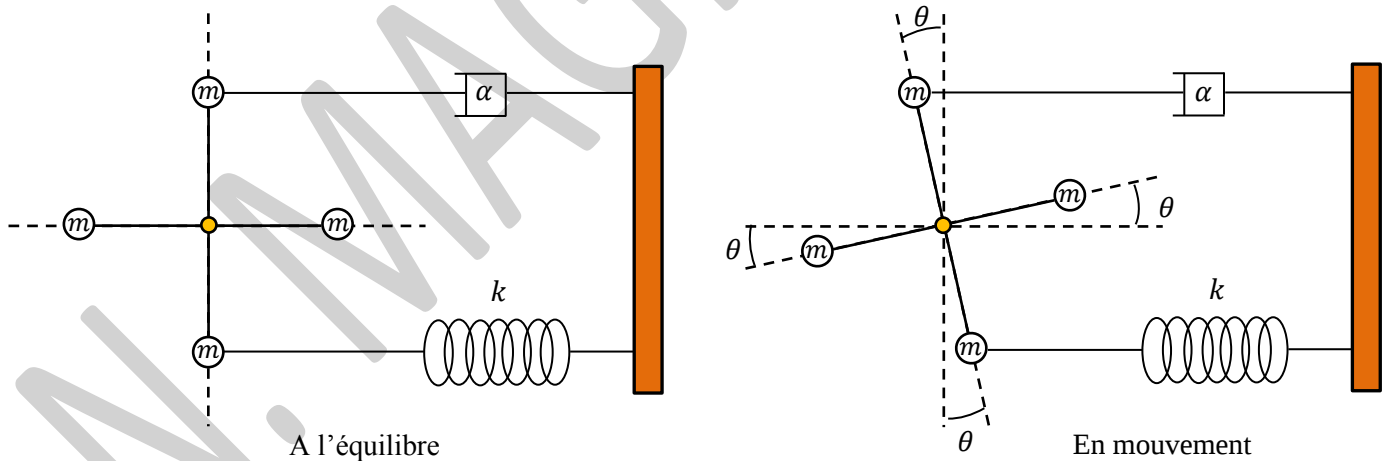


Figure 1

Exercice 2

Soit le système mécanique décrit par la figure 2. Le système mécanique se compose d'une tige homogène (m, l) , pouvant tourner autour d'un axe fixe (Δ) , perpendiculaire au plan de la feuille. Cette tige est reliée à un bâti fixe par un ressort parfait k_1 et à une masse M par un ressort parfait k_2 . Les allongements des ressorts à l'équilibre sont nuls. On travaillera dans le cadre des faibles amplitudes avec les deux degrés de liberté $x_1(t) = l\theta(t)$ et $x_2(t)$.

Partie A (Oscillation libre)

1. Déterminer l'énergie potentielle du système.
2. Déterminer l'énergie cinétique du système.
3. Ecrire les équations du mouvement du système.
4. En prenant

$$m = 12M, \quad k_1 \frac{a^2}{l^2} - m \frac{g}{2l} = 3k, \quad k_2 = k$$

calculer les pulsations propres ω_1 et ω_2 ainsi que les rapports d'amplitudes.

5. En déduire les solutions générales $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de cet oscillateur.
6. Déterminer les solutions générales $x_1(t)$ et $x_2(t)$ dans les conditions initiales suivantes :

$$x_1(t=0) = x_0, \quad x_2(t=0) = 0 \text{ et } \dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_2(t=0) = 0$$

7. Montrer que la solution $x_1(t)$ s'écrit sous la forme : $x_1(t) = A \cos(pt) \cos(qt)$ où $p < q$. Quel est le phénomène observé ?

8. Que représentent $2\pi/p$ et $2\pi/q$?

On rappelle que

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

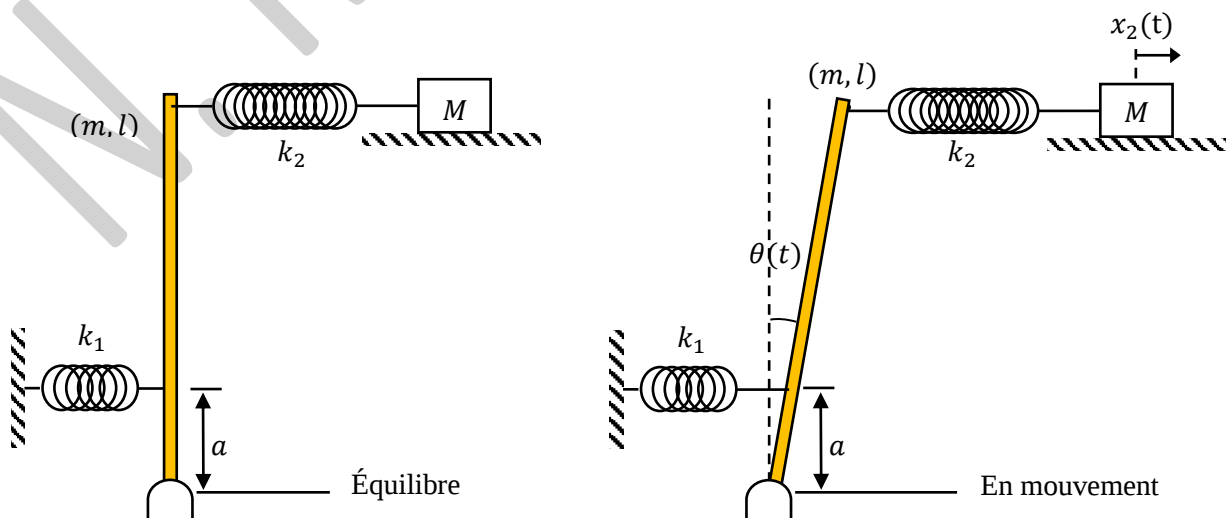


Figure 2

Partie B (Oscillation forcée)

On applique au niveau de la masse M une force sinusoïdale d'amplitude F_0 et de pulsation ω (Figure 3).
On donne : $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$.

1. Déterminer les équations différentielles du mouvement.
2. Déterminer les équations aux vitesses.
3. Calculer l'impédance d'entrée du système mécanique Z_e .
4. Pour quelle pulsation la masse M reste-t-elle immobile. Quelle est dans ce cas l'impédance d'entrée.

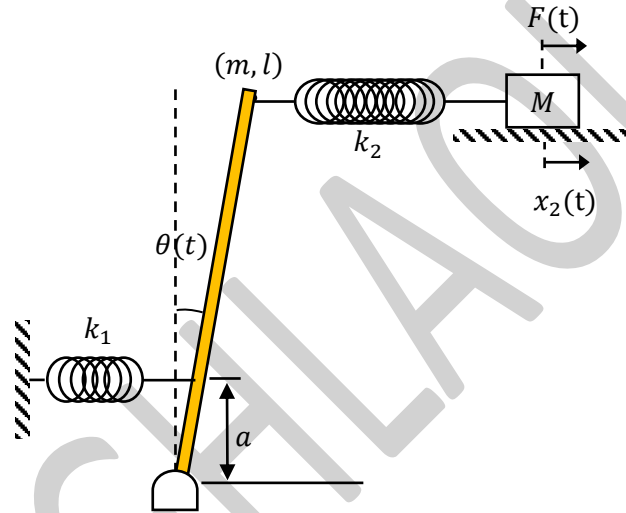


Figure 3

Solution

Exercice 1

1. Energie cinétique

$$T = 4T_m = \frac{1}{2} 4ml^2 \dot{\theta}^2$$

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2} kl^2 \theta^2$$

Fonction de dissipation

$$U = \frac{1}{2} \alpha l^2 \dot{\theta}^2$$

2. Le Lagrangien du système

$$L = T - U = \frac{1}{2} 4ml^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} kl^2 \theta^2$$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

ce qui donne :

$$4ml^2 \ddot{\theta} + \alpha l^2 \dot{\theta} + kl^2 \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{4m} \dot{\theta} + \frac{k}{4m} \theta = 0$$

3. L'équation se met sous la forme

$$\ddot{\theta} + 2\delta \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

avec :

$$\delta = \frac{\alpha}{8m} = 2 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{4m}} = 2 \text{ rad s}^{-1}$$

$\delta = \omega_0$, nous sommes donc dans le régime critique.

4. Pour avoir des oscillations :

$$\delta < \omega_0 \Rightarrow \alpha < \sqrt{16km}$$

donc : $\alpha < 16 \text{ kg s}^{-1}$.

5. Nous avons le décrétement logarithmique :

$$D = \frac{1}{2} \ln(7) = 0.97$$

Comme :

$$\delta = \frac{D}{T_a} = \frac{D}{T_0} = \frac{D\omega_0}{2\pi} = 0.31 \text{ s}^{-1}$$

Finalement, nous obtenons: $\alpha = 8\delta m = 2.48 \text{ kg s}^{-1}$.

6. Circuit équivalent :

$$4im\omega\dot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \frac{k}{i\omega}\dot{\theta} = 0$$

$$\dot{\theta} \Leftrightarrow I, 4m \Leftrightarrow L, \alpha \Leftrightarrow R, k \Leftrightarrow 1/C$$

Le circuit électrique.

Exercice 2

Partie A (Oscillation libre)

1. L'énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{2}k_1(a\theta)^2 - mg\frac{l}{2}\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2}k_2(x_2 - l\theta)^2$$

$$U = \frac{1}{2}x_1^2 \left(k_1 \frac{a^2}{l^2} - m \frac{g}{2l} \right) + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$$

2. L'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{3}\dot{x}_1^2$$

3. L'équation du mouvement est :

$$\begin{cases} \frac{m}{3}\ddot{x}_1 + \left(k_1 \frac{a^2}{l^2} - m \frac{g}{2l} + k_2 \right) x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ M\ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0 \end{cases}$$

4. Dans le cas où

$$m = 12M, \quad k_1 \frac{a^2}{l^2} - m \frac{g}{2l} = 3k, \quad k_2 = k$$

Les équations du mouvement deviennent :

$$\begin{cases} 4M\ddot{x}_1 + 4kx_1 - kx_2 = 0 \\ M\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

Les solutions générales s'écrivent :

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t}, x_2 = A_2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} (-4M\omega^2 + 4k)x_1 - kx_2 = 0 \\ (-M\omega^2 + k)x_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

ou bien :

$$\begin{bmatrix} (-4M\omega^2 + 4k) & -k \\ -k & (-M\omega^2 + k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pour que ce système admette des solutions non triviales, il faudrait que :

$$\begin{vmatrix} (-4M\omega^2 + 4k) & -k \\ -k & (-M\omega^2 + k) \end{vmatrix} = 0$$

$$(-4M\omega^2 + 4k)(-M\omega^2 + k) - k^2 = 0$$

Les pulsations propres sont alors :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2M}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{2M}}$$

$$\begin{cases} x_1 = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 = A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Les rapports d'amplitudes sont dans les deux modes sont :

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{A_{22}}{A_{12}} = -2$$

5. Les solutions sont :

$$\begin{cases} x_1 = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 = 2A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - 2A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

où A_{11} , A_{12} , φ_1 et φ_2 sont déterminés à partir des conditions initiales.

6. Les conditions initiales suivantes :

$$x_1(t=0) = x_0, \quad x_2(t=0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_2(t=0) = 0$$

permettent de trouver :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 = 0 \\ A_{11} &= A_{12} = \frac{x_0}{2} \end{aligned}$$

En injectant dans les expressions de x_1 et x_2 :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_0}{2} [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] \\ x_2 = x_0 [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)] \end{cases}$$

7. En utilisant les relations trigonométriques nous avons :

$$x_1 = \frac{x_0}{2} [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] = x_0 \left\{ \cos\left[\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t\right] \cos\left[\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)t\right] \right\}$$

Par identification :

$$p = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}, q = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$$

$2\pi/p$ représente la période de modulation qui est le double de la période de battement, $2\pi/q$ la période d'oscillation.

Partie B (Oscillation forcée)

1. Le travail de la force extérieure est :

$$W = Fx_2$$

Les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} 4M\ddot{x}_1 + 4kx_1 - kx_2 = 0 \\ M\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = F(t) \end{cases}$$

2. Les solutions s'écrivent :

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t}, x_2 = A_2 e^{i\omega t}$$

$$x_{1,2} = \frac{\dot{x}_{1,2}}{i\omega}, \quad \ddot{x}_{1,2} = i\omega \dot{x}_{1,2}$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} 4iM\omega \dot{x}_1 + \frac{4k}{i\omega} \dot{x}_1 - \frac{k}{i\omega} \dot{x}_2 = 0 \\ iM\omega \dot{x}_2 + \frac{k}{i\omega} \dot{x}_2 - \frac{k}{i\omega} \dot{x}_1 = F(t) \end{cases}$$

3. A partir des équations aux vitesses nous trouvons :

$$Z_e = \frac{F(t)}{\dot{x}_2(t)} = \frac{(k - M\omega^2)(4k - 4M\omega^2) - k^2}{i\omega(4k - 4M\omega^2)}$$

4. La masse M est immobile si sa vitesse est nulle $\dot{x}_2 = 0$.

La pulsation est donc :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Cela correspond à une impédance infinie $Z_e \rightarrow \infty$.

Examen Final Physique 4, Octobre 2020 (ENST Dergana)

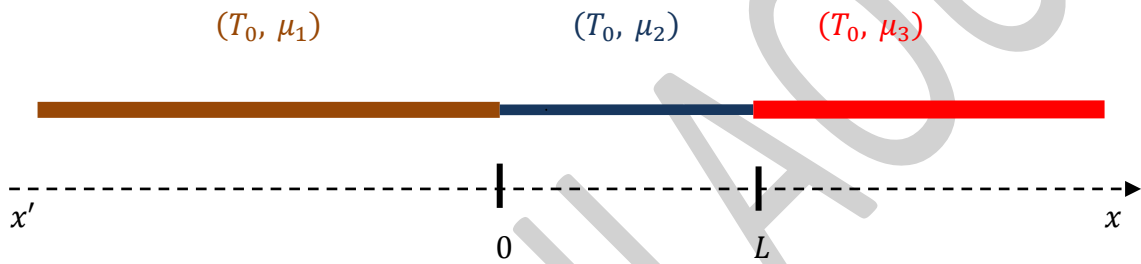
Licence L2-ST

Durée 1h30

Exercice 1

Le système ci-dessous est composé d'une corde homogène de masse linéique μ_2 et de longueur L , placée entre deux cordes homogènes μ_1 et μ_3 semi infinies (Figure 1). Les cordes sont tendues horizontalement avec une tension constante T_0 , très grande devant leurs poids. Nous étudions le cas des vibrations transversales de faibles amplitudes.

Figure 1



Une onde plane, progressive et sinusoïdale, de pulsation ω et d'amplitude A , se propage le long de la corde (1), de masse linéique μ_1 .

On notera les déplacements des particules dans chaque région :

$$y(x, t) = \begin{cases} y_1(x, t) & \text{pour } x \leq 0 \\ y_2(x, t) & \text{pour } 0 \leq x \leq L \\ y_3(x, t) & \text{pour } x \geq L \end{cases}$$

1. Donner en justifiant les expressions des déplacements $y_1(x, t)$, $y_2(x, t)$ et $y_3(x, t)$ dans les trois cordes.
2. Montrer que ce système peut être remplacé par le système de la figure 2, dont il faut déterminer l'impédance Z_L .

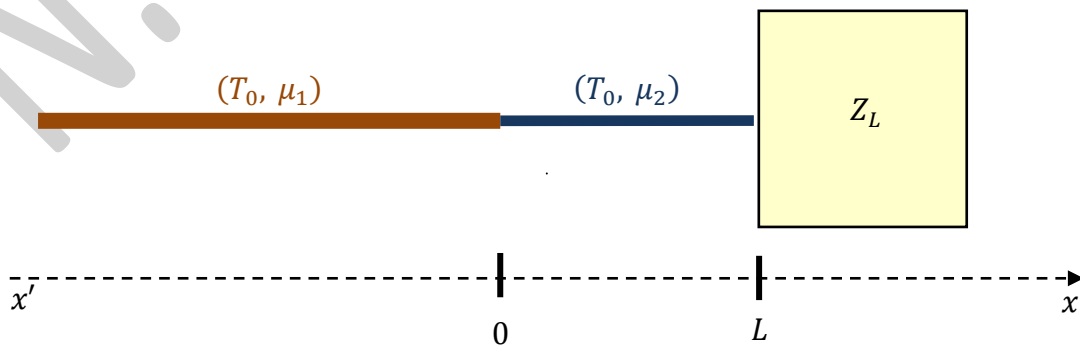


Figure 2

3. Déterminer l'impédance $Z(x)$ en un point quelconque de la corde 2 (μ_2, T_0), en fonction de Z_{c_2}, Z_{c_3}, k_2 et L . Calculer son expression $Z(x = 0)$.
4. Est-il possible d'annuler la réflexion au niveau de la frontière $x = 0$. Comment ?

Exercice 2

Le tuyau de longueur supposée infinie est parcouru par une onde dont la variation de la masse volumique est :

$$\rho(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$$

3. Calculer la vitesse de particules $\dot{u}(x, t)$ et du déplacement associé $u(x, t)$.
4. Calculer la pression acoustique $p(x, t)$.
5. Calculer de la puissance acoustique à travers une section perpendiculaire à la vitesse de propagation de l'onde.
6. Calculer l'intensité de l'onde.
7. Déterminer l'expression de l'intensité acoustique de cette onde et en déduire la valeur numérique des amplitudes de la pression P_0 , de la vitesse des particules $\dot{U}_0$ et l'amplitude du déplacement U_0 :

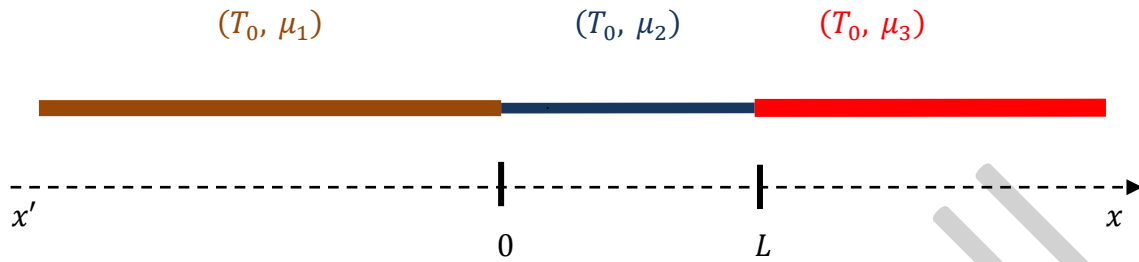
$$I = 10^{-3} \text{ W m}^{-2} ; f = 1 \text{ kHz } V = 1500 \text{ m s}^{-1}, \rho_0 = 10^3 \text{ kg m}^{-3}.$$

8. On désire mesurer la vitesse de propagation de l'onde dans le fluide, pour cela nous fermons le tuyau en $x = L$ par une paroi rigide. A l'aide d'un microphone sensible à l'intensité du son qu'on déplace à l'intérieur du tuyau et d'un oscilloscope, on mesure la distance entre deux ventres successifs $d = 3.38 \text{ cm}$. Sachant que la fréquence est égale à $f = 2.5 \text{ kHz}$. Calculer la vitesse de l'onde acoustique. Quel est alors le fluide en question ?

Solution

Exercice 1

Figure 1



Une onde plane, progressive et sinusoïdale, de pulsation ω et d'amplitude A , se propage le long de la corde (1), de masse linéique μ_1 .

On notera les déplacements des particules dans chaque région :

$$y(x, t) = \begin{cases} y_1(x, t) & \text{pour } x \leq 0 \\ y_2(x, t) & \text{pour } 0 \leq x \leq L \\ y_3(x, t) & \text{pour } x \geq L \end{cases}$$

1. Donner en justifiant les expressions des déplacements $y_1(x, t)$, $y_2(x, t)$ et $y_3(x, t)$ dans les trois cordes.

$$y_1(x, t) = Ae^{i(\omega t - k_1 x)} + Be^{i(\omega t + k_1 x)}$$

$$y_2(x, t) = Ce^{i(\omega t - k_2 x)} + De^{i(\omega t + k_2 x)}$$

$$y_3(x, t) = Ee^{i(\omega t - k_3 x)}$$

2. Montrer que ce système peut être remplacé par le système de la figure 2, dont il faut déterminer l'impédance Z_L .

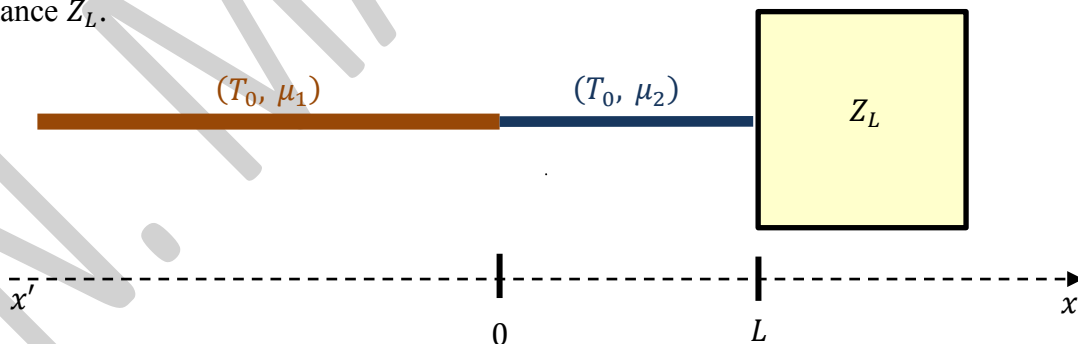


Figure 2

$$Z(x = L) = \frac{-T_0 \frac{\partial y_2}{\partial x}}{\frac{\partial y_2}{\partial t}} \bigg|_{x=L} = \frac{-T_0 \frac{\partial y_3}{\partial x}}{\frac{\partial y_3}{\partial t}} \bigg|_{x=L} = Z_{c_3}$$

3. Déterminer l'impédance $Z(x)$ en un point quelconque de la corde 2 (μ_2, T_0), en fonction de Z_{c_2} , Z_{c_3} , k_2 et L . Calculer son expression $Z(x = 0)$.

$$Z(x) = \frac{-T_0 \frac{\partial y_2}{\partial x}}{\frac{\partial y_2}{\partial t}} = Z_{c_2} \frac{C e^{-ik_2 x} - D e^{ik_2 x}}{C e^{-ik_2 x} + D e^{ik_2 x}} = Z_{c_2} \frac{e^{-ik_2 x} - \frac{D}{C} e^{ik_2 x}}{e^{-ik_2 x} + \frac{D}{C} e^{ik_2 x}}$$

La condition en $x = L$ permet d'écrire :

$$\frac{D}{C} = \frac{Z_{c_2} - Z_{c_3}}{Z_{c_2} + Z_{c_3}} e^{-2ik_2 L}$$

En remplaçant cette dernière dans l'expression de $Z(x)$:

$$Z(x) = Z_{c_2} \frac{e^{-ik_2 x} - \frac{Z_{c_2} - Z_{c_3}}{Z_{c_2} + Z_{c_3}} e^{ik_2(x-2L)}}{e^{-ik_2 x} + \frac{Z_{c_2} - Z_{c_3}}{Z_{c_2} + Z_{c_3}} e^{ik_2(x-2L)}}$$

$$Z(x) = Z_{c_2} \frac{(Z_{c_2} + Z_{c_3})e^{ik_2(L-x)} - (Z_{c_2} - Z_{c_3})e^{ik_2(x-L)}}{(Z_{c_2} + Z_{c_3})e^{ik_2(L-x)} + (Z_{c_2} - Z_{c_3})e^{ik_2(x-L)}}$$

On pose : $\alpha = k_2(L - x)$.

$$Z(x) = Z_{c_2} \frac{(Z_{c_2} + Z_{c_3})e^{i\alpha} - (Z_{c_2} - Z_{c_3})e^{-i\alpha}}{(Z_{c_2} + Z_{c_3})e^{i\alpha} + (Z_{c_2} - Z_{c_3})e^{-i\alpha}}$$

$$Z(x) = Z_{c_2} \frac{Z_{c_2}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) + Z_{c_3}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})}{Z_{c_2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) + Z_{c_3}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})} = Z_{c_2} \frac{iZ_{c_2} \sin \alpha + Z_{c_3} \cos \alpha}{Z_{c_2} \cos \alpha + iZ_{c_3} \sin \alpha}$$

Qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Z(x) = Z_{c_2} \frac{Z_{c_3} + iZ_{c_2} \operatorname{tg} \alpha}{Z_{c_2} + iZ_{c_3} \operatorname{tg} \alpha}$$

Nous vérifions que $Z(x = L) = Z_{c_3}$.

4. Est-il possible d'annuler la réflexion au niveau de la frontière $x = 0$. Comment ?

Afin d'assurer une transmission totale :

$$Z(x = 0) = Z_{c_1}$$

$$Z_{c_1} = Z_{c_2} \frac{Z_{c_3} + iZ_{c_2} \operatorname{tg}(k_2 L)}{Z_{c_2} + iZ_{c_3} \operatorname{tg}(k_2 L)}$$

Pour cela, il faudrait que :

- $\operatorname{tg}(k_2 L) \rightarrow \infty$

d'où :

$$L = (2n + 1) \frac{\lambda_2}{4}$$

- et $Z_{c_2} = \sqrt{Z_{c_1} Z_{c_3}}$

Exercice 2

Le tuyau de longueur supposée infinie est parcouru par une onde dont la variation de la masse volumique est :

$$\rho(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}$$

1. Calculer la vitesse de particules $\dot{u}(x, t)$ et du déplacement associé $u(x, t)$.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = -i\omega \rho$$

Nous trouvons :

$$\dot{u}(x, t) = \frac{V}{\rho_0} Ae^{i(\omega t - kx)}$$

Le déplacement est :

$$u(x, t) = \frac{\dot{u}(x, t)}{i\omega} = \frac{V}{i\omega \rho_0} Ae^{i(\omega t - kx)}$$

2. Calculer la pression acoustique $p(x, t)$.

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = 0$$

Nous obtenons :

$$p(x, t) = V^2 Ae^{i(\omega t - kx)}$$

3. Calculer de la puissance acoustique à travers une section perpendiculaire à la vitesse de propagation de l'onde.

$$\mathbb{P} = S p(x, t) \dot{u}(x, t) = \frac{SV^3}{\rho_0} A^2 [\cos(\omega t - kx)]^2$$

4. Calculer l'intensité de l'onde.

$$I = \frac{\mathbb{P}}{S} = \frac{V^3}{\rho_0} A^2 [\cos(\omega t - kx)]^2$$

5. Déterminer l'expression de l'intensité acoustique de cette onde et en déduire la valeur numérique des amplitudes de la pression P_0 , de la vitesse des particules $\dot{U}_0$ et l'amplitude du déplacement U_0 :

$$I = 10^{-3} \text{ W m}^{-2} ; f = 1 \text{ kHz } V = 1500 \text{ m s}^{-1}, \rho_0 = 10^3 \text{ kg m}^{-3}.$$

$$P_0 = \sqrt{2\rho_0 V I} = 54.77 \text{ Pa}$$

$$\dot{U}_0 = \frac{P_0}{\rho_0 V} = 3.65 \cdot 10^{-5} m \cdot s^{-1} = 36.15 \mu m \cdot s^{-1}$$

$$U_0 = \frac{\dot{U}_0}{2\pi f} = 5.81 \cdot 10^{-9} m = 5.81 nm$$

6. On désire mesurer la vitesse de propagation de l'onde dans le fluide, pour cela nous fermons le tuyau en $x = L$ par une paroi rigide. A l'aide d'un microphone sensible à l'intensité du son qu'on déplace à l'intérieur du tuyau et d'un oscilloscope, on mesure la distance entre deux ventres successifs $d = 3.38 cm$. Sachant que la fréquence est égale à $f = 2.5 kHz$. Calculer la vitesse de l'onde acoustique. Quel est alors le fluide en question ?

$$d = \frac{\lambda}{4} = \frac{V}{4f} \Rightarrow V = 4fd = 338 ms^{-1}$$

Le fluide en question est l'air.

Examen Final Physique 3, Mars 2021 (ENST)

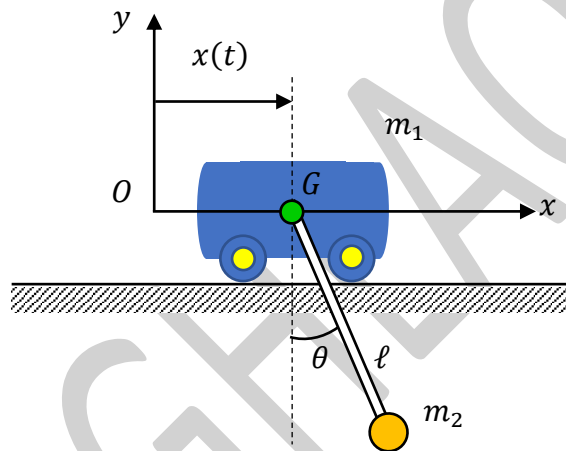
Licence L2-ST

Durée 2h

Exercice 1

Le système de la figure ci-dessous est constitué par un chariot de masse m_1 se déplaçant sur un rail horizontal. Un pendule de longueur ℓ porte à l'une de ses extrémités une masse m_2 supposée ponctuelle. Son autre extrémité est reliée en un point G du chariot qui sert de pivot pour le pendule. Le déplacement du chariot, mesuré à partir de sa position d'équilibre, décrit un mouvement sinusoïdal :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \quad (\omega \neq g/\ell)$$



Le pendule est repéré par l'angle θ par rapport à la verticale. A l'équilibre, le pendule est vertical.

1. Calculer le lagrangien du système.
2. Montrer que l'équation différentielle du mouvement en θ prend la forme :

$$\ell \ddot{\theta} + \ddot{x} \cos \theta + g \sin \theta = 0$$

3. Ecrire l'équation différentielle (1) dans le cas des oscillations de faibles amplitudes. On posera :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$$

4. Déterminer dans ce cas l'expression de la solution $\theta_f(t)$ de cette équation différentielle en régime permanent.
5. En déduire la solution générale $\theta(t)$.
6. En imposant au système les conditions initiales : $\theta(0) = 0 \text{ rd}$ et $\dot{\theta}(0) = 0 \text{ rd s}^{-1}$, trouver la solution $\theta(t)$.

Exercice 2

Partie A : Oscillations libres.

On considère un pendule constitué par une tige rigide (Figure 1), de masse négligeable et de longueur ℓ , portant à l'une de ses deux extrémités une masse m_0 . Le pendule est couplé au moyen d'un ressort de raideur k à un oscillateur constitué d'un chariot de masse m_0 qui se déplace sans frottement sur un plan horizontal et d'un ressort de raideur k_0 qui relie le chariot à un bâti fixe (B). Le pendule peut tourner dans un plan vertical autour d'un axe fixe (Δ) passant par O. On désigne par x_1 le déplacement du chariot compté à partir de sa position d'équilibre et par θ l'angle que fait la tige avec la verticale. A l'équilibre, lorsque la tige est verticale, les ressorts sont horizontaux et non déformés. On ne s'intéresse qu'aux faibles oscillations du système.

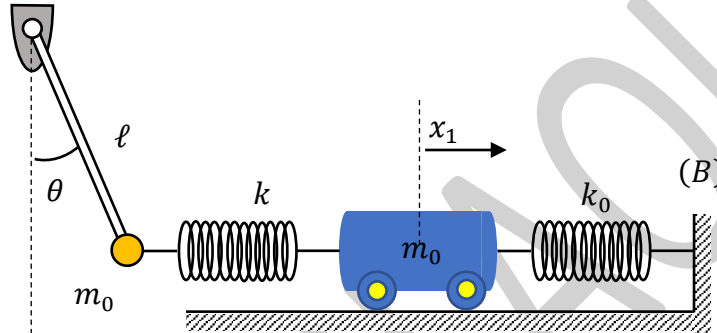
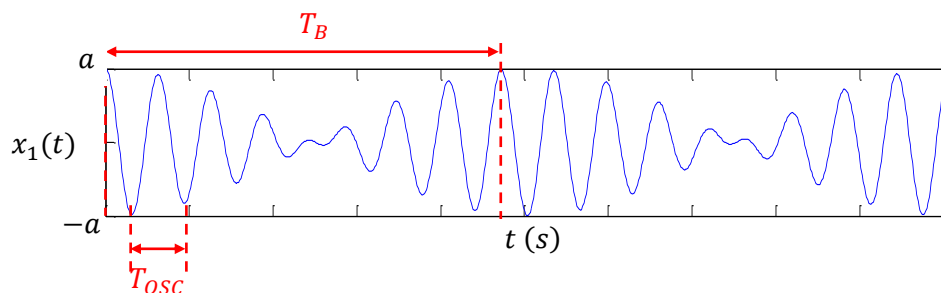


Figure 1

1. Etablir les équations différentielles du mouvement en x_1 et θ du système.
2. Les exprimer en fonction de x_1 et $x_2 = \ell\theta$ puis déterminer par la méthode de votre choix les pulsations propres ω_1 et ω_2 de ce système dans le cas où :

$$\frac{m_0 g}{\ell} = k_0$$

3. Déterminer pour chacun des modes propres de ce système le rapport des amplitudes des oscillations en $x_2(t)$ et en $x_1(t)$.
4. On suppose maintenant que les deux oscillateurs sont couplés par un ressort de raideur faible: $k \ll k_0$. A l'instant $t = 0$, on bloque le pendule à sa position verticale et on écarte le chariot de x_0 par rapport à sa position d'équilibre puis on abandonne l'ensemble du système sans vitesse initiale.
 - a. Etablir les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ (pulsations propres et rapports d'amplitudes).
 - b. Le graphe ci-dessous donne l'allure de $x_1(t)$. Expliquer le mouvement que décrit le chariot. Comment appelle-t-on ce phénomène ?
 - c. La mesure des deux périodes T_{osc} et T_B à partir graphe de $x_1(t)$ donne: $T_{osc} = 0.57 \text{ s}$ et $T_B = 6,85 \text{ s}$. En déduire les valeurs des raideurs k_0 et k sachant que $m_0 = 200 \text{ g}$.



Partie B : Oscillations amorties forcées.

On reprend le système mécanique précédent et on place un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α en parallèle avec le ressort de raideur k_0 (Figure 2). De plus, une force extérieure sinusoïdale $F(t) = F_0 \cos \omega t$ est appliquée sur le chariot. La raideur k du ressort de couplage n'est pas faible. On prendra comme dans la partie A :

$$\frac{m_0 g}{\ell} = k_0$$

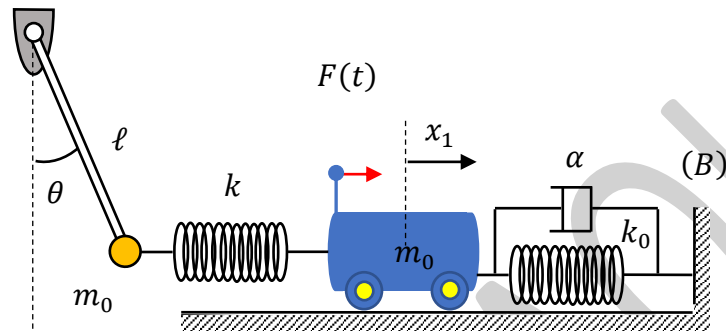


Figure 2

1. Ecrire les nouvelles équations différentielles en x_1 et x_2 .
2. Trouver dans l'analogie Force-Tension, les équations électriques équivalentes en précisant la correspondance entre les éléments électriques et mécaniques.
3. Donner le circuit électrique équivalent au système mécanique.
4. Calculer l'impédance mécanique d'entrée.
5. Le système est excité à la pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{k + k_0}{m_0}}$$

- a. Calculer les vitesses $\dot{x}_1$ et $\dot{x}_2$ des deux oscillateurs. Que peut-on dire du mouvement du chariot ?
- b. Donner le nouveau circuit électrique équivalent.

Solution

Exercice 1

1. L'énergie cinétique du système

$$T = T_{m_1} + T_{m_2}$$

$$T_{m_1} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2$$

La vitesse de la masse m_2 est calculée à partir de sa position :

$$\overrightarrow{Om_2} = \begin{pmatrix} x + \ell \sin \theta \\ -\ell \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_{m_2} = \begin{pmatrix} \dot{x} + \ell \dot{\theta} \cos \theta \\ \ell \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :

$$T_{m_2} = \frac{1}{2} m_2 v_{m_2}^2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2 + 2\ell \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta)$$

L'énergie cinétique est :

$$T = \frac{1}{2} [(m_1 + m_2) \dot{x}^2 + m_2 \ell^2 \dot{\theta}^2 + 2m_2 \ell \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta]$$

L'énergie potentielle est :

$$U_{m_2} = -m_2 g \ell \cos \theta$$

Le Lagrangien du système est :

$$L = \frac{1}{2} [(m_1 + m_2) \dot{x}^2 + m_2 \ell^2 \dot{\theta}^2 + 2m_2 \ell \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta] + m_2 g \ell \cos \theta$$

2. L'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Nous obtenons :

$$m_2 \ell^2 \ddot{\theta} - m_2 \ell \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta + m_2 \ell \ddot{x} \cos \theta + m_2 \ell \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta + m_2 g \ell \sin \theta = 0$$

Soit :

$$\ell \ddot{\theta} + \ddot{x} \cos \theta + g \sin \theta = 0$$

3. Dans le cas des faibles amplitudes, l'équation est linéaire :

$$\cos \theta \approx 1, \sin \theta \approx \theta$$

L'équation du mouvement devient :

$$\ell \ddot{\theta} + \ddot{x} + g \theta = 0$$

comme : $x(t) = x_0 e^{j\omega t}$, alors :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = \frac{\omega^2 x_0}{\ell} e^{j\omega t}$$

qui s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{\omega^2 x_0}{\ell} e^{j\omega t}$$

4. La solution est de la forme :

$$\theta_f = A e^{j(\omega t + \varphi)}$$

En remplaçant dans l'équation du mouvement, nous trouvons:

$$A e^{j\varphi} = \frac{\frac{\omega^2 x_0}{\ell}}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Nous déduisons que :

$$A = \frac{\omega^2}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \frac{x_0}{\ell}$$

et :

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{pour } \omega < \omega_0 \\ \pi & \text{pour } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

5. La solution générale est la somme de la solution particulière et la solution de l'équation homogène (libre).

$$\theta = \theta_f + \theta_\ell$$

La solution libre s'écrit $\theta_\ell(t) = C \cos(\omega_0 t + \psi)$. D'où la solution générale :

$$\theta(t) = C \cos(\omega_0 t + \psi) + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{x_0}{\ell} \cos(\omega t)$$

6. En tenant compte des conditions initiales : $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} -C\omega_0 \sin(\psi) = 0 \\ C \cos(\psi) + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{x_0}{\ell} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi = 0 \\ C = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{x_0}{\ell} \end{cases}$$

d'où

$$\theta(t) = \frac{x_0}{\ell} \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} [-\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega t)]$$

Exercice 2

Partie A : Oscillations libres

1. L'énergie cinétique du système s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} m_0 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_0 \ell^2 \dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle :

$$U = -m_0 g \ell \cos \theta + \frac{1}{2} k (x_1 - \ell \sin \theta)^2 + \frac{1}{2} k_0 x_1^2$$

Dans le cas des faibles oscillations :

$$U = m_0 g \ell \frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2} k (x_1 - \ell \theta)^2 + \frac{1}{2} k_0 x_1^2$$

Ainsi, les équations du mouvement en x_1 et θ s'écrivent :

$$\begin{cases} m_0 \ddot{x}_1 + k_0 x_1 + k(x_1 - \ell \theta) = 0 \\ m_0 \ell^2 \ddot{\theta} + m_0 g \ell \theta + k \ell (\ell \theta - x_1) = 0 \end{cases}$$

2. En posant $x_2 = \ell \theta$, on obtient :

$$\begin{cases} m_0 \ddot{x}_1 + k_0 x_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \\ m_0 \ddot{x}_2 + \frac{m_0 g}{\ell} x_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Nous cherchons des solutions de la forme : $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi)$ et $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$. En posant :

$$\frac{m_0 g}{\ell} = k_0$$

on obtient alors

$$\begin{cases} (-m_0\omega^2 + k_0 + k)A_1 - kA_2 = 0 \\ (-m_0\omega^2 + k_0 + k)A_2 - kA_1 = 0 \end{cases}$$

Ce système en A_1 et A_2 admet des solutions non nulles si :

$$\begin{vmatrix} (-m_0\omega^2 + k_0 + k) & -k \\ -k & (-m_0\omega^2 + k_0 + k) \end{vmatrix} = 0$$

soit :

$$(-m_0\omega^2 + k_0 + k)^2 - k^2 = 0$$

D'où les pulsations propres du système :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_0}{m_0}} \text{ et } \omega_2 = \sqrt{\frac{k_0 + 2k}{m}}$$

3. Dans le mode 1, les équations différentielles donnent :

$$(-m_0\omega_1^2 + k_0 + k)A_{11} - kA_{21} = 0$$

soit :

$$\frac{A_{21}}{A_{11}} = 1$$

De même dans le mode 2 :

$$(-m_0\omega_2^2 + k_0 + k)A_{12} - kA_{22} = 0$$

soit :

$$\frac{A_{22}}{A_{12}} = -1$$

4.a. Les solutions générales s'écrivent :

$$x_1 = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x_2 = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

En imposant les conditions initiales : $x_1(0) = x_0$, $x_2(0) = 0$ et $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, on obtient :

$$A_{11} = A_{12} = \frac{x_0}{2} \text{ et } \varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

d'où :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_0}{2} [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] \\ x_2 = \frac{x_0}{2} [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)] \end{cases}$$

4.b. Le chariot décrit un mouvement sinusoïdal de période T_{osc} , modulé par un signal harmonique de période $2T_B$. Le phénomène physique observé est celui du battement, T_B représente le temps entre arrêts successifs, c'est donc la période de battement.

4.c. Nous avons :

$$T_B = \frac{2\pi}{\omega_B}, T_{osc} = \frac{2\pi}{\omega_{osc}}$$

avec :

$$\omega_B = \omega_2 - \omega_1, \omega_{osc} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$$

comme : $k \ll k_0$, alors : $\omega_{osc} \approx \omega_1$.

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_{osc}} = \sqrt{\frac{k_0}{m_0}} \Rightarrow k_0 = \frac{4\pi^2 m_0}{T_{osc}^2} = 24.3 \text{ N m}^{-1}$$

De plus :

$$\omega_B = \omega_2 - \omega_1 \Rightarrow \frac{2\pi}{T_B} = \sqrt{\frac{k_0 + 2k}{m_0}} - \sqrt{\frac{k_0}{m_0}} = \sqrt{\frac{k_0}{m_0}} \left[\sqrt{1 + \frac{2k}{k_0}} - 1 \right]$$

d'où :

$$\frac{2\pi}{T_B} \approx \frac{2\pi}{T_{osc}} \frac{k}{k_0} \Rightarrow k = k_0 \frac{T_{osc}}{T_B} = 2.02 \text{ N m}^{-1}$$

Partie B : Oscillations forcées

1. Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} m_0 \ddot{x}_1 + \alpha \dot{x}_1 + k_0 x_1 + k(x_1 - x_2) = F(t) \\ m_0 \ddot{x}_2 + k_0 x_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

2. Les équations aux vitesses s'écrivent :

$$\begin{cases} j m_0 \omega \dot{x}_1 + \alpha \dot{x}_1 + \frac{k_0}{j\omega} \dot{x}_1 + \frac{k}{j\omega} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F(t) \\ j m_0 \omega \dot{x}_2 + \frac{k_0}{j\omega} \dot{x}_2 + \frac{k}{j\omega} (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \end{cases}$$

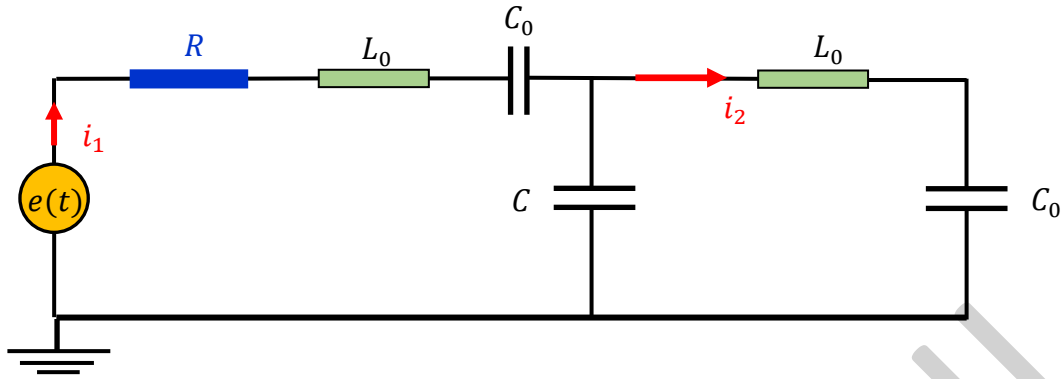
L'analogie force tension permet d'écrire :

$$\begin{cases} j L_0 \omega i_1 + R i_1 + \frac{1}{j C_0 \omega} i_1 + \frac{1}{j C \omega} (i_1 - i_2) = e(t) \\ j L_0 \omega i_2 + \frac{1}{j C_0 \omega} i_2 + \frac{1}{j C \omega} (i_2 - i_1) = 0 \end{cases}$$

avec :

$$F(t) \Leftrightarrow e(t), \quad \dot{x}_1(t) \Leftrightarrow i_1(t), \quad \dot{x}_2(t) \Leftrightarrow i_2(t), \alpha \Leftrightarrow R, m_0 \Leftrightarrow L_0, k_0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_0} \text{ et } k \Leftrightarrow \frac{1}{C}$$

3. Le circuit électrique équivalent :



4. Les équations aux vitesses en notation complexe s'écrivent :

$$\begin{cases} \left(\alpha + jm_0\omega + \frac{k_0 + k}{j\omega} \right) \dot{x}_1 - \frac{k}{j\omega} \dot{x}_2 = F(t) \\ \left(jm_0\omega + \frac{k_0 + k}{j\omega} \right) \dot{x}_2 - \frac{k}{j\omega} \dot{x}_1 = 0 \end{cases}$$

Les 2 équations nous permettent de trouver :

$$Z_e = \frac{F}{\dot{x}_1} = \alpha + \frac{(k_0 + k - m_0\omega^2)^2 - k^2}{j\omega(k_0 + k - m_0\omega^2)}$$

5. Le système est excité à la pulsation $\omega = \sqrt{(k_0 + k)/m_0}$

a. L'impédance d'entrée Z_e est infinie, la vitesse $\dot{x}_1$ s'annule. Le chariot est immobile. La pulsation :

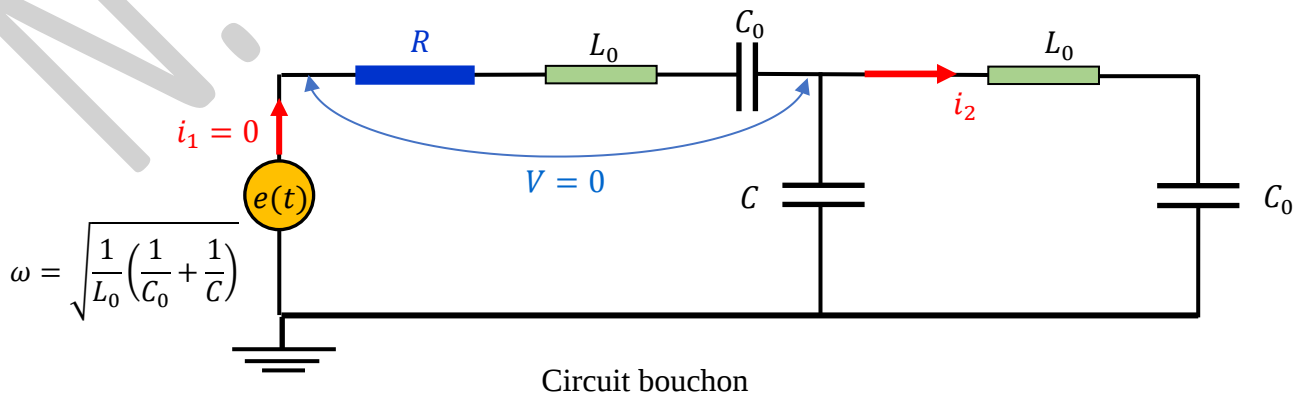
$$\omega = \sqrt{\frac{k_0 + k}{m_0}}$$

est une pulsation d'antirésonance.

Des équations aux vitesses nous calculons $\dot{x}_2$:

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{j\omega}{k} F(t) = \frac{\omega}{k} F_0 e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

b. Par analogie, le courant i_1 s'annule, nous avons un circuit bouchon.



Examen Final Physique 4, Septembre 2019 (ENSTP)

Licence L2-ST

Durée 1h40

Exercice 1

Partie A

On considère un tuyau (1) de longueur semi-infinie et de section S_1 raccordé en $x = 0$ à un tuyau (2) semi-infini de section $S_2 > S_1$ (figure 1a). A gauche ($x \leq 0$), le milieu 1 est caractérisé par une masse volumique ρ_1 et une vitesse de propagation v_1 ; à droite ($x \geq 0$), le milieu 2 est caractérisé par une masse volumique ρ_2 et une vitesse de propagation v_2 . Une onde de pression incidente, venant de la gauche, de pulsation ω et d'amplitude complexe A_1 , se propage le long des x croissants.

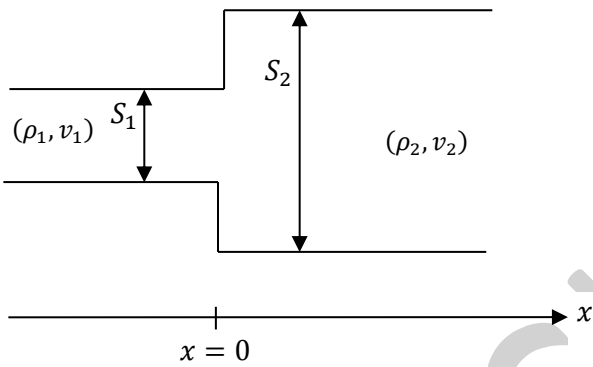


Figure 1a

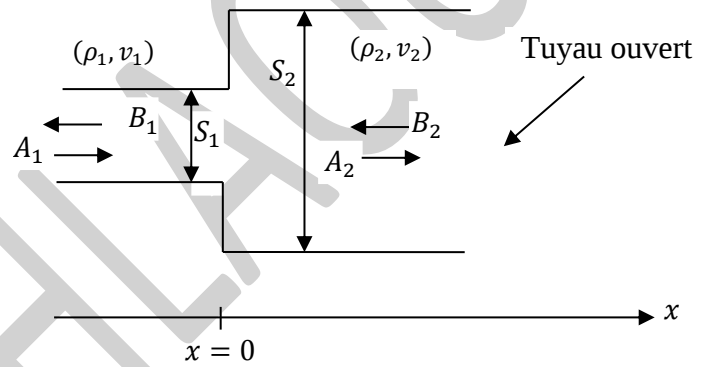


Figure 1b

1. Ecrire, en fonction des coefficients de réflexion r et de transmission t en pression, les expressions des ondes de pression $p_1(x, t)$ et $p_2(x, t)$ respectivement dans les tuyaux (1) et (2). En déduire les expressions respectives des vitesses particulières $\dot{u}_1(x, t)$ et $\dot{u}_2(x, t)$.
2. Ecrire les équations de continuité en $x = 0$ pour la pression acoustique et pour le débit volumique.
3. En déduire les expressions de r et t en fonction de ρ_1 ; v_1 ; S_1 ; ρ_2 ; v_2 et S_2 .
4. Déterminer les coefficients de réflexion R et de transmission T en énergie. Quelle est la relation qui lie ces deux coefficients ?

Partie B

Le tuyau (2) a maintenant une longueur finie L et est ouvert à l'extérieur en $x = L$ (Figure 1b). On désigne par A_i et B_i ($i = 1, 2$) les amplitudes des ondes incidente et réfléchie dans chacun des deux tuyaux.

1. Donner en notation complexe les expressions des ondes de pression acoustique $p_1(x, t)$ et $p_2(x, t)$ dans les tuyaux (1) et (2) respectivement.
2. En écrivant la condition aux limites en $x = L$, déterminer la relation entre B_2 et A_2 .
3. Montrer que l'impédance acoustique du tuyau (2) en $x = 0$ s'écrit sous la forme :

$$Z_2(0) = j \frac{\rho_2 v_2}{S_2} \tan\left(\frac{\omega L}{v_2}\right)$$

- En notant Z_1 l'impédance caractéristique du tuyau (1), donner, en fonction de $Z_2(0)$ et Z_1 , le coefficient de réflexion r en pression en $x = 0$.
- Trouver la plus petite longueur L du tuyau (2) permettant d'obtenir un ventre de pression en $x = 0$.

Exercice 2

L'espace étant rapporté à un trièdre direct $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, on considère une onde électromagnétique plane progressive sinusoïdale de longueur d'onde $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ qui se propage dans le vide de perméabilité magnétique μ_0 et de permittivité diélectrique ϵ_0 . L'onde est décrite par un vecteur champ électrique $\vec{E}$ dont les composantes sont données par :

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_y = E_0 \sin(\omega t - kz) \\ 0 \end{cases}$$

- Quelle est
 - La direction de propagation de l'onde ?
 - L'équation du plan d'onde passant par le point ?
 - La fréquence de l'onde.
 - La polarisation de l'onde.
- Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ de l'onde puis représenter en un point M de l'espace les trois vecteurs $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{k}$ en y indiquant clairement la direction et le sens de chaque vecteur.
- Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{\mathcal{R}}$ de cette onde. Quelle est la valeur moyenne de son module dans le temps ?
- Sachant que l'intensité de l'onde vaut $I = 0.1 \text{ W m}^{-2}$, calculer la valeur de E_0 .

On donne: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$ et $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

Exercice 3

On considère une corde homogène de longueur L et de masse linéique μ tendue horizontalement suivant un axe Ox avec une tension T_0 . La corde est libre à son extrémité A ($x = L$) et est reliée à son autre extrémité O ($x = 0$) à un vibreur qui impose un déplacement transversal harmonique de la forme $y(0, t) = a e^{j\omega t}$ (Figure 2). L'onde incidente $y_i(x, t)$ émise par le vibreur se propage le long des x croissants et se réfléchit en A .

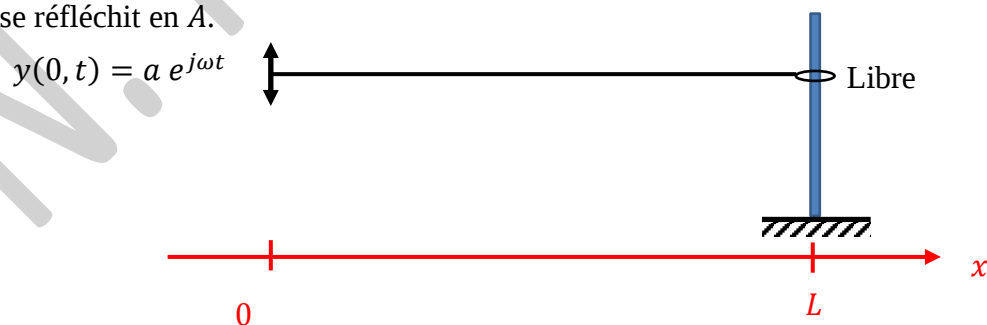


Figure 2

- Ecrire l'expression de l'onde résultante $y(x, t)$ en un point d'abscisse x de la corde à l'instant t .
- En tenant compte des conditions aux limites, montrer qu'il s'établit le long de la corde un système d'ondes stationnaires d'amplitude :

$$A(x) = a \frac{\cos[k(L-x)]}{\cos(kL)}$$

3. Sachant que $f = 20 \text{ Hz}$ et $a = 1 \text{ cm}$, déterminer l'amplitude et les positions des nœuds et des ventres de vibration.

4. T_0 et L étant maintenus constants, pour quelles fréquences obtient-on le phénomène de résonance ?

On donne : $L = 1 \text{ m}$, $\mu = 0.025 \text{ kg m}^{-1}$ et $T_0 = 2.5 \text{ N}$:

Solution

Exercice 1

Partie A

1. L'onde de pression dans le tuyau (1)

$$p_1(x, t) = Ae^{j(\omega t - k_1 x)} + Be^{j(\omega t + k_1 x)} = Ae^{j\omega t}(e^{-jk_1 x} + re^{jk_1 x})$$

B représente l'amplitude de l'onde réfléchie, r le coefficient de réflexion en pression et k_1 le module du vecteur d'onde dans le milieu (1) :

$$r = \frac{B}{A}, k_1 = \frac{\omega}{v_1}$$

De même, l'onde de pression dans le tuyau (2) s'écrit :

$$p_2(x, t) = Ce^{j(\omega t - k_2 x)} = tAe^{j(\omega t - k_2 x)}$$

C représente l'amplitude de l'onde transmise, t le coefficient de transmission en pression et k_2 le module du vecteur d'onde dans le milieu (2) :

$$t = \frac{C}{A}, k_2 = \frac{\omega}{v_2}$$

Les vitesses de particules associées à $p_1(x, t)$ et $p_2(x, t)$ sont respectivement :

$$\dot{u}_1(x, t) = \frac{A}{\rho_1 v_1} e^{j\omega t} (e^{-jk_1 x} - re^{jk_1 x})$$

et

$$\dot{u}_2(x, t) = \frac{tA}{\rho_2 v_2} e^{j(\omega t - k_2 x)}$$

2. Les conditions au niveau de la frontière $x = 0$:

$$p_1(0, t) = p_2(0, t) \Rightarrow 1 + r = t$$

La continuité du débit volumique en $x = 0$:

$$S_1 \dot{u}_1(0, t) = S_2 \dot{u}_2(0, t) \Rightarrow \frac{S_1}{\rho_1 v_1} (1 - r) = \frac{S_2}{\rho_2 v_2} t$$

3. A partir des conditions précédentes, nous obtenons :

$$r = \frac{\frac{\rho_2 v_2}{S_2} - \frac{\rho_1 v_1}{S_1}}{\frac{\rho_1 v_1}{S_1} + \frac{\rho_2 v_2}{S_2}}$$

et

$$t = \frac{2 \frac{\rho_2 v_2}{S_2}}{\frac{\rho_1 v_1}{S_1} + \frac{\rho_2 v_2}{S_2}}$$

4. Les coefficients de réflexion et de transmission en énergie sont définis :

$$R = \frac{\langle \mathcal{P}_r \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle}, T = \frac{\langle \mathcal{P}_t \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle}$$

$\langle \mathcal{P}_i \rangle$, $\langle \mathcal{P}_r \rangle$ et $\langle \mathcal{P}_t \rangle$ représentent respectivement les puissances moyennes des ondes incidente, réfléchie et transmise.

$$\langle \mathcal{P}_i \rangle = \frac{1}{2} \frac{S_1}{\rho_1 v_1} A^2, \langle \mathcal{P}_r \rangle = \frac{1}{2} \frac{S_1}{\rho_1 v_1} (rA)^2 \text{ et } \langle \mathcal{P}_t \rangle = \frac{1}{2} \frac{S_2}{\rho_2 v_2} (tA)^2$$

Nous obtenons :

$$R = r^2, T = \frac{\langle \mathcal{P}_t \rangle}{\langle \mathcal{P}_i \rangle} = \frac{\frac{\rho_1 v_1}{S_1}}{\frac{\rho_2 v_2}{S_2}} t^2$$

On pose

$$Z_1 = \frac{\rho_1 v_1}{S_1} \text{ et } Z_2 = \frac{\rho_2 v_2}{S_2}$$

Cela simplifie les expressions :

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2, T = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

Nous constatons aisément que :

$$R + T = 1$$

Partie B

1. Les ondes de pression dans les tuyau (1) et (2) sont respectivement :

$$p_1(x, t) = A e^{j(\omega t - k_1 x)} + B e^{j(\omega t + k_1 x)}$$

et

$$p_2(x, t) = C e^{j(\omega t - k_2 x)} + D e^{j(\omega t + k_2 x)}$$

2. Le tuyau étant ouvert en $x = L$, nous avons :

$$p_2(L, t) = 0 \Rightarrow \frac{D}{C} = -e^{-2jk_2 L}$$

3. L'impédance acoustique dans le tuyau (2) s'écrit :

$$Z_2(x) = \frac{p_2(x, t)}{S_2 \dot{u}_2(x, t)} = Z_2 \frac{C e^{-jk_2 x} + D e^{jk_2 x}}{C e^{-jk_2 x} - D e^{jk_2 x}}$$

d'où :

$$Z_2(0) = Z_2 \frac{C + D}{C - D} = Z_2 \frac{1 + \frac{D}{C}}{1 - \frac{D}{C}}$$

La condition en $x = L$, permet de trouver :

$$Z_2(0) = Z_2 \frac{1 - e^{-2jk_2 L}}{1 + e^{-2jk_2 L}} = jZ_2 \operatorname{tg}(k_2 L)$$

qui s'écrit :

$$Z_2(0) = j \frac{\rho_2 v_2}{S_2} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega L}{v_2} \right)$$

4. Le coefficient de réflexion en $x = 0$ est :

$$r = \frac{Z_2(0) - Z_1}{Z_2(0) + Z_1}$$

avec :

$$Z_1 = \frac{\rho_1 v_1}{S_1}$$

5. Un ventre de pression implique un nœud de vitesse en $x = 0$, dans ce cas $r = 1$, $Z_2(0) \rightarrow \infty$.
d'où :

$$\operatorname{tg}(k_2 L) \rightarrow \infty$$

Cette condition est satisfaite si :

$$k_2 L = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow L = (2n + 1) \frac{\lambda_2}{4}$$

La plus petite longueur qui permet d'obtenir un ventre de pression en $x = 0$ est :

$$L = \frac{\lambda_2}{4}$$

Exercice 2

1. a. L'onde se propage dans le sens des z croissants, le vecteur d'onde est :

$$\vec{k} = k \vec{e}_z = \frac{\omega}{c} \vec{e}_z$$

- b. l'équation du plan d'onde passant par le point A est $z = 4$, plan perpendiculaire au vecteur d'onde.

- c. La fréquence de l'onde est :

$$f = \frac{c}{\lambda} = 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

- d. Nous avons :

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$$

L'équation est celle d'un cercle. De plus, on a :

$$\text{A } t = 0, \vec{E}(0,0) = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{A } t = T/4, \vec{E}(0,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La polarisation est donc circulaire gauche.

2. L'onde est plane sinusoïdale

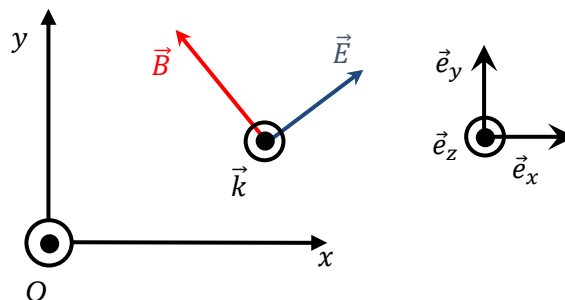
$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} = \frac{1}{c} \vec{e}_z \times (E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y)$$

nous trouvons :

$$\vec{B} = \frac{1}{c} (-E_y \vec{e}_x + E_x \vec{e}_y)$$

qui s'écrit :

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} [-\sin(\omega t - kz) \vec{e}_x + \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y]$$



3. Le vecteur de Poynting $\vec{\mathcal{R}}$ est :

$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{e}_z$$

La valeur moyenne du module est :

$$\langle \mathcal{R} \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}$$

4. L'intensité de l'onde est :

$$I = \langle \mathcal{R} \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}$$

On en déduit l'amplitude E_0 :

$$E_0 = \sqrt{\mu_0 c I} = 6.14 \text{ V m}^{-1}$$

Exercice 3

1. L'onde résultante est :

$$y(x, t) = A e^{j(\omega t - kx)} + B e^{j(\omega t + kx)}$$

A et B sont les amplitudes des ondes incidente et réfléchie.

2. La condition en $x = 0$ est :

$$A + B = a$$

De même la condition en $x = L$ est :

$$-T_0 \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \Rightarrow A e^{-jkL} - B e^{jkL} = 0$$

d'où :

$$\frac{B}{A} = e^{-2jkL}$$

A partir des deux conditions :

$$A \left(1 + \frac{B}{A} \right) = a \Rightarrow A = \frac{a}{1 + e^{-2jkL}} = \frac{a}{2 \cos(kL)} e^{jkL}$$

L'équation d'onde peut s'écrire :

$$y(x, t) = A e^{j\omega t} \left[e^{-jkx} + \frac{B}{A} e^{jkx} \right] = \frac{a}{2 \cos(kL)} e^{jkL} [e^{-jkx} + e^{jk(x-2L)}] e^{j\omega t}$$

qui s'écrit sous la forme :

$$y(x, t) = \frac{a \cos[k(L - x)]}{\cos(kL)} e^{j\omega t}$$

La corde est le siège d'ondes stationnaires d'amplitude :

$$A(x) = \frac{a \cos[k(L - x)]}{\cos(kL)}$$

3. Les nœuds sont les points d'amplitude nulle $A(x_n) = 0$. Leurs positions sont telles que :

$$\cos[k(L - x)] = 0$$

soit :

$$x_n = L - (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (n = 0, 1, 2 \dots)$$

De même l'amplitude des ventres est :

$$A(x_n) = \pm \frac{a}{\cos(kL)}$$

Leurs positions sont données par : $\cos[k(L - x)] = \pm 1$.

soit :

$$x'_n = L - n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2 \dots)$$

Application numérique :

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = 0.5 \text{ m}$$

Les positions des nœuds sont :

$$x_n = 0.125 \text{ m}, 0.625 \text{ m}, 0.375 \text{ m}, 0.125 \text{ m}.$$

Les positions des ventres sont :

$$x'_n = 0.25 \text{ m}, 0.50 \text{ m}, 0.75 \text{ m}, 1 \text{ m}.$$

4. La résonance est obtenue lorsque l'amplitude du ventre est infinie, soit :

$$\cos(kL) = 0 \Rightarrow f_n = (2n + 1) \frac{v}{4L} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

f_n représente les fréquences de résonance.

Examen Final Physique 4, MAI 2021 (ENST)

Licence L2-ST

Durée 2h00

Exercice 1

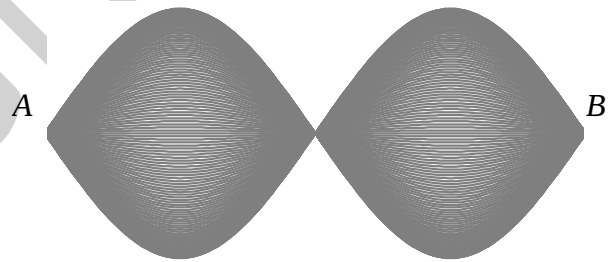
Partie A

Une corde infinie de masse linéique μ est soumise à une tension T_0 , supposée constante et très grande devant son poids. Une onde de pulsation ω arrive de $-\infty$ et progresse dans la direction des x positifs. On étudie les petits déplacements $y(x, t)$ de la corde.

1. Donner l'équation régissant l'évolution du déplacement des particules $y(x, t)$. Comment appelle-t-on cette équation ?
2. Donner l'expression de $y(x, t)$ et déterminer l'impédance de la corde $Z(x)$. Calculer sa valeur numérique, sachant que la corde est en cuivre, de diamètre $d = 0.4 \text{ mm}$ et de masse volumique $\rho = 8900 \text{ kg m}^{-3}$. On donne aussi : $T_0 = 10 \text{ N}$.
3. Calculer numériquement la vitesse de propagation de l'onde.

Partie B

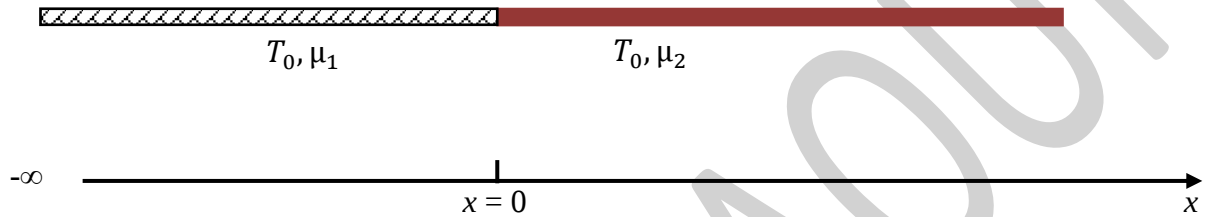
Une corde de longueur $L = 50 \text{ cm}$ est tendue entre deux points fixes, A (d'abscisse $x_A = 0$) et B (d'abscisse $x_B = L$). Sa masse linéique est $\mu = 10 \text{ gm}^{-1}$ et sa tension est T_0 . On observe dans la corde une onde transversale, harmonique, stationnaire de fréquence $f = 500 \text{ Hz}$. La corde prend l'aspect de la figure ci-contre.



1. Ecrire l'expression de l'onde $y(x, t)$ sous la forme d'une superposition de deux termes. Donner le sens physique de chaque terme.
2. En utilisant la condition, en $x = 0$, montrer que l'onde s'écrit sous la forme du produit de deux fonctions que l'on explicitera.
3. A partir de la forme de la corde, donner la relation entre k et L . On écrira $y(x, t)$ en fonction de x , t , ω , L et son amplitude A .
4. Expliquer le sens des mots *transversale*, *harmonique* et *stationnaire*.
5. Représenter la forme de la corde à divers instants. Expliquer pourquoi la corde prend l'aspect de la figure précédente (figure ci-dessus).
6. Déterminer numériquement la longueur d'onde λ , la vitesse V des ondes de la corde et la tension de la corde T_0 .

Partie C

On se propose maintenant d'étudier la réflexion et transmission entre deux cordes homogènes, semi infinies, en jonction en $x = 0$. Les deux cordes sont maintenues horizontalement par une tension $T_0 = 10 \text{ N}$. La première corde est en cuivre, sa masse volumique est $\rho_1 = 8900 \text{ kg m}^{-3}$ et son diamètre $d = 0.4 \text{ mm}$, la seconde est en Aluminium, sa masse volumique est $\rho_2 = 2700 \text{ kg m}^{-3}$ et son diamètre $d = 0.4 \text{ mm}$ (Figure ci-dessous). Une onde sinusoïdale, que l'on notera $y_a(x, t)$, d'amplitude A et de pulsation ω se propage dans le sens des x croissants le long de la première corde ($x \leq 0$). Au niveau de la jonction, une onde régressive dans la corde (1) est créée, dont l'amplitude est B , elle sera notée $y_b(x, t)$ ($x \leq 0$). Une 2^{ème} onde, notée $y_c(x, t)$, progressive dans la corde (2) est engendrée ($x \geq 0$). Son amplitude est C .



1. Donner les expressions des différentes contributions, que l'on notera $y_a(x, t)$, $y_b(x, t)$ et $y_c(x, t)$. Que représente chaque terme ?
2. Donner les expressions des ondes résultantes $y_1(x, t)$ (dans la corde 1) et $y_2(x, t)$ (dans la deuxième corde).
3. En utilisant les conditions en $x = 0$, déterminer en fonction des impédances caractéristiques Z_1 et Z_2 , les expressions des coefficients de réflexion R et de transmission T en amplitudes. Calculer numériquement ces coefficients.
4. On définit les densités linéiques des énergies cinétique et potentielle de l'onde comme suit :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \mu \left[\frac{\partial y}{\partial t} \right]^2$$

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} T_0 \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]^2$$

La densité d'énergie totale est : $\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$.

- a. Déterminer les expressions des densités d'énergies cinétiques et potentielles des ondes $y_a(x, t)$, $y_b(x, t)$ et $y_c(x, t)$. On les notera $\mathcal{E}_{ca}$ et $\mathcal{E}_{pa}$ pour l'onde y_a , $\mathcal{E}_{cb}$ et $\mathcal{E}_{pb}$ pour l'onde y_b et enfin $\mathcal{E}_{cc}$ et $\mathcal{E}_{pc}$ pour l'onde y_c .
- b. Calculer les densités d'énergies totales $\mathcal{E}_{ta}$, $\mathcal{E}_{tb}$ et $\mathcal{E}_{tc}$ associées respectivement aux ondes $y_a(x, t)$, $y_b(x, t)$ et $y_c(x, t)$.
- c. On définit en $x = 0$ les coefficients de réflexion α_R et de transmission α_T en énergie par :

$$\alpha_R = \frac{\mathcal{E}_{tb}}{\mathcal{E}_{ta}} \quad \text{et} \quad \alpha_T = \frac{v_2 \mathcal{E}_{tc}}{v_1 \mathcal{E}_{ta}}$$

Calculer en fonction de Z_1 et Z_2 les expressions de α_R et α_T .

- d. Calculer numériquement α_R et α_T . Que peut-on dire à partir de ces rapports ?

Exercice 2

Soit une onde acoustique plane qui se propage dans l'eau avec une vitesse de 1500 m s^{-1} dans le sens des x croissants. La fréquence de l'onde est égale à 24 kHz . On suppose connaître la variation de la masse volumique :

$$\rho(x, t) = A e^{j(\omega t - kx)}$$

1. Rappeler l'équation de propagation de l'onde. Calculer numériquement sa longueur d'onde λ .
2. Donner la relation qu'il y a entre la variation de masse volumique $\rho(x, t)$ et la vitesse des particules $\dot{u}(x, t)$. Comment appelle-t-on cette relation ? Calculer la vitesse des particules $\dot{u}(x, t)$ et le déplacement des particules $u(x, t)$.
3. Donner la relation qu'il y a entre la vitesse des particules $\dot{u}(x, t)$ et la pression $p(x, t)$. Comment appelle-t-on cette relation ? Calculer $p(x, t)$.
4. Calculer l'impédance acoustique de l'eau sachant que sa masse volumique est $\rho_0 = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$.
5. Déterminer l'amplitude A , sachant que l'amplitude du déplacement est égale à $0.2 \text{ }\mu\text{m}$.

Solution

Exercice 1

Partie A

1. L'équation est dans le cas des faibles amplitudes :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

v représente la vitesse de propagation de l'onde.

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

L'équation donnant l'évolution de $y(x, t)$ est l'équation d'onde de d'Alembert.

2. Le déplacement est :

$$y(x, t) = Ae^{j(\omega t - kx)}$$

$$Z(x) = \frac{F(x, t)}{\dot{y}(x, t)} = \frac{-T_0 \frac{\partial y}{\partial x}}{\dot{y}(x, t)} = \frac{kT_0}{\omega} = \frac{T_0}{v} = \sqrt{\mu T_0}$$

$$Z(x) = Z_c = \sqrt{\mu T_0} = \sqrt{\rho S T_0} = \sqrt{\rho \pi \frac{d^2}{4} T_0}$$

$$Z_c = 0.11 \text{ kg s}^{-1}$$

3. La vitesse de propagation est :

$$v = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = 94.55 \text{ m s}^{-1}$$

Partie B

1. L'expression est :

$$y(x, t) = Ae^{j(\omega t - kx)} + Be^{j(\omega t + kx)}$$

Le premier terme représente une onde progressive, le second une onde régressive. Les deux termes représentent des ondes plane sinusoïdales.

2. La condition en $x = 0$

$$y(0, t) = 0 \Rightarrow A + B = 0$$

En reportant dans l'expression de $y(x, t)$:

$$y(x, t) = Ae^{j\omega t} [e^{-jkx} - e^{jkx}] = -2jA \sin(kx) e^{j\omega t}$$

3. L'onde présente deux fuseaux, nous avons donc :

$$L = \lambda \Rightarrow L = \frac{2\pi}{k}$$

D'où :

$$k = \frac{2\pi}{L}$$

Le déplacement des particules devient :

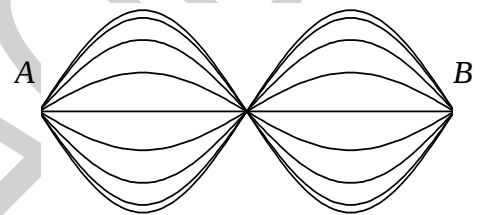
$$y(x, t) = -2jA \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) e^{j\omega t}$$

4. *Transversale* : La direction de vibration des particules est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde (comparer à onde longitudinale).

Harmonique : l'onde est sinusoïdale.

Stationnaire : tous les points de la corde vibrent en phase ou en opposition de phase (comparer à onde progressive). La fonction d'onde est le produit de deux fonctions à variables indépendantes, L'amplitude n'est plus une constante, elle dépend de la position de x . De plus l'onde stationnaire ne propage plus l'énergie.

5. La figure ci-contre représente la forme de la corde aux instants $t_n = nT/16$ pour $n = 0, 1, \dots, 15$. La période $T = 1/f = 0.002 \text{ ms}$ est très petite devant le temps de persistance des images rétinienne. La corde apparaît comme la superposition de toutes les positions de la corde



6. $\lambda = L = 50 \text{ cm}$, $V = \lambda/T = 250 \text{ ms}^{-1}$, $V = \sqrt{T_0/\mu}$ donne $T_0 = \mu V^2 = 625 \text{ N}$.

Partie C

1. Les expressions de chaque contribution :

L'onde incidente en $x = 0$ est $y_a(x, t) = Ae^{j(\omega t - k_1 x)}$.

L'onde réfléchiée en $x = 0$ est $y_b(x, t) = Be^{j(\omega t + k_1 x)}$.

L'onde transmise en $x = 0$ est $y_c(x, t) = Ce^{j(\omega t - k_2 x)}$.

2. L'onde résultante dans la corde (1) est la superposition de l'onde incidente et réfléchiée :

$$y_1(x, t) = y_a(x, t) + y_b(x, t) = Ae^{j(\omega t - k_1 x)} + Be^{j(\omega t + k_1 x)}$$

Dans la corde (2) nous avons une onde transmise :

$$y_2(x, t) = y_c(x, t) = Ce^{j(\omega t - k_2 x)}$$

3. La continuité du déplacement donne :

$$y_1(0, t) = y_2(0, t) \Rightarrow A + B = C$$

ou bien

$$1 + R = T \quad (1)$$

Le principe fondamental de la dynamique en $x = 0$, donne :

$$-T_0 \frac{\partial y_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = -T_0 \frac{\partial y_2}{\partial x} \Big|_{x=0} \Rightarrow j\omega Z_1(A - B) = j\omega Z_2 C$$

Qui s'écrit sous la forme :

$$Z_1(1 - R) = Z_2 T \quad (2)$$

A partir des relations (1) et (2), nous avons :

$$R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad \text{et} \quad T = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Nous avons $Z_1 = \sqrt{\mu_1 T_0} = 0.11 \text{ kg s}^{-1}$, $Z_2 = \sqrt{\mu_2 T_0} = 0.06 \text{ kg s}^{-1}$.

$$R = 0.29, T = 1.29$$

4. En partant des définitions

a. La densité d'énergie cinétique est

$$\mathcal{E}_{ca} = \frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 A^2 [\cos(\omega t - k_1 x)]^2$$

$$\mathcal{E}_{pa} = \frac{1}{2} T_0 k_1^2 [\cos(\omega t - k_1 x)]^2 = \frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 A^2 [\cos(\omega t - k_1 x)]^2 = \mathcal{E}_{ca}$$

De la même manière, nous trouvons :

$$\mathcal{E}_{cb} = \frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 B^2 [\cos(\omega t + k_1 x)]^2$$

$$\mathcal{E}_{pb} = \frac{1}{2} T_0 k_1^2 B^2 [\cos(\omega t + k_1 x)]^2 = \frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 B^2 [\cos(\omega t + k_1 x)]^2 = \mathcal{E}_{cb}$$

Pour l'onde réfléchie.

$$\mathcal{E}_{cc} = \frac{1}{2} \mu_2 \omega^2 C^2 [\cos(\omega t - k_2 x)]^2$$

$$\mathcal{E}_{pc} = \frac{1}{2} T_0 k_2^2 C^2 [\cos(\omega t - k_2 x)]^2 = \frac{1}{2} \mu_2 \omega^2 C^2 [\cos(\omega t - k_2 x)]^2 = \mathcal{E}_{cc}$$

b. Les densités d'énergies totales sont :

$$\mathcal{E}_{ta} = \mathcal{E}_{ca} + \mathcal{E}_{pa} = 2\mathcal{E}_{ca} = \mu_1 \omega^2 A^2 [\cos(\omega t - k_1 x)]^2$$

Pour l'onde (a).

$$\mathcal{E}_{tb} = \mathcal{E}_{cb} + \mathcal{E}_{pb} = 2\mathcal{E}_{cb} = \mu_1 \omega^2 B^2 [\cos(\omega t + k_1 x)]^2$$

Pour l'onde (b).

$$\mathcal{E}_{tc} = \mathcal{E}_{cc} + \mathcal{E}_{pc} = 2\mathcal{E}_{cc} = \mu_2 \omega^2 C^2 [\cos(\omega t - k_2 x)]^2$$

Pour l'onde (c).

c. Le calcul donne :

$$\alpha_R = \frac{\mathcal{E}_{tb}}{\mathcal{E}_{ta}} = \frac{B^2}{A^2} = R^2$$

$$\alpha_T = \frac{v_2 \mathcal{E}_{tc}}{v_1 \mathcal{E}_{ta}} = \frac{v_2 \mu_2 C^2}{v_1 \mu_1 A^2} = \frac{Z_2}{Z_1} T^2$$

d. Nous obtenons :

$$\alpha_R = 0.08 \text{ et } \alpha_T = 0.92$$

La somme $\alpha_R + \alpha_T = 1$, cela traduit la conservation d'énergie.

Exercice 2

1. L'équation d'onde est :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = 0$$

v représente la vitesse de propagation de l'onde.

ρ la fonction d'onde masse volumique.

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1500}{24 \cdot 10^3} = 6.25 \text{ cm}$$

2. La relation entre la masse volumique ρ et la vitesse des particules est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = 0$$

Cette relation est appelée équation de continuité ou de conservation de masse.

ρ_0 représente la masse volumique à l'équilibre.

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = -\frac{j\omega}{\rho_0} \rho \Rightarrow \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = -\frac{j\omega}{\rho_0} A e^{j(\omega t - kx)}$$

Nous trouvons :

$$\dot{u}(x, t) = \frac{v}{\rho_0} A e^{j(\omega t - kx)}$$

Ainsi le déplacement des particules est :

$$u(x, t) = \frac{v}{j\omega \rho_0} A e^{j(\omega t - kx)}$$

3. La relation entre $p(x, t)$ et $\dot{u}(x, t)$ est :

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = 0$$

Cette relation est appelée équation de l'hydrodynamique.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -j\omega \rho_0 \dot{u} = -j\omega v A e^{j(\omega t - kx)}$$

La surpression est :

$$p(x, t) = A v^2 e^{j(\omega t - kx)}$$

4. L'impédance acoustique est définie par :

$$Z(x) = \frac{p(x, t)}{\dot{u}(x, t)} = \rho_0 v$$

$Z(x)$ est une constante que l'on note Z_c et qu'on appelle l'impédance caractéristique.

$$Z_c = 1.5 \cdot 10^6 \text{ Rayleigh}$$

5. L'amplitude du déplacement des particules

$$u_0 = \frac{v}{\omega \rho_0} A \Rightarrow A = \frac{\omega \rho_0}{v} u_0 = \frac{2\pi f \rho_0}{v} u_0$$

Nous trouvons :

$$A = 0.02 \text{ kg m}^{-3}$$

Sujet du concours national d'accès aux écoles supérieures

2020-2021

Durée 1h15

Exercice 1

Le système de la figure ci-dessous est constitué d'un cylindre homogène de masse M de rayon R , pouvant rouler sans glisser sur un plan horizontal. Il est relié, en son centre O , à une masse m_1 par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k_2 . Cette masse m_1 est reliée à un bâti fixe (B) par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k_1 et d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α . Une force sinusoïdale d'amplitude F_0 et de pulsation ω agit sur la masse m_1 ($F(t) = F_0 e^{j\omega t}$). On désigne par x_1 et x_2 respectivement les déplacements de la masse m_1 et du centre du cylindre O .

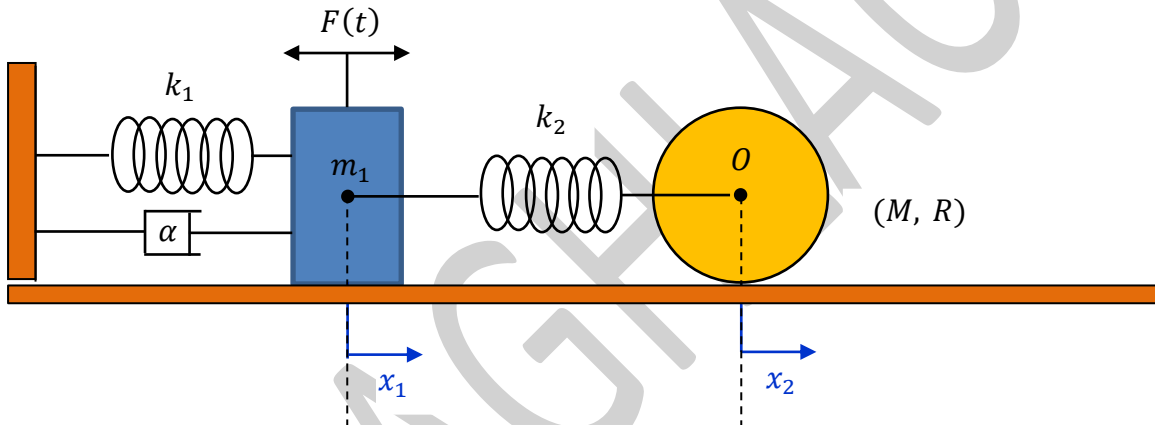


Figure 1

1. Déterminer l'énergie cinétique T , potentielle U , la fonction de dissipation D et le Lagrangien du système.
2. Etablir les équations différentielles du mouvement en x_1 et x_2 .
3. Dans le cas où $m_1 = \frac{3}{2}M = m$ et $k_1 = k_2 = k$, donner les équations intégro-différentielles en fonction des vitesses.
4. En utilisant l'analogie force tension, donner les équations intégro-différentielles qui régissent le système électrique analogue au système mécanique étudié. On précisera la correspondance entre les éléments électriques et mécaniques.
5. Représenter le schéma électrique équivalent au système mécanique.

Exercice 2

On considère une corde de longueur L et de masse linéique μ tendue horizontalement avec une tension constante T . Son extrémité O est libre en $x = 0$, alors qu'en $x = L$ la corde est reliée à un ressort de raideur b . On désigne par $u(x, t)$ le déplacement transversal des particules dans le cas des faibles amplitudes.

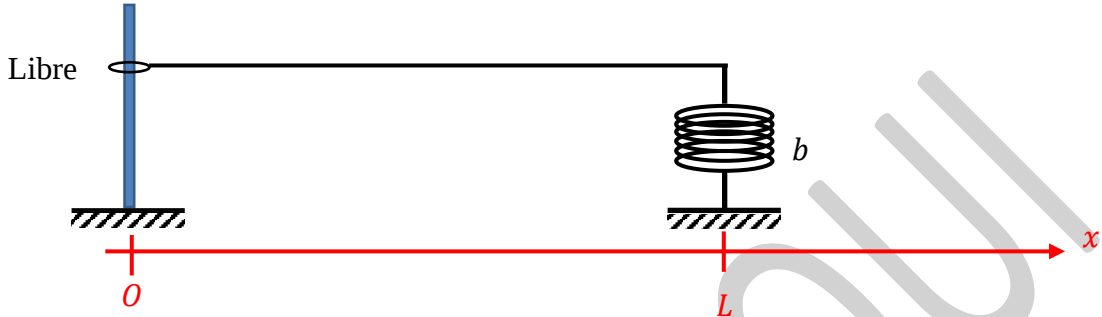


Figure 2

1. Ecrire le déplacement $u(x, t)$ sous la forme d'une somme de deux termes. Donner la signification physique de chaque terme.
2. En tenant compte de la condition au niveau de la frontière $x = 0$, montrer que $u(x, t) = f(x) g(t)$, où $f(x)$ et $g(t)$ sont des fonctions que l'on explicitera. Comment appelle-t-on l'onde résultante ?
3. En écrivant la condition au niveau de la frontière $x = L$, montrer que l'équation aux pulsations propres s'écrit sous la forme :

$$tg\left(\frac{\omega L}{v}\right) = C \left(\frac{\omega L}{v}\right)^{-1}$$

C est une constante que l'on précisera.

4. Déterminer les trois premières pulsations dans le cas où $\frac{T}{bL} \rightarrow 0$.

Exercice 3

Dans le vide, en absences de charges et de courants ($\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$), une onde électromagnétique plane, sinusoïdale, progressive de pulsation ω et d'amplitude H_0 est caractérisée par son excitation magnétique :

$$\vec{H} = H_0 \cos(\omega t - ky) \vec{e}_z$$

1. Quelle est la nature de polarisation et la direction de propagation de cette onde.
2. Calculer le champ électrique $\vec{E}$ associé à cette onde. En déduire sa polarisation.
3. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\mathcal{R}}$ de cette onde. En déduire sa valeur moyenne dans le temps.

Solution

Exercice 1

1. Calcul des différentes fonctions

- Energie cinétique

$$T = T_{m_1} + T_M = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}Mv_o^2 + \frac{1}{2}J_o\dot{\theta}^2$$

Avec :

$$J_o = \frac{MR^2}{2}, x_2 = R\theta$$

D'où :

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{x}_1^2 + \frac{3}{2}M\dot{x}_2^2\right)$$

- Energie potentielle :

$$U = \frac{1}{2}[k_1x_1^2 + k_2(x_2 - x_1)^2]$$

- Fonction de dissipation :

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_1^2$$

- Lagrangien du système :

$$L = T - U = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{x}_1^2 + \frac{3}{2}M\dot{x}_2^2 - k_1x_1^2 - k_2(x_2 - x_1)^2\right)$$

2. Les équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial W}{\partial x_1} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

W représente le travail de la force d'excitation.

$$W = Fx_1$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = F(t) \\ \frac{3}{2}M\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

3. Dans le cas où

$$m_1 = \frac{3}{2}M = m, \quad k_1 = k_2 = k$$

Les équations s'écrivent :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + kx_1 + k(x_1 - x_2) = F(t) \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Les équations intégral-différentielles :

$$\begin{cases} m\frac{d\dot{x}_1}{dt} + \alpha\dot{x}_1 + k\int \dot{x}_1 dt + k\int (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) dt = F(t) \\ m\frac{d\dot{x}_2}{dt} + k\int (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) dt = 0 \end{cases}$$

4. L'analogie force tension :

$$F(t) \Leftrightarrow e(t), \dot{x}_1 \Leftrightarrow i_1, \dot{x}_2 \Leftrightarrow i_2$$

$$m \Leftrightarrow L, k \Leftrightarrow \frac{1}{C}, \alpha \Leftrightarrow R$$

$e(t)$ représente la force électromotrice.

i_1 et i_2 sont les courants électriques.

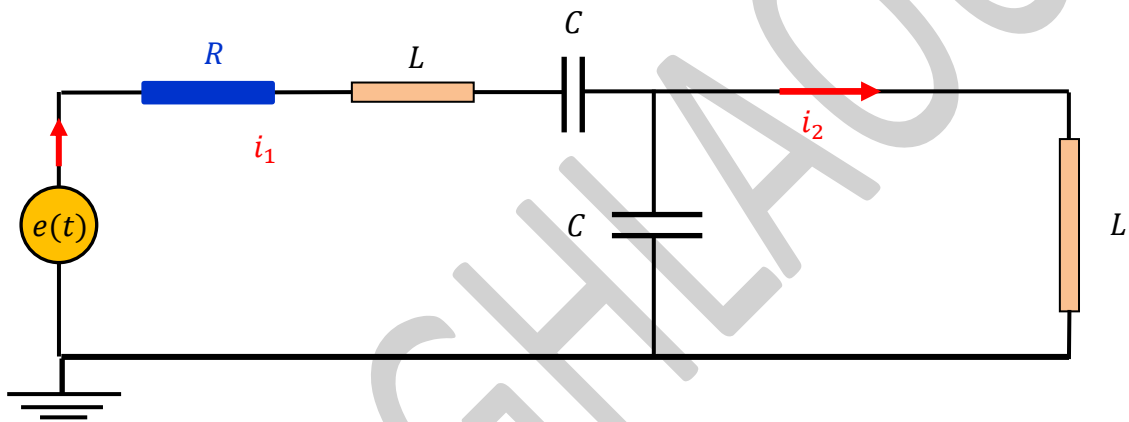
L l'inductance de la bobine.

C la capacité du condensateur.

R la résistance électrique.

$$\begin{cases} L \frac{di_1}{dt} + Ri_1 + \frac{1}{C} \int i_1 dt + \frac{1}{C} \int (i_1 - i_2) dt = e(t) \\ L \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C} \int (i_2 - i_1) dt = 0 \end{cases}$$

5. Les équations électriques permettent d'établir le schéma électrique équivalent au système mécanique :



Exercice 2

1. Le déplacement $u(x, t)$ s'écrit :

$$u(x, t) = Ae^{j(\omega t - kx)} + Be^{j(\omega t + kx)}$$

Avec :

$$k = \frac{\omega}{v}$$

k représente le module du vecteur d'onde et v la vitesse de propagation. Le premier terme d'amplitude A correspond à l'onde progressive et le second d'amplitude B à l'onde régressive.

2. Condition en $x = 0$:

$$F(0, t) = T \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

Ce qui donne :

$$A = B$$

En tenant compte de ce résultat :

$$u(x, t) = Ae^{j\omega t} [e^{-jkx} + e^{jkx}] = 2A \cos(kx) e^{j\omega t}$$

Avec $f(x) = 2A \cos(kx)$ et $g(t) = e^{j\omega t}$.

3. En appliquant le principe fondamental de la dynamique en $x = L$:

$$\vec{F}(L, t) + \vec{F}_b = \vec{0}$$

$\vec{F}(L, t)$ est la tension exercée par la corde.

$\vec{F}_b$ représente la force de rappel du ressort.

La projection suivant Oy donne :

$$-T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} - bu(L, t) = 0$$

Ce qui donne :

$$2kTA \sin(kL) e^{j\omega t} = 2Ab \cos(kL) e^{j\omega t}$$

Soit :

$$\tan(kL) = \frac{b}{kT} \Rightarrow \tan\left(\frac{\omega L}{v}\right) = \frac{C}{\frac{\omega L}{v}}$$

Avec :

$$C = \frac{bL}{T}$$

4. Dans le cas où $\frac{T}{bL} \rightarrow 0$, cela revient à remplacer le ressort par une tige rigide ($b \rightarrow \infty$).

$$\tan\left(\frac{\omega L}{v}\right) \rightarrow \infty$$

Les pulsations propres sont données par :

$$\omega_n = (2n + 1) \frac{\pi v}{2L} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Ainsi les trois premières pulsations propres sont données par :

$$\omega_1 = \frac{\pi v}{2L}, \omega_2 = \frac{3\pi v}{2L} \text{ et } \omega_3 = \frac{5\pi v}{2L}$$

Exercice 3

1. L'onde se propage dans le sens des y croissants, le vecteur d'onde est :

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_y$$

2. Le champ électrique associé est :

$$\vec{E} = \mu_0 c \vec{H} \times \vec{e}_y = -\mu_0 c H_0 \cos(\omega t - ky) \vec{e}_x$$

Le champ $\vec{E}$ est polarisé rectilignement suivant l'axe Ox .

3. Le vecteur de Poynting est donné par :

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{E} \times \vec{H} = \mu_0 c H_0^2 [\cos(\omega t - ky)]^2 \vec{e}_y$$

Sa valeur moyenne dans le temps est :

$$\langle \vec{\mathcal{R}} \rangle = \frac{1}{2} \mu_0 c H_0^2 \vec{e}_y$$

Sujet du concours national d'accès aux écoles supérieures

2019-2020

Durée 2h

Exercice 1

On considère le dispositif mécanique représenté par la figure 1. La tige de longueur 2ℓ et de masse M oscille dans un plan vertical autour d'un axe fixe qui passe par son extrémité O . Son centre G est relié à un bâti fixe (B_1) par l'intermédiaire d'un ressort k_1 . Un amortisseur relie le point A au même bâti B_1 ($OA = \frac{\ell}{2}$).

A l'équilibre, la tige est horizontale. Son déplacement par rapport à sa position d'équilibre est repéré par l'angle θ .

Le moment d'inertie de la tige par rapport à O est :

$$J_o = \frac{4}{3} M \ell^2$$

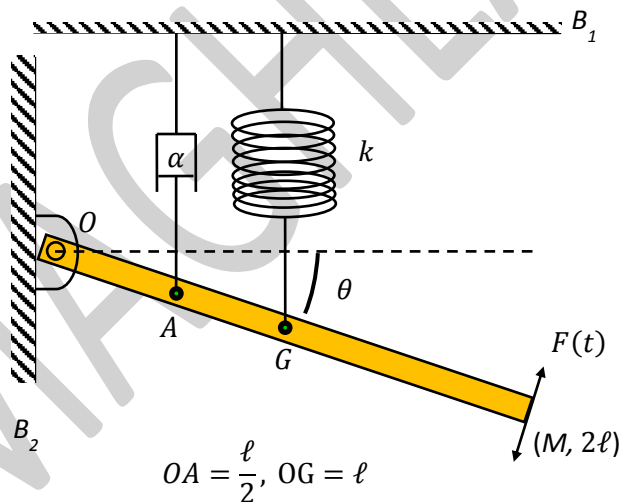


Figure 1

1. En son extrémité, la tige est soumise à une force excitatrice sinusoïdale d'amplitude F_0 et de pulsation ω ($F(t) = F_0 e^{j\omega t}$). La force est tangentielle au déplacement à chaque instant t .
 - a. Déterminer les énergies cinétique T et potentielle U , la fonction de dissipation du système D ainsi que le Lagrangien du système L .
 - b. Etablir l'équation différentielle du mouvement en fonction de θ .
 - c. En utilisant la représentation complexe, chercher l'expression de la solution $\theta(t)$ en régime permanent. Préciser son amplitude A et sa phase φ .
 - d. Déterminer la pulsation de résonance.
 - e. Représentez l'allure de l'amplitude $A(\omega)$ en précisant la position de la pulsation de résonance et de la bande passante.

2. On supprime la force excitatrice et l'amortisseur. On accroche à l'extrémité de la tige un ressort de raideur k_2 qui supporte une masse m (Figure 2). Le déplacement de cette masse par rapport à sa position d'équilibre est noté x_2 .

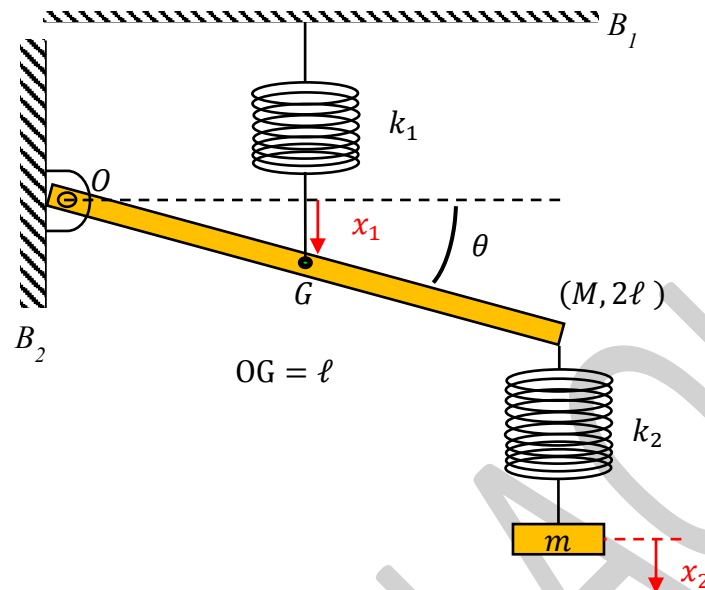


Figure 2

- Déterminer le Lagrangien du système en fonction de x_1 et x_2 .
- Etablir les équations différentielles du mouvement.
- Trouver les pulsations propres du système ω_1 et ω_2 . On prendra :

$$M = \frac{3}{4}m, k_1 = k_2 = k$$
- Quelle est la forme des solutions générales $x_1(t)$ et $x_2(t)$.

Exercice 2

On considère une corde de guitare de longueur L , tendue avec une tension $T = 20.50 \text{ N}$ et fixée à ses extrémités en $x = 0$ et $x = L$. L'élongation verticale $u(x, t)$ de la corde, initialement écartée par rapport à sa position d'équilibre, s'écrit :

$$u(x, t) = u_m \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi)$$

- En utilisant la condition au niveau de la frontière $x = 0$, déterminer ψ et simplifier l'expression de $u(x, t)$.
- En utilisant la condition au niveau de la frontière $x = L$, montrer que seules certaines fréquences f_n sont permises.
- Retrouvez ces fréquences à l'aide d'un schéma détaillé (On se limitera aux trois premières modes).
- Sachant que la corde étudiée est cylindrique en acier, de diamètre $D = 0.40 \text{ mm}$ et de masse volumique $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$, calculer la vitesse de propagation de l'onde.

Exercice 3

Dans le vide en absence de charges et de courants ($\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$), une onde électromagnétique plane, sinusoïdale de pulsation ω , se propage à la vitesse c dans une direction $\vec{u}$ du plan xOy . En un point de l'espace $M(x, y, z)$ et à instant t , le champ électrique de cette onde s'écrit :

$$\vec{E}(M) = E_0 e^{j(\omega t - ax - by)} \vec{u}_z$$

1. Donner les équations de Maxwell dans le vide ($\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$).
2. Que représentent les coefficient a et b ? Déterminer en fonction de a et b la longueur d'onde λ .
3. Etablir l'équation d'onde pour le champ électrique $\vec{E}$ et en déduire la relation entre a , b , ω et c . Comment appelle-t-on cette relation ?
4. Exprimer le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ de l'onde étudiée. Que peut-on dire des polarisations des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$?
5. Calculer l'impédance caractéristique du vide Z_0 , définit par le rapport :

$$Z_0 = \mu_0 \frac{E_0}{B_0}$$

B_0 représente l'amplitude du champ magnétique $\vec{B}$.

6. Déterminer les composantes du vecteur de Poynting $\vec{\mathcal{R}}$. Calculer la valeur moyenne de son module $\langle \mathcal{R} \rangle$. Que représente-t-elle ?

On donne :

$$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1} \text{ et } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

Solution

Exercice 1

4. Système à un degré forcé et amorti

a. Energie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} \frac{4M\ell^2}{3} \dot{\theta}^2$$

Energie potentielle

$$U = \frac{1}{2} k_1 \ell^2 \theta^2$$

Fonction de dissipation

$$D = \frac{1}{2} \alpha \frac{\ell^2}{4} \dot{\theta}^2$$

Travail de la force extérieure

$$W = F 2\ell\theta$$

Le Lagrangien :

$$L = T - U = \frac{1}{2} \frac{4M\ell^2}{3} \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k_1 \ell^2 \theta^2$$

b. L'équation du mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{\partial W}{\partial \theta} \\ \ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta &= \frac{3F}{2M\ell} \\ \delta = \frac{3\alpha}{32M}, \omega_0 &= \sqrt{\frac{3k_1}{4M}} \end{aligned}$$

c. La solution de ce système s'écrit :

La force s'écrit : $F(t) = F_0 e^{j\omega t}$.

La solution du régime permanent est : $\theta(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)}$.

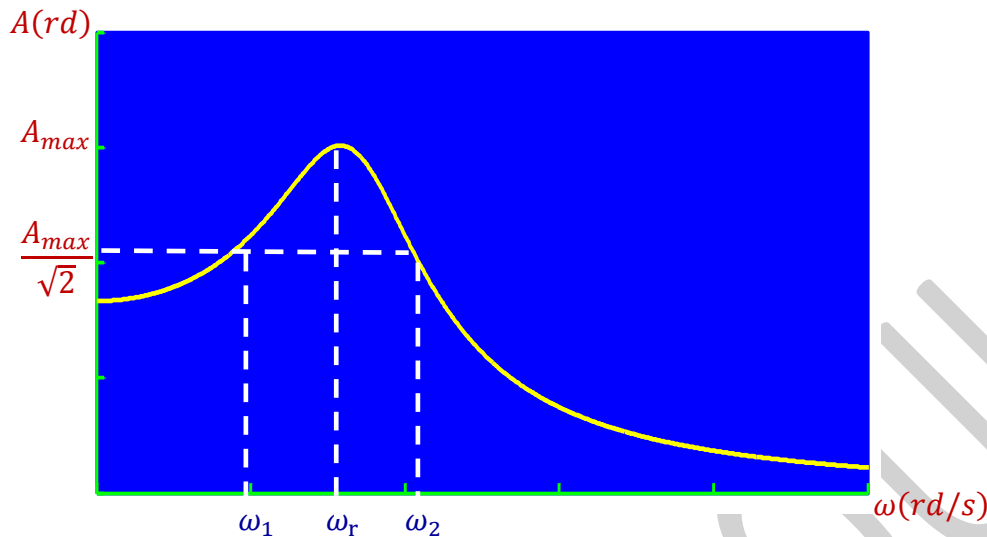
Avec :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\frac{3F_0}{2M\ell}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \\ \varphi &= -\text{Arctg} \left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \end{aligned}$$

d. La résonance correspond à une amplitude maximale :

$$\frac{dA}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

e. L'allure de la courbe :



5. Système à deux degrés, libre et non amorti

a. Le Lagrangien du système :

Les énergies cinétique et potentielle du système

$$T = \frac{1}{2} \frac{4}{3} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - 2x_1)^2$$

Le Lagrangien du système est :

$$L = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} M \dot{x}_1^2 + m \dot{x}_2^2 \right] - \frac{1}{2} [k_1 x_1^2 + k_2 (x_2 - 2x_1)^2]$$

b. Les équations différentielles du mouvement sont :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{3} M \ddot{x}_1 + (k_1 + 4k_2)x_1 - 2k_2 x_2 = 0 \\ m \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - 2k_2 x_1 = 0 \end{cases}$$

c. Sachant que

$$M = \frac{3}{4} m, k_1 = k_2 = k$$

On a

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 + 5k x_1 - 2k x_2 = 0 \\ m \ddot{x}_2 + k x_2 - 2k x_1 = 0 \end{cases}$$

Les solutions du système libre s'écrivent :

$$\begin{cases} x_1 = A_1 e^{j(\omega t + \varphi)} \\ x_2 = A_2 e^{j(\omega t + \varphi)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \\ \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 \end{cases}$$

Le système d'équation devient :

$$\begin{cases} (5k - m\omega^2)x_1 - 2kx_2 = 0 \\ (k - m\omega^2)x_2 - 2kx_1 = 0 \end{cases}$$

Ce système admet des solutions non triviales si et seulement si le déterminant est nul :

$$(5k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - 4k^2 = 0$$

Ou bien

$$m^2\omega^4 - 6km\omega^2 + k^2 = 0$$

Le discriminant est :

$$\Delta = 32k^2m^2$$

Les pulsations propres sont :

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})} \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{(3 + 2\sqrt{2})} \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

d. La forme des solutions générales de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ est :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Exercice 2

1. Le déplacement est nul en $x = 0$ (la corde est fixée) :

$$u(0, t) = u_m \cos(\psi) \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

Pour que cela soit vérifié quel que soit t , il faut que :

$$\cos(\psi) = 0 \Rightarrow \psi = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$$

Le déplacement devient :

$$u(x, t) = \pm u_m \sin(kx) \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

2. La nullité du déplacement en $x = L$ permet d'écrire :

$$u(L, t) = \pm u_m \sin(kL) \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

Cela est vérifié quel que soit t , donc :

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n L = n\pi$$

Sachant que :

$$k_n = \frac{\omega_n}{v} L = \frac{2\pi f_n}{L} L$$

Nous trouvons :

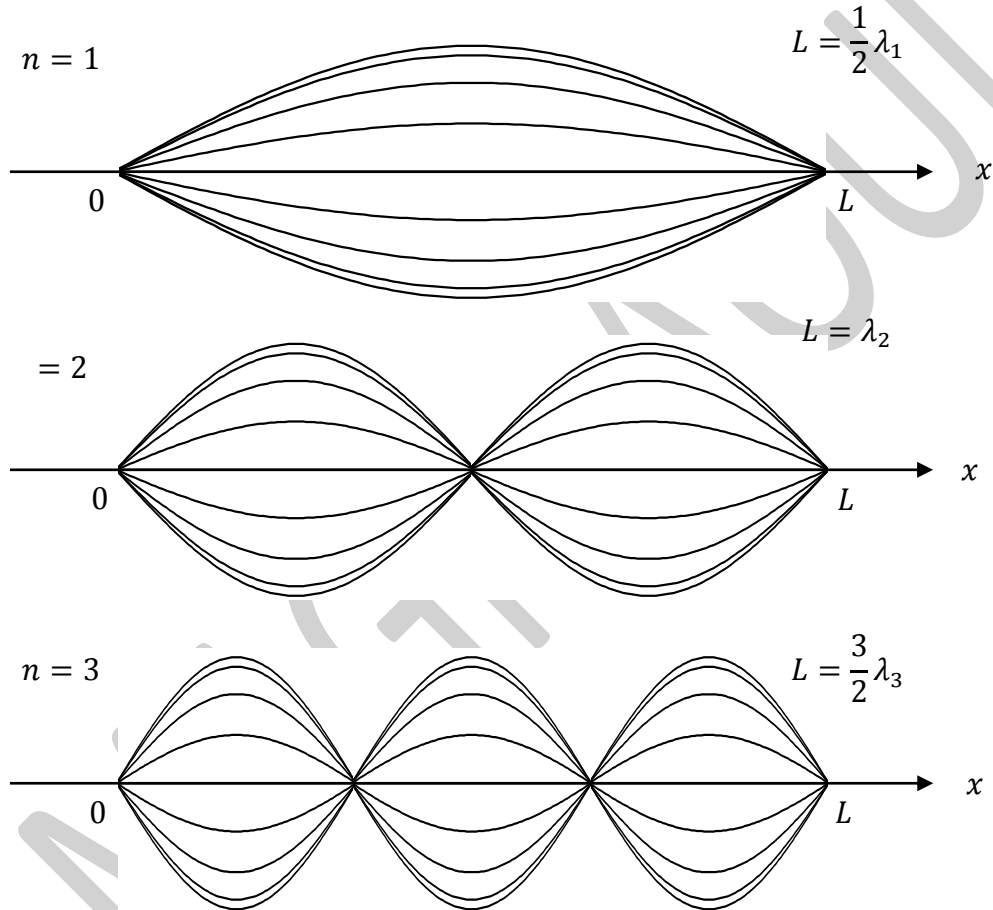
$$\omega_n = \frac{nv}{2L}$$

v représente la vitesse de propagation de l'onde.

3. La distance entre deux nœuds successifs est $\lambda_n/2$ pour le mode n , donc la longueur L est un multiple de la demi longueur d'onde, soit :

$$L = \frac{n\lambda_n}{2}$$

L'allure des trois premiers modes est :



La longueur d'onde est liée à la fréquence

$$\lambda_n = \frac{v}{f_n}$$

Ce qui donne :

$$f_n = \frac{nv}{2L}$$

4. La masse linéique est :

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{\rho \pi D^2}{4}$$

$$\mu = 9.80 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^{-1}$$

La vitesse est :

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 144.63 \text{ m s}^{-1}$$

Exercice 3

1. Dans le vide, en absence de toute charge et de courant, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

2. a et b sont respectivement les composantes du vecteur d'onde suivant x et y .

$$\vec{k} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y$$

$\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ sont respectivement les vecteurs unitaires suivant x et y .

La longueur d'onde est :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

3. Equation de propagation de $\vec{E}$

Nous avons :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

Comme : $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$.

Alors :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\Delta \vec{E}$$

De plus, d'après l'équation de Maxwell Faraday :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

En tenant compte de l'équation de Maxwell Ampère :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Finalement :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Cette équation aux dérivées partielles est appelée équation de d'Alembert.

Avec :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

La relation entre a , b , ω et c est obtenue en injectant l'expression de $\vec{E}$ dans l'équation d'onde :

$$(a^2 + b^2)\vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$k = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\omega}{c}$$

C'est la relation de dispersion.

4. Expression du champ magnétique $\vec{B}$:

Dans l'approximation de l'onde plane sinusoïdale :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{\omega} e^{j(\omega t - ax - by)} (a\vec{e}_x + b\vec{e}_y) \times \vec{u}_z$$

Nous obtenons :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{\omega} e^{j(\omega t - ax - by)} (b\vec{e}_x - a\vec{e}_y)$$

$\vec{E}$ est polarisé rectilignement selon z .

$\vec{B}$ est polarisé rectilignement dans le plan xOy .

Les deux champs sont orthogonaux $\vec{E} \cdot \vec{B}$.

5. L'impédance du vide Z_0 :

$$Z_0 = \mu_0 \frac{E_0}{B_0} = \frac{\mu_0 \omega}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \mu_0 c$$

6. Vecteur de Poynting

$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 \omega} [\cos(\omega t - ax - by)]^2 (a\vec{e}_x + b\vec{e}_y)$$

Le module $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} = \frac{E_0^2}{\mu_0} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\omega} [\cos(\omega t - ax - by)]^2 = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} [\cos(\omega t - ax - by)]^2$$

La valeur moyenne $\langle \mathcal{R} \rangle$:

$$\langle \mathcal{R} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting représente l'intensité du champ électromagnétique à travers une surface perpendiculaire.

Sujet du concours national d'accès aux écoles supérieures

2018-2019

Durée 1h15

Exercice 1

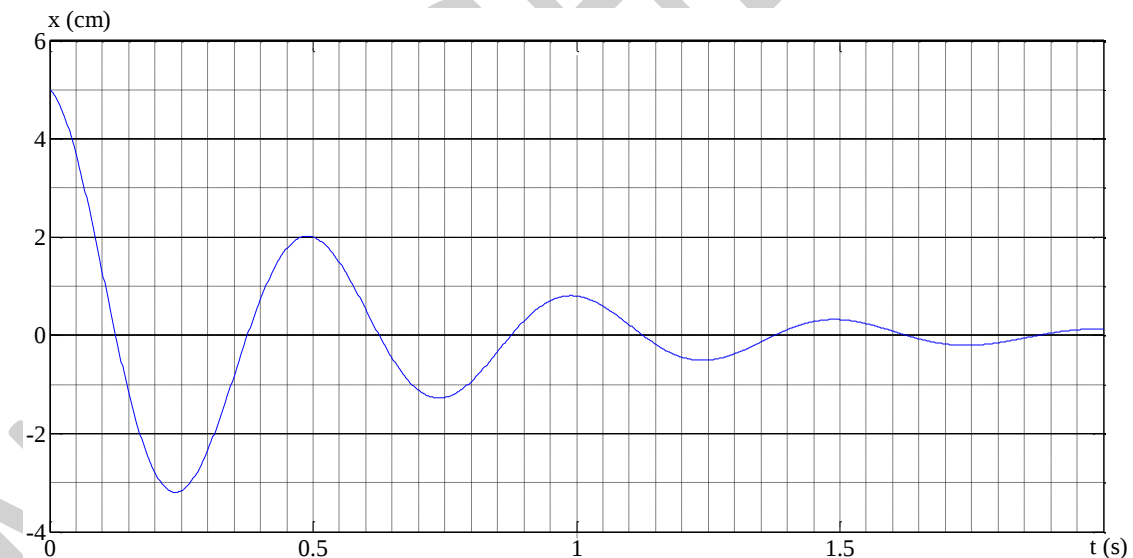
Partie A

Un bloc de masse $m = 25 \text{ kg}$ est monté sur un support en caoutchouc de masse négligeable qui se comprime vers l'état d'équilibre de 6.08 cm sous l'effet de ce poids. Sachant que ce dispositif peut être modélisé par un système masse-ressort-amortisseur de constante de raideur k et de coefficient de frottement α .

1. Calculer la constante d'élasticité k du dispositif en unité SI ($g = 9.80 \text{ N kg}^{-1}$).
2. Calculer la pulsation propre ω_0 du système en unité (SI).

Partie B

Quand le bloc vibre librement on enregistre des oscillations amorties de la masse avec un déplacement initial de 5 cm à partir de sa position d'équilibre (voir figure ci-dessous).



1. Déduire du graphe la pseudo-période T_a de l'oscillation amortie.
2. Calculer $D = \ln \left[\frac{x(0)}{x(T_a)} \right]$. Comment appelle-on cette quantité ?
3. Déduire des questions 1. et 2. la valeur du facteur d'amortissement δ en unité (SI).
4. Calculer le coefficient de frottement α en unité (SI).
5. Calculer la pseudo-pulsation ω_a par deux manières différentes en unité (SI).
6. On élimine l'oscillation amortie en remplaçant la masse m par m_0 . A partir de quelle valeur de m_0 , les vibrations disparaissent ?

Exercice 2

Une onde transversale se propageant sur une corde est donnée par :

$$u(x, t) = \sqrt{3} \cos(3t - \pi x) + \sqrt{3} \cos(3t + \pi x)$$

1. Déterminer pour chaque terme, le sens de propagation, l'amplitude, la pulsation ω , le module du vecteur d'onde k et la vitesse de propagation de l'onde v .
2. Quelle est dans ce cas l'amplitude maximale de cette onde ?
3. Quelles sont la vitesse de vibration des particules $\dot{u}(x, t)$ et la force $F(x, t)$ de la corde en un point d'abscisse x pour une tension $T = 0,5 \text{ N}$?
4. Quelles est l'impédance mécanique $Z(x)$ de la corde au point d'abscisse x associée à l'onde incidente (1^{er} terme de $u(x, t)$) en notation complexe ?
5. Montrer que $u(x, t)$ peut se mettre sous la forme $u(x, t) = g(x)f(t)$ (fonction à variables séparées). Conclure.
6. On prend les points d'abscisse $x_n = n + \frac{1}{2}$ et $X_n = n$ où $n \in \mathbb{Z}$.
 - a. Calculer $u(x, t)$ en $x = x_n$ puis en $x = X_n$.
 - b. Que représentent ces points sur la corde ?

On donne :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Solution

Exercice 1

Partie A

1. Le système est en équilibre sur le support :

$$k\Delta\ell = mg$$

$\Delta\ell$ représente la déformation du support à l'équilibre :

$$k = \frac{25 \cdot 9.8}{6.08 \cdot 10^{-3}} = 4029.60 \text{ Nm}^{-1}$$

2. La pulsation propre du système ω_0 :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 12.69 \text{ rd s}^{-1}$$

Partie B

1. La pseudo période T_a de l'oscillation amortie à partir du graphe :

$$T_a = 0.5 \text{ s}$$

2. Calcul de D à partir du graphe :

$$x(0) = 5 \text{ cm}, x(T_a) = 2 \text{ cm}$$

D'où

$$D = \ln \frac{5}{2} = 0.92$$

Cette quantité est le décrément d'ordre 1.

3. La valeur du facteur d'amortissement δ en unité (SI)

$$D = \delta T_a \Rightarrow \delta = \frac{D}{T_a} = 1.84 \text{ s}^{-1}$$

4. Le coefficient d'amortissement α en unité SI

$$\delta = \frac{\alpha}{2m} \Rightarrow \alpha = 2m\delta = 92 \text{ kg s}^{-1}$$

5. Calcul de la pseudo-pulsation ω_a par deux manières différentes

A partir de la pseudo-période T_a

$$\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} = 12.57 \text{ rd s}^{-1}$$

A partir de la pulsation propre et le facteur d'amortissement

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 12.57 \text{ rd s}^{-1}$$

6. La valeur de la masse m_0

On élimine l'oscillation amortie en remplaçant la masse m par m_0 . Les vibrations amorties disparaissent si on passe au régime d'amortissement critique ou apériodique avec la condition :

$$\omega_0 \leq \delta \Rightarrow m \leq \frac{\alpha^2}{4k} = m_0$$

Ce qui donne $m \leq m_0 = 0.52 \text{ kg}$

Exercice 2

Une onde transversale se propageant sur une corde est donnée par :

1. Sens de propagation, l'amplitude, la pulsation ω , le module du vecteur d'onde k et la vitesse de l'onde v .

Terme	$\sqrt{3} \cos(3t - \pi x)$	$\sqrt{3} \cos(3t + \pi x)$
Sens de propagation	Sens des x croissants	Sens des x décroissants
Amplitude	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
Pulsation	3	3
Module du vecteur d'onde	π	π
Vitesse de l'onde	$3/\pi$	$3/\pi$

2. L'amplitude maximale de l'onde est la somme des 2 amplitudes $= 2\sqrt{3}$.

3. La vitesse de vibration $\dot{u}(x, t)$:

$$\dot{u}(x, t) = -3\sqrt{3} \sin(3t - \pi x) - 3\sqrt{3} \sin(3t + \pi x)$$

Ce qui donne

$$\dot{u}(x, t) = -3\sqrt{3} [\sin(3t - \pi x) + \sin(3t + \pi x)] = -6\sqrt{3} \sin(3t) \cos(\pi x)$$

La force $F(x, t)$ de la corde en un point d'abscisse x est :

$$F(x, t) = -T \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \pi\sqrt{3} \cos(3t) \sin(\pi x)$$

4. L'impédance mécanique $Z(x)$ associée à l'onde incidente

$$Z(x) = \frac{F_i(x, t)}{\dot{u}_i(x, t)}$$

Nous avons :

$$F_i(x, t) = -0.5 \pi\sqrt{3} \sin(3t - \pi x)$$

$$\dot{u}_i(x, t) = -3\sqrt{3} \sin(3t - \pi x)$$

Nous obtenons :

$$Z(x) = \frac{\pi}{6}$$

5. $u(x, t)$ sous la forme $u(x, t) = g(x)f(t)$

En utilisant la relation $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos(a) \cos(b)$, nous trouvons :

$$u(x, t) = 2\sqrt{3} \cos(3t) \cos(\pi x)$$

La fonction d'onde dans ce cas peut se mettre sous la forme $u(x, t) = g(x)f(t)$ ce qui signifie que l'onde est plane stationnaire.

6. Calcule de $u(x, t)$ en $x = X_n$, puis en $x = x_n$.

$$u(X_n, t) = \pm 2\sqrt{3} \cos(3t), u(x_n, t) = 0$$

X_n sont les positions des points d'amplitudes maximales (les ventres).

x_n sont les positions des points d'amplitudes minimales (les nœuds).

N. MAGHLOUI

Annexe

Annexe A : Rappels mathématiques

- **Condition de réalité**

Soit l'équation d'un oscillateur linéaire suivante :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$

où ω_0 représente un réel positif.

Cette équation différentielle est homogène, elle tolère une solution du type $x = Ce^{rt}$.

En injectant dans l'équation différentielle nous obtenons :

$$r^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow r = \pm i\omega_0$$

La solution générale de l'équation (1) s'écrit :

$$x = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \quad (2)$$

où A et B sont des constantes complexes.

La transformation trigonométrique s'écrivant :

$$e^{i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad e^{-i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) - i \sin(\omega_0 t)$$

Nous obtenons en injectant dans (2) :

$$x = (A + B) \cos(\omega_0 t) + i(A - B) \sin(\omega_0 t) \quad (3)$$

x est une solution physique qui doit être donc réelle, pour cela il faudrait que A et B soient complexes conjuguées l'un de l'autre, ainsi :

$$A = a + ib \quad \text{et} \quad B = a - ib$$

a et b sont des constantes réelles.

L'équation (3) devient :

$$x = 2a \cos(\omega_0 t) - 2b \sin(\omega_0 t) \quad (4)$$

posons : $u = 2a$ et $2b = v$.

L'équation (4) s'écrit :

$$x = u \cos(\omega_0 t) - v \sin(\omega_0 t) \quad (5)$$

soit :

$$x = \sqrt{u^2 + v^2} \left[\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \cos(\omega_0 t) - \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \sin(\omega_0 t) \right] \quad (6)$$

Posons :

$$\cos(\varphi) = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

et :

$$\sin(\varphi) = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

d'où

$$x = c [\cos(\varphi) \cos(\omega_0 t) - \sin(\varphi) \sin(\omega_0 t)] = c \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (7)$$

avec : $c = \sqrt{u^2 + v^2}$

Finalement :

$$x = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} = u \cos(\omega_0 t) - v \sin(\omega_0 t) = c \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (8)$$

Les trois écritures sont égales, la solution est réelle lorsque A et B sont complexes conjuguées l'un de l'autre. Dans ce cas la solution est réelle.

On montre aussi que $x = e^{i(\omega_0 t + \varphi)}$ est solution de l'équation 1.

• Formules trigonométriques

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b) \quad (9)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b) \quad (10)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \quad (11)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \quad (12)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad (13)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad (14)$$

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad (15)$$

$$\cos(a) - \cos(b) = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad (16)$$

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad (17)$$

$$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt} \sin(\omega t) = \omega \cos(\omega t) \quad , \quad \int \cos(\omega t) dt = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt} \cos(\omega t) = -\omega \sin(\omega t) \quad , \quad \int \sin(\omega t) dt = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \quad (20)$$

• Moyenne d'une fonction périodique

Soit $f(t)$ une fonction périodique de t , de période T , de pulsation $\omega = 2\pi/T$, on définit sa moyenne temporelle par :

$$\langle f(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t) dt \quad (21)$$

Exemple : calculons $\langle \sin(\omega t) \rangle_T$.

Nous avons :

$$\langle \sin(\omega t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \sin(\omega t) dt = -\frac{1}{\omega T} [\cos(\omega t)]_t^{t+T} = 0$$

Donc :

$$\langle \sin(\omega t) \rangle_T = 0 \quad (22)$$

De la même manière, nous obtenons :

$$\langle \cos(\omega t) \rangle_T = \langle \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) \rangle_T = 0 \quad (23)$$

$$\langle \cos(n\omega t) \rangle_T = \langle \sin(n\omega t) \rangle_T = 0 \text{ avec } n \text{ entier } \geq 1 \quad (24)$$

D'autre part :

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle_T = \left\langle \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} \right\rangle_T = \frac{1 + \langle \cos(2\omega t) \rangle_T}{2} = \frac{1}{2} \quad (25)$$

Finalement :

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle_T = \langle \sin^2(\omega t) \rangle_T = \frac{1}{2} \quad (26)$$

- Quelques relations d'analyse vectorielle

f est un champ scalaire, $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont des champs vectoriels.

$$\text{div}[\overrightarrow{\text{grad}}(f)] = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \Delta f \quad (27)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}[\overrightarrow{\text{grad}}(f)] = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0} \quad (28)$$

$$\text{div}[\overrightarrow{\text{rot}}(f)] = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad (29)$$

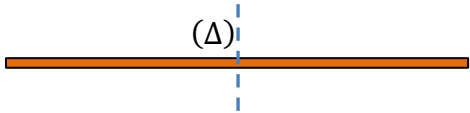
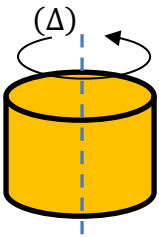
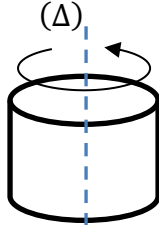
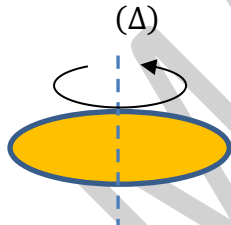
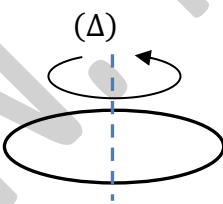
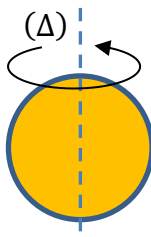
$$\overrightarrow{\text{rot}}[\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})] = \overrightarrow{\text{grad}}[\text{div}(\vec{A})] - \Delta \vec{A} \quad (30)$$

$$\text{div}[\vec{A} \times \vec{B}] = \vec{B}[\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})] - \vec{A}[\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})] \quad (31)$$

Annexe B : Compléments de mécanique

• Moments d'inertie de quelques solides

Moment d'inertie de quelques solides homogènes, par rapport à un axe Δ passant par leur centre de masse.

Tige mince de masse m et de longueur ℓ 	$I_{\Delta} = \frac{m\ell^2}{12}$ (Δ) est un axe perpendiculaire à la tige.
Cylindre plein de masse M et de rayon R 	$I_{\Delta} = \frac{1}{2}MR^2$ (Δ) représente l'axe de révolution du cylindre.
Cylindre creux de masse M et de rayon R 	$I_{\Delta} = MR^2$ (Δ) représente l'axe de révolution du cylindre.
Disque de masse M et de rayon R 	$I_{\Delta} = \frac{1}{2}MR^2$ (Δ) représente l'axe de révolution du disque.
Anneau de masse M et de rayon R 	$I_{\Delta} = MR^2$ (Δ) représente l'axe de révolution de l'anneau.
Sphère pleine de masse M et de rayon R 	$I_{\Delta} = \frac{2}{5}MR^2$ (Δ) est un axe qui passe par le centre d'inertie de la sphère.

- **Energie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe de direction fixe**

Dans le cas où le solide effectue une rotation autour d'un axe en translation, mais tout en gardant une direction fixe (voiture : rotation d'une roue). Le théorème de Koenig permet de déterminer l'énergie cinétique dans le référentiel du centre de masse G . Le mouvement est décomposé en une rotation autour de l'axe de rotation (Δ_G) et un mouvement de translation de G .

$$T = \frac{1}{2} I_{\Delta_G} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M v_G^2$$

M est la masse du solide.

v_G représente la vitesse du centre de masse.

I_{Δ_G} représente le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Δ_G) passant par son centre de masse G .

$\dot{\theta}$ la vitesse angulaire de rotation.

- **Energie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe**

Dans le cas particulier où l'axe de rotation est fixe. L'énergie peut être calculée de deux façons :

- **Théorème d'Huygens**

Dans ce cas l'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} I_{\Delta} \dot{\theta}^2$$

I_{Δ} représente le moment d'inertie par rapport à l'axe (Δ) parallèle à l'axe (Δ_G) . D'après le théorème d'Huygens

$$I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + M a^2$$

a représente la distance entre les deux axes (Δ) et (Δ_G) .

- **Théorème de Koenig**

L'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} I_{\Delta_G} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M v_G^2$$

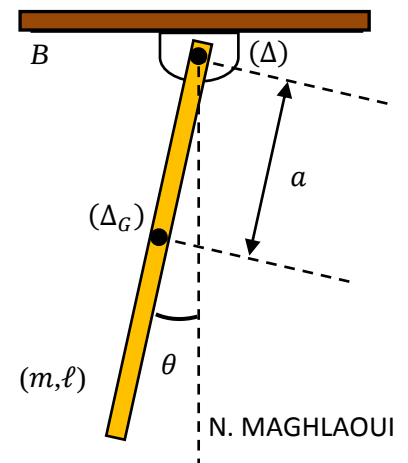
Le moment d'inertie est exprimé par rapport à l'axe (Δ_G) et passant par G .

Exemple 1 (rotation autour d'un axe fixe):

- **En utilisant le théorème d'Huygens**

Une tige homogène de masse m et de longueur ℓ , tourne autour d'un axe fixe (Δ) sortant et passant par l'extrémité de la tige. (Δ_G) est un axe parallèle à (Δ) passant par son centre de masse. L'énergie cinétique est :

$$T = \frac{1}{2} I_{\Delta} \dot{\theta}^2$$



D'après de théorème d'Huygens :

$$I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + ma^2 = \frac{m\ell^2}{12} + \frac{m\ell^2}{4} = \frac{m\ell^2}{3}$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{m\ell^2}{3} \dot{\theta}^2$$

– **En utilisant le théorème de Koenig**

Dans ce cas l'énergie cinétique est :

$$T = \frac{1}{2} I_{\Delta_G} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m v_G^2$$

v_G représente la vitesse du centre de masse. I_{Δ_G} le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ_G , passant par son centre de masse et perpendiculaire au plan du mouvement.

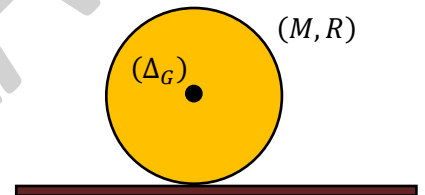
$$v_G = \frac{\ell}{2} \dot{\theta}$$

Nous trouvons :

$$T = \frac{1}{2} \frac{m\ell^2}{12} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{m\ell^2}{4} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{m\ell^2}{3} \dot{\theta}^2$$

Exemple 2 (rotation autour d'un axe de direction fixe):

Un cylindre plein, homogène, de masse M et de rayon R roule sans glisser sur un plan horizontal. L'énergie cinétique est calculée à l'aide du théorème de Koenig.



$$T = \frac{1}{2} I_{\Delta_G} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M v_G^2$$

I_{Δ_G} représente son moment d'inertie par rapport à son axe de révolution (Δ_G) . v_G la vitesse de son centre de masse.

Dans ce cas : $v_G = R\dot{\theta}$

$$T = \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M (R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} \frac{3}{2} MR^2 \dot{\theta}^2$$

Bibliographie

- [1] Gorge C. King, « Vibrations and Waves », Wiley Inc, ISBN: 978-1-2118-68178-7, 2009.
- [2] Tamer Becherrawy, « Mechanical and electromagnetic vibrations and waves », Wiley Inc, ISTE Ltd, ISBN: 978-1-84821-283-1, 2012.
- [3] E. AMZALLAG, J. Cipriani, N. Piccioli, « Rappel de Cours et Exercices Corrigés de Physique, Tome 4, Ondes », Edisciences International, Paris, 1997.
- [4] R. Gabillard, « Vibrations et phénomènes de propagation », Dunod, Paris, 1969.
- [5] H. Djelouah, « Vibrations et Ondes : cours et exercices corrigés », Pages bleus, 2020.
- [6] A. P. French, « Vibrations and Waves », W. W. Norton and company INC New York, 1970.
- [7] R. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands , M. Bloch , G. Delacôte, « Le Cours de physique de Feynman : Electromagnétisme, tome 1 », Addison-Wesley, seconde édition, 1994.
- [8] J. Edminister, « Electromagnétisme : cours et problèmes ». Série Schaum Ediscience International 2000.
- [9] R. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, M. Bloch, G. Delacôte, « Le Cours de physique de Feynman » : Electromagnétisme, tome 2 », Addison-Wesley, seconde édition, 1994.
- [10] H. J. Pain, «The Physics of Vibrations and waves», Wiley, 2005.
- [11] H. J. Pain, «Introduction to Vibrations and waves», Wiley, 2015.
- [12] S. G. Kelly, «Mechanical Vibrations-Theory and Applications», Cengage Learning, 2011.