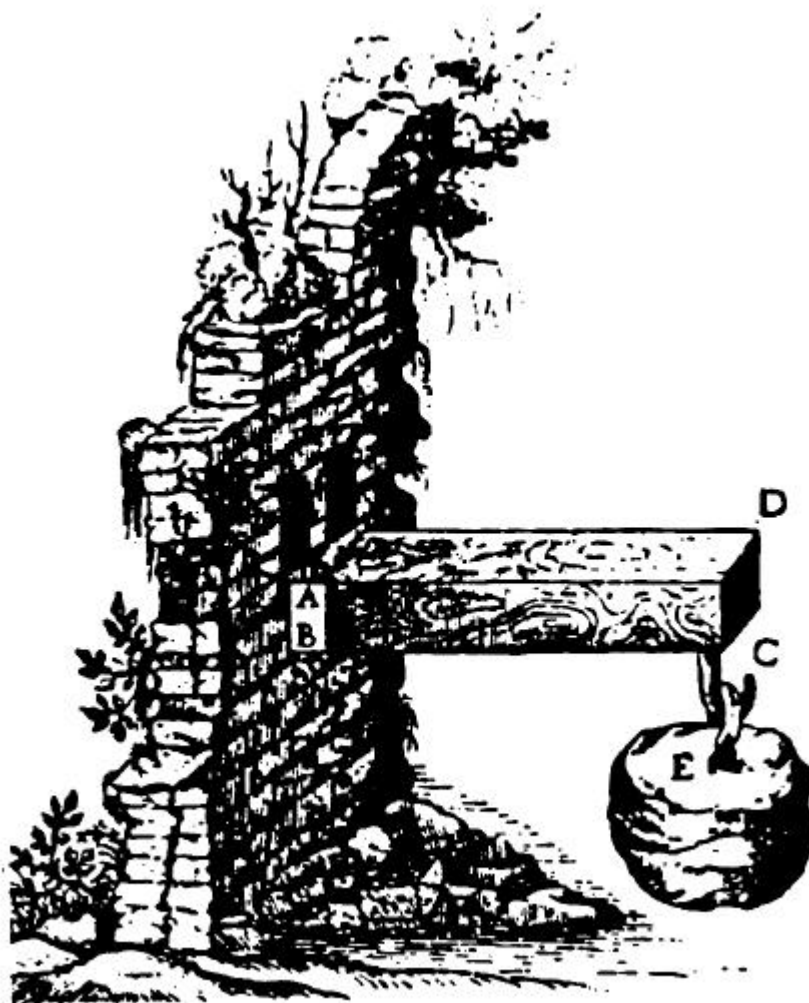


RESISTANCE DES MATERIAUX

RESISTANCE DES MATERIAUX



INTRODUCTION - HYPOTHESES



Gravure montrant l'essai d'une poutre en flexion

RESISTANCE DES MATERIAUX

(Extrait de « *Discorsi e dimostrazioni mathematiche* » de Galilée)

RESISTANCE DES MATERIAUX

SOMMAIRE

1.	EN QUOI ÇA CONSISTE ?	4
2.	INTRODUCTION	4
3.	HYPOTHESES	4
3.1	LE MATERIAU	5
3.1.1	Continuité de la matière.....	5
3.1.2	Homogénéité.....	5
3.1.3	Isotropie.....	5
3.2	LA GEOMETRIE	5
3.3	LES FORCES APPLIQUEES.....	7
3.3.1	Plans de symétries.....	7
3.3.2	Points ou zones d'application des forces.....	8
3.3.3	Types de forces extérieures	8
3.4	DEFORMATION	11
3.4.1	Hypothèse de Navier – Bernouilli	11
3.4.2	Hypothèse de Barré de Saint Venant	11
4.	RESOLUTION	12



RESISTANCE DES MATERIAUX

1. En quoi ça consiste ?

Pour effectuer un calcul de RDM, il est nécessaire de connaître les actions mécaniques exercées sur le mécanisme (actions déterminées dans l'étude de dynamique) et les matériaux utilisés.

L'étude de RDM va permettre de définir les sollicitations et les contraintes qui en résultent. A l'aide des caractéristiques des matériaux (propriétés mécaniques), nous allons pouvoir en déduire les déformations du matériau, et dans les cas extrêmes, sa rupture.

2. Introduction

La résistance des matériaux n'étudie que des solides de formes simples : les « poutres ». Bien souvent, il est possible de modéliser des solides par une poutre, à la condition que ceux-ci respectent certaines hypothèses. L'objet de ce cours est de présenter les hypothèses de la RDM, préalable indispensable à l'étude.

La résistance des matériaux est l'étude de la résistance et de la déformation des solides (arbres de transmissions, bâtiments, diverses pièces mécaniques..) dans le but de déterminer ou vérifier leurs dimensions afin qu'ils supportent les charges qu'ils subissent, dans des conditions de sécurité satisfaisantes et au meilleur coût (optimisation des formes, des dimensions, des matériaux..). Son domaine d'application étant très large et les situations rencontrées nombreuses et variées, il est nécessaire de mettre en place des hypothèses simplificatrices dans le but de standardiser les cas d'étude.



FIGURE : CHARIOT ELEVATEUR

La photo ci-contre représente un magnifique chariot élévateur d'un domaine viticole d'un village bourguignon (commençant par un C et finissant par un S..), mondialement connu pour ses vins blancs. Ce chariot élévateur est destiné à divers travaux sur l'exploitation, et en fonction de son utilisation, nous nous intéresserons plus particulièrement aux fourches de ce chariot.

3. Hypothèses

Dans ce paragraphe, nous allons citer les différentes hypothèses que l'on est en droit de formuler dans le cadre de la Résistance des Matériaux. La figure suivante montre l'application au fourches du chariot élévateur.

RESISTANCE DES MATERIAUX

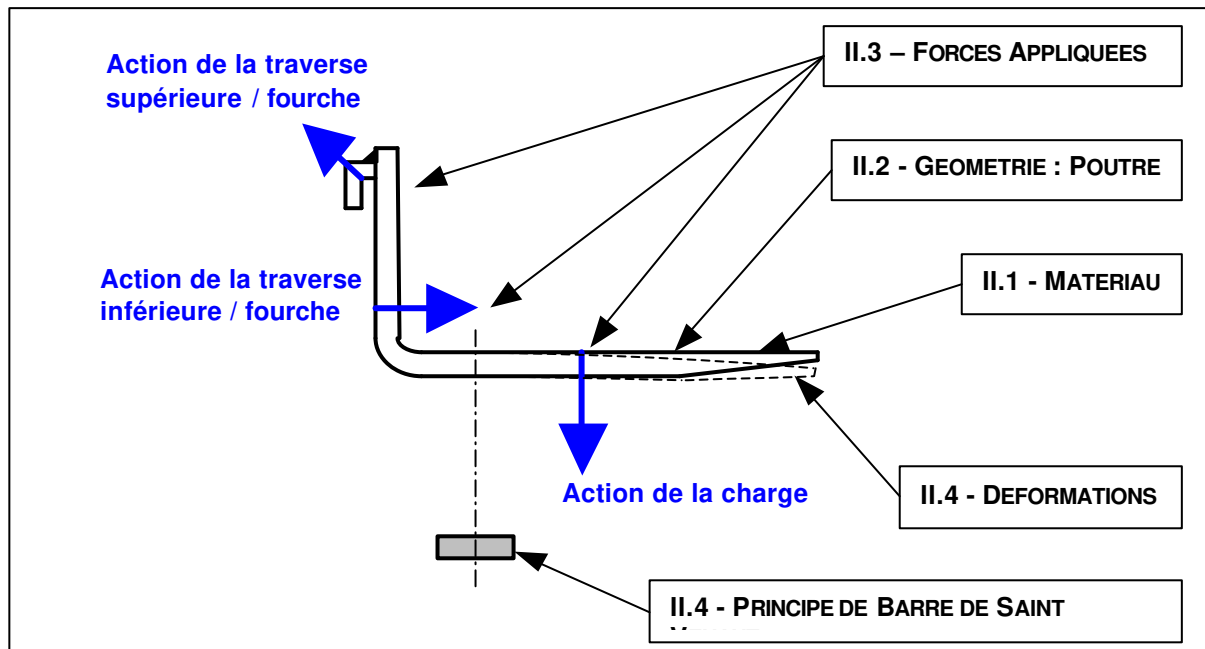


FIGURE : FOURCHE DU MAGNIFIQUE CHARIOT ELEVATEUR

3.1 Le matériau

3.1.1 Continuité de la matière

Lorsqu'on regarde au microscope la coupe d'une pièce en métal, on voit généralement une structure fibreuse, ou quelquefois une structure granulaire. Toutefois, les distances entre ces fibres ou ces grains sont très petites par rapport aux dimensions des plus petites pièces mécaniques qui sont étudiées. On peut alors raisonnablement considérer le matériau comme continu.

3.1.2 Homogénéité

On admet que les matériaux ont les mêmes propriétés mécaniques en tous points. Cela est à peu près vérifié pour la plupart des métaux, mais il faut savoir que cette hypothèse n'est qu'une grossière approximation pour les matériaux tels que le bois ou le béton.

3.1.3 Isotropie

On admet que les matériaux étudiés ont, en un même point, les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions. Cela est à peu près vrai pour les aciers, mais il faut savoir que cette hypothèse est loin de la réalité pour le bois et les matériaux composites par exemple.

3.2 La géométrie

Les seuls solides que nous étudierons seront du type poutre (solide idéal du point de vue de la RDM : solide défini par sa ligne moyenne et sa section droite). La poutre est un solide dont la longueur est prépondérante devant les autres dimensions transversales.

RESISTANCE DES MATERIAUX

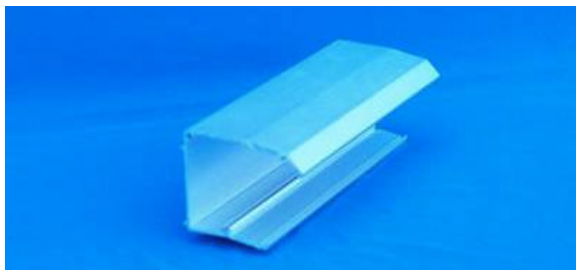
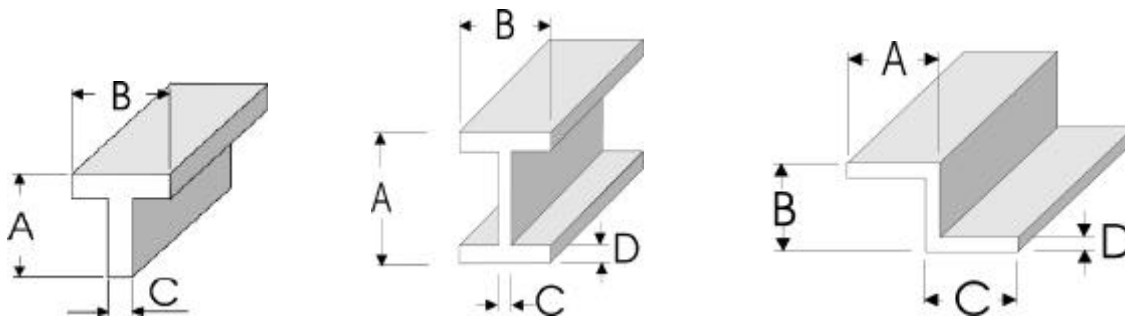


FIGURE : GEOMETRIES DE POUTRES

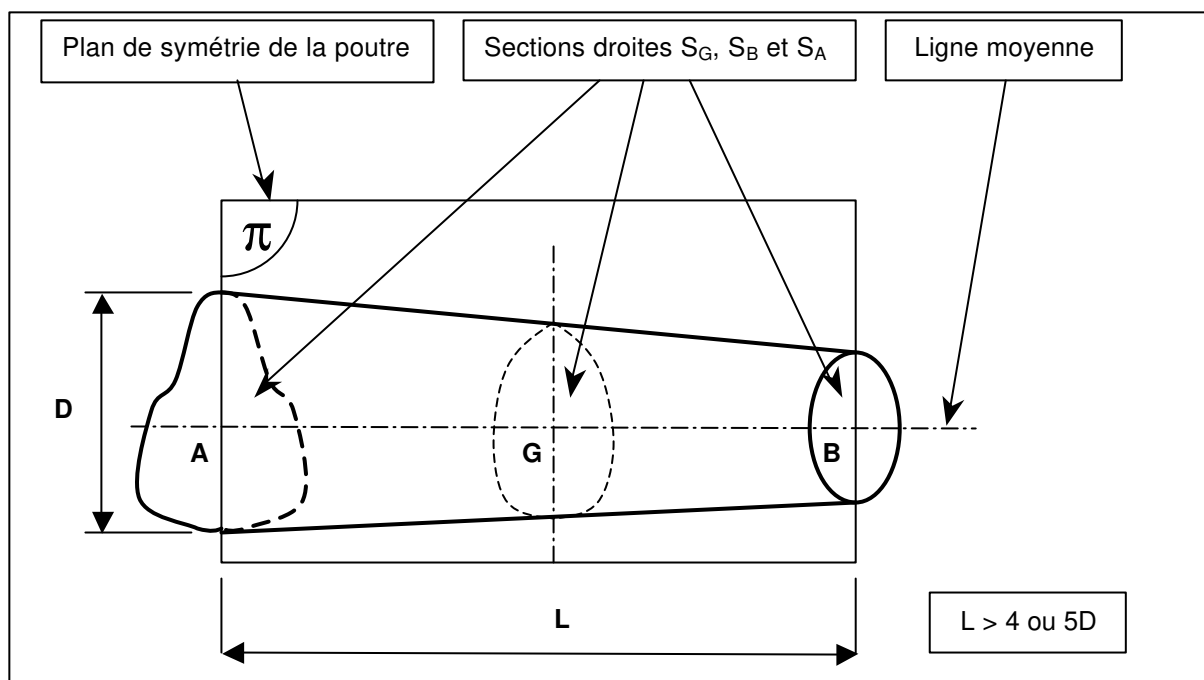


FIGURE : NOTION DE POUTRE

Une poutre est définie par :

- ❖ sa ligne moyenne (ligne droite ou ligne courbe à grand rayon de courbure, sur laquelle se trouve le barycentre G des sections droites). Celle-ci est le plus souvent rectiligne ;

RESISTANCE DES MATERIAUX

❖ sa section droite (section qui engendre la poutre, constante et de centre de surface G). Celle-ci est en principe constante et son centre de surface est sur la ligne moyenne.

Dans le cas de la fourche du chariot élévateur :

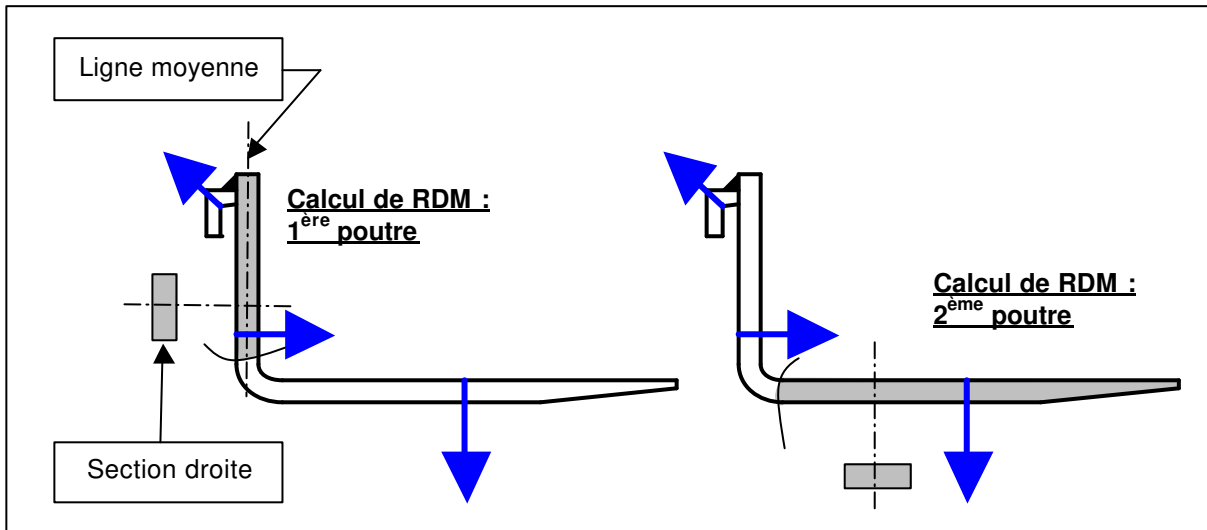


FIGURE : ASSIMILATION A UNE POUTRE

Bien souvent, les poutres étudiées ne remplissent pas ces conditions. Les relations établies en tenant compte de ces hypothèses ne s'appliquent pas parfaitement, d'où la nécessité d'introduire un coefficient de sécurité dans les calculs de dimensionnement.

3.3 Les forces appliquées

3.3.1 Plans de symétries

Les forces extérieures appliquées à la poutre (P) seront situées soit dans le plan de symétrie (P_S), soit symétriquement par rapport au plan de symétrie.

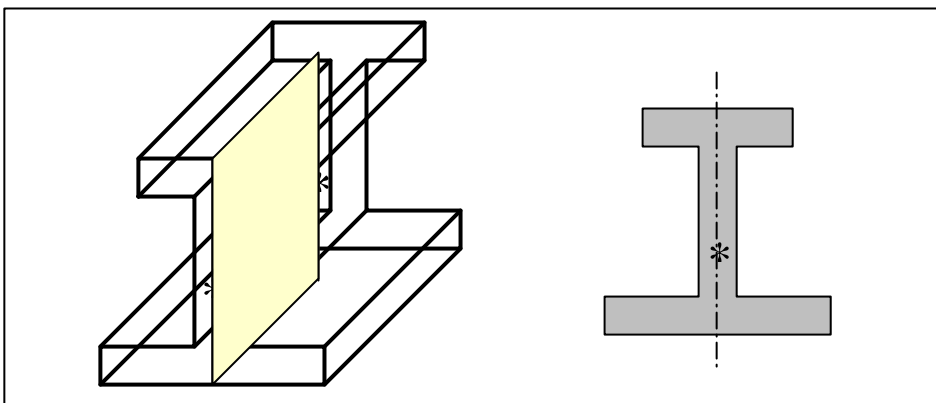


FIGURE : PLANS DE SYMETRIES

RESISTANCE DES MATERIAUX

3.3.2 Points ou zones d'application des forces

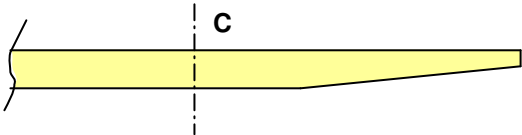
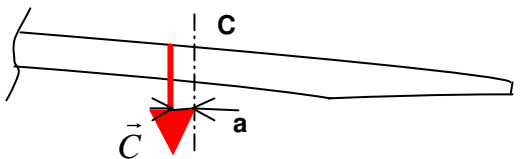
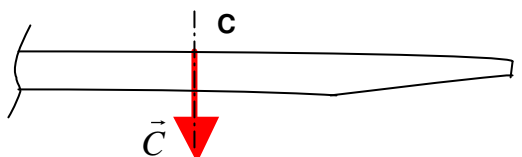
En RDM, il n'est pas possible de remplacer un système de forces par un système équivalent du point de vue de l'équilibre car les effets physiques (déformations, contraintes...) sont différents.

Dans les deux cas, la poutre est en équilibre, mais par contre les déformations sont totalement différentes.

On fait également les approximations suivantes :

- ☞ les contacts de la poutre et du milieu extérieur s'effectuent au niveau de la ligne moyenne ;
- ☞ les supports des forces représentant les actions de contact ne sont pas déplacés après déformation.

Reprenons le cas de la fourche du chariot élévateur (toujours aussi magnifique) :

	Poutre avant déformation
	Poutre après grande déformation
	Poutre après petite déformation (a négligé)

3.3.3 Types de forces extérieures

On distingue les actions à distance et les actions de contact.

Actions à distance : poids, magnétisme...

Actions de contact : charges concentrées en un point ou charges réparties.

RESISTANCE DES MATERIAUX

3.3.3.1 Charges concentrées en un point

Dans le cas de la fourche du chariot élévateur :

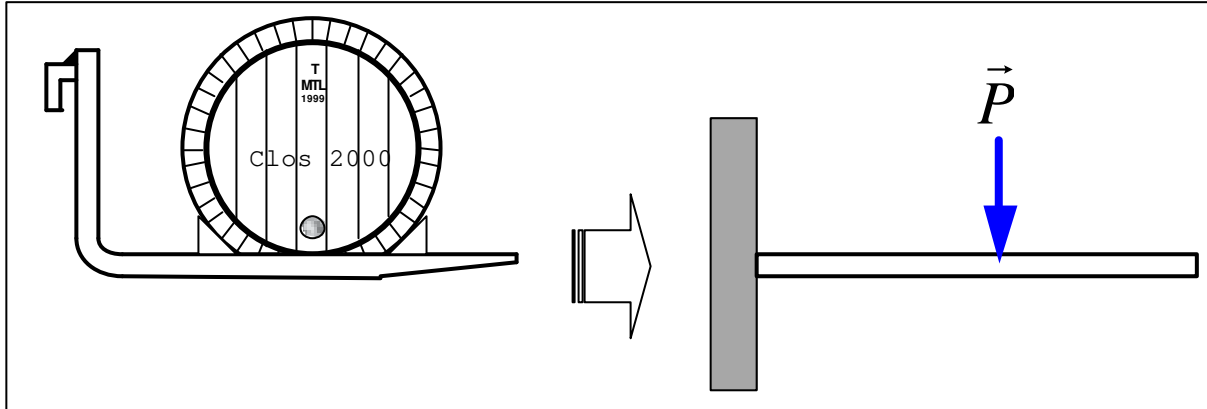


FIGURE : CHARGE CONCENTREE

Exemple : reprenons le cas de la fourche du chariot élévateur.

Données du problème :

- ❖ le chariot transporte un fût de vin de Chablis Grand Cru les Clos 2000 ;
- ❖ le fût contient 228 litres ;

Remarque : c'est malheureux à dire, mais pour faire le calcul, on assimilera la densité de ce divin breuvage à celle de l'eau...



La masse totale M embarquée sur les fourches (il y a 2 fourches) du chariot élévateur est donc :

$$M = 228 \times 1 \approx 228 \text{ kg}$$

Le poids P s'exerçant sur une fourche est : $P = \frac{228 \times 10}{2} = 1140 \text{ N}$

L'intensité de la charge concentrée sur une fourche est alors : $P = 1140 \text{ N}$

3.3.3.2 Charge uniformément répartie



RESISTANCE DES MATERIAUX

Dans le cas de la fourche du chariot élévateur :

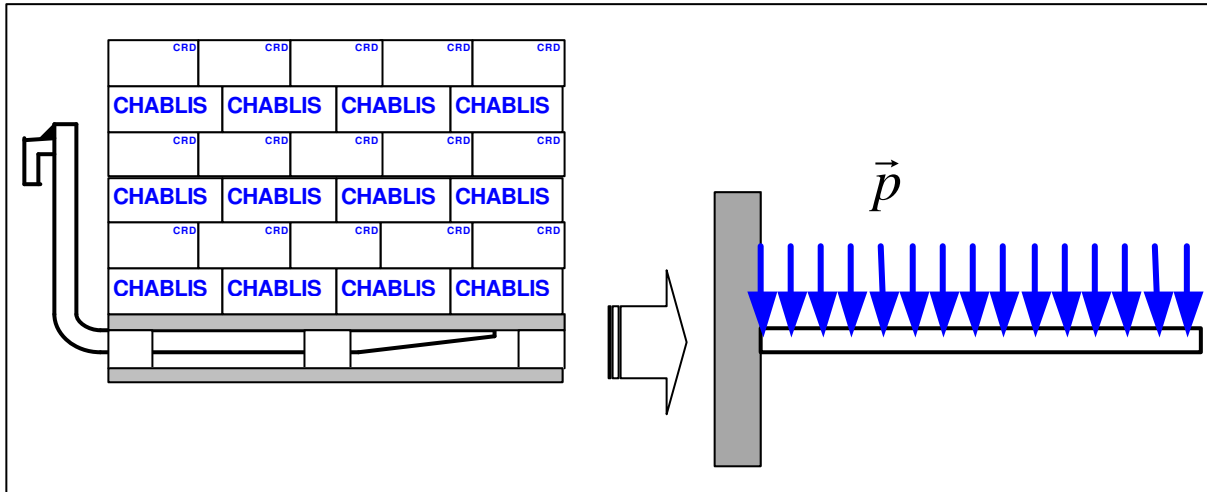


FIGURE : CHARGE REPARTIE

Exemple : reprenons le cas de la fourche du chariot élévateur.

Données du problème :

- ❖ le chariot transporte une palette de cartons de vin de Chablis Grand Cru les Clos 1998 (cartons « export » de 6 bouteilles) ;
- ❖ une bouteille (de 75cl) pèse environ 1.3kg ;
- ❖ la palette en bois « EURO » pèse environ 20kg ;
- ❖ la palette est constituée de 4 rangs de 13 cartons chacun ;
- ❖ le poids des cartons (emballage) est négligé.

Calculer la charge répartie s'exerçant sur une fourche.

Remarque : la résistance des fourches dépend directement de la géométrie et la section des fourches, déduites du calcul de la charge embarquée. Au prix des bouteilles transportées, il vaut mieux ne pas se tromper dans le calcul...

La masse totale M embarquée sur les fourches (il y a 2 fourches) du chariot élévateur est donc :

$$M = [(6 \times 1.3) \times 13] \times 4 + 20 \approx 426 \text{ kg}$$

Le poids P s'exerçant sur une fourche est : $P = \frac{426 \times 10}{2} = 2130 \text{ N}$

L'intensité de la charge répartie sur une fourche est alors : $p = \frac{2130}{1.5} = 1420 \text{ N/m}$

Dans ce cas, $\vec{p}$ est appelé « densité linéique de force ». C'est par exemple le poids au mètre des profilés du commerce (unité : N/m).



RESISTANCE DES MATERIAUX

On a : $\vec{F} = \vec{p} \cdot l$

Exemple : une poutre de longueur totale $l = 2.5 \text{ m}$ et de poids total $P = 3750 \text{ N}$ est soumise à une charge répartie de :

$$p = \frac{3750}{2.5} = 1500 \text{ N/m}$$

3.4 Déformation

3.4.1 Hypothèse de Navier – Bernoulli

Au cours des déformations, les sections droites restent planes et perpendiculaires à la ligne moyenne.

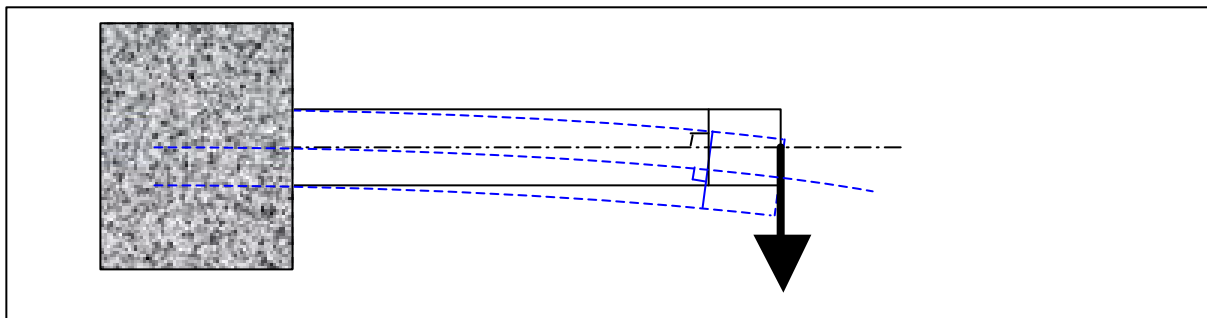


FIGURE : DEFORMÉE D'UNE POUTRE

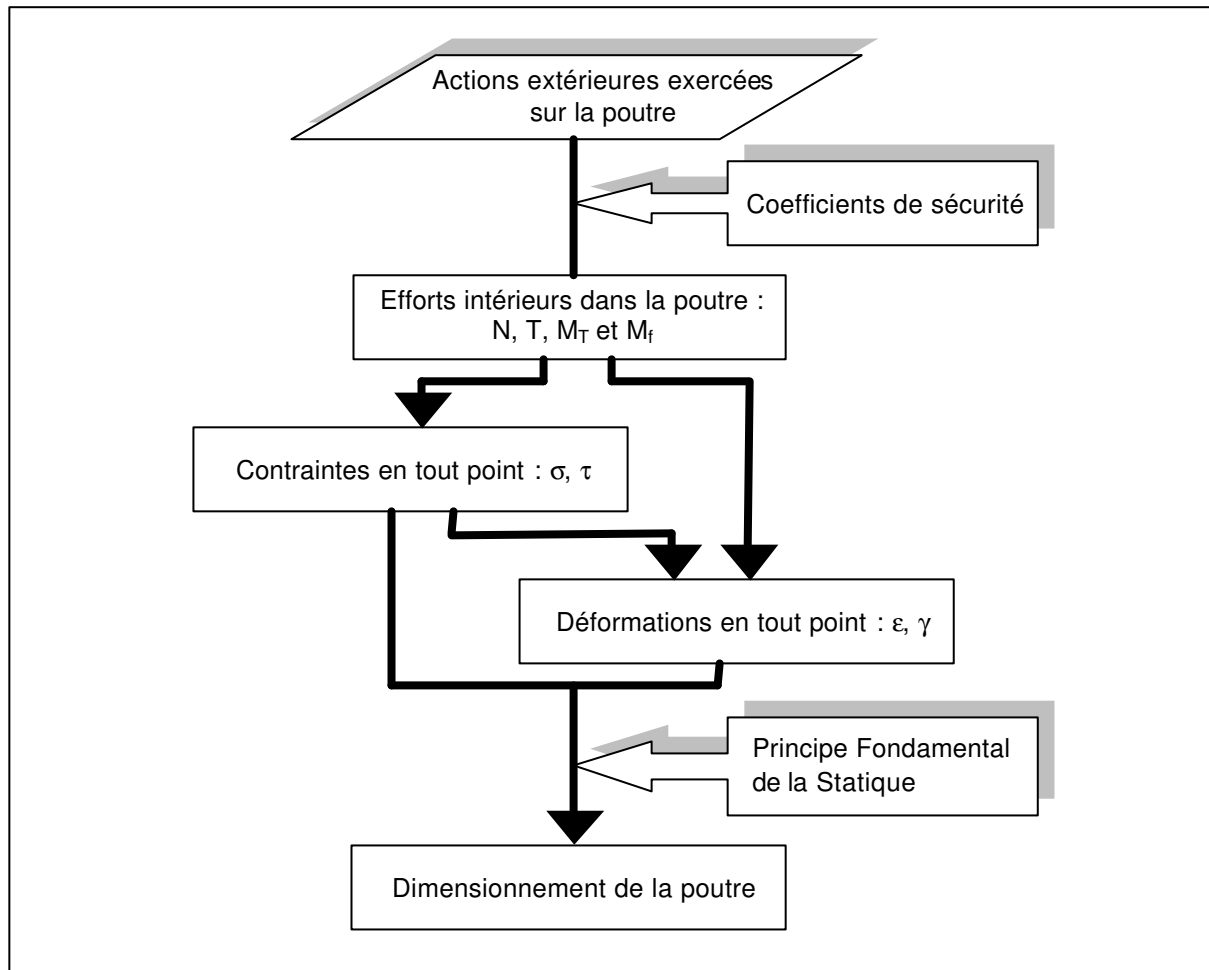
3.4.2 Hypothèse de Barré de Saint Venant

Les résultats de la RDM ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des forces concentrées. En effet, nous ne pouvons pas, avec les équations de la RDM, calculer les déformations locales autour d'un point d'application d'une force.

RESISTANCE DES MATERIAUX

4. Résolution

Organigramme de résolution d'un problème de RDM :



Voilà, c'est tout pour aujourd'hui...

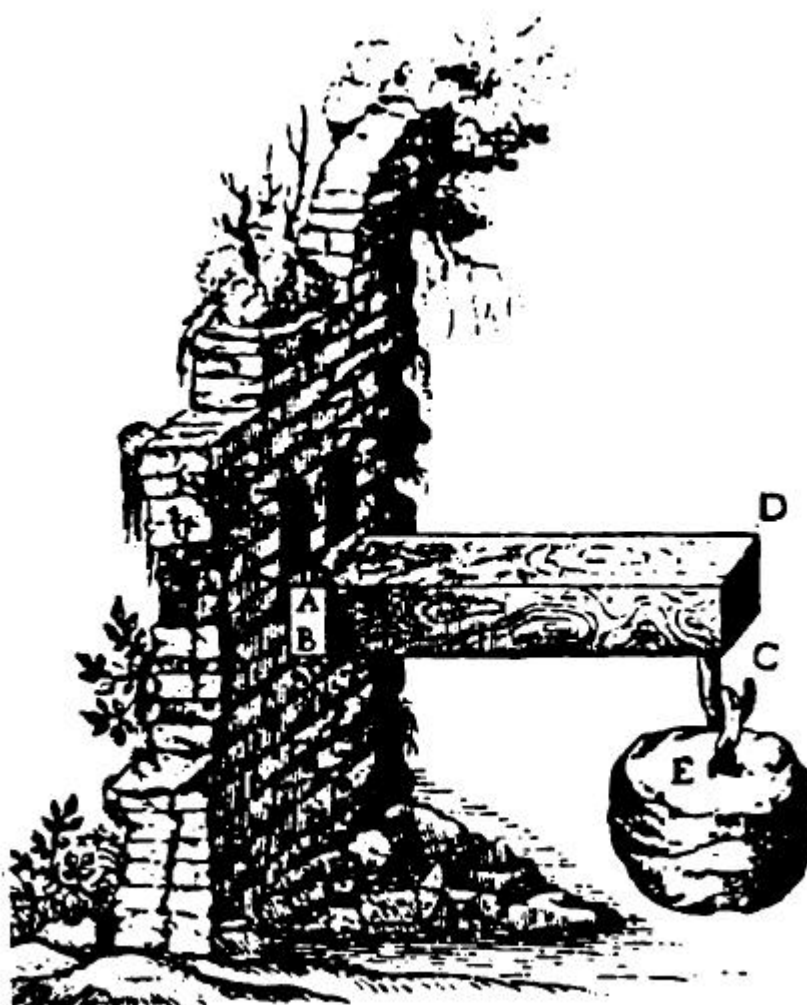


RESISTANCE DES MATERIAUX

RESISTANCE DES MATERIAUX



COURS



Gravure montrant l'essai d'une poutre en flexion

RESISTANCE DES MATERIAUX

(Extrait de « *Discorsi e dimostrazioni mathematiche* » de Galilée)

RESISTANCE DES MATERIAUX

SOMMAIRE DES REJOISSANCES

1. A quoi ça sert ?

2. Testez vos connaissances...

3. Introduction - Hypothèses

4. Torseur de cohésion

5. Notion de contrainte

6. Traction

7. Cisaillement

8. Torsion

9. Flexion

10. Essais mécaniques

Bon courage...

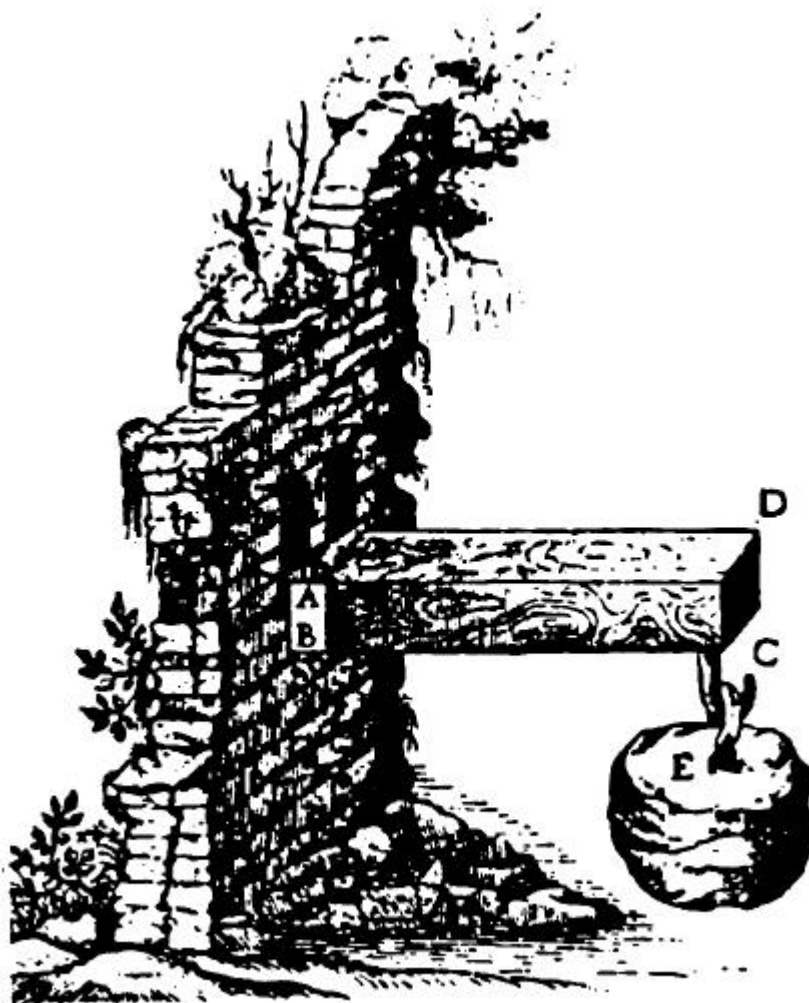


RESISTANCE DES MATERIAUX

RESISTANCE DES MATERIAUX



A QUOI CA SERT ?



Gravure montrant l'essai d'une poutre en flexion

RESISTANCE DES MATERIAUX

(Extrait de « *Discorsi e dimostrazioni mathematiche* » de Galilée)

RESISTANCE DES MATERIAUX

SOMMAIRE

1.	A QUOI ÇA SERT ?	4
2.	LES ESSAIS DE RDM EN AERONAUTIQUE	5
2.1	TEST DES AILES	5
2.2	TEST DES AILES DU CONCORDE	6
2.3	TEST DU FUSELAGE	7
2.4	TEST DU TRAIN D'ATERRISSAGE	8



RESISTANCE DES MATERIAUX

1. A quoi ça sert ?

La résistance des matériaux (RDM) permet de définir les formes, les dimensions et les matériaux des pièces mécaniques de façon à maîtriser leur résistance, leur déformation, tout en optimisant leur coût.



Ce pont a été vérifié en **Résistance des Matériaux** pour :

- ☞ assurer sa résistance sous son propre poids et celui des véhicules,
- ☞ assurer sa résistance en cas de forte tempête,
- ☞ optimiser sa forme et son coût.



Cette bouteille a été vérifiée en Résistance des Matériaux pour :

- ☞ assurer sa résistance lorsqu'elle est pleine,
- ☞ assurer une résistance minimum en cas de chute,
- ☞ minimiser son épaisseur pour faire des économies sur la matière première.



De la même façon, pour le matériel d'escalade et de sécurité en général, les matériaux sont testés et vérifiés dans toutes les configurations d'utilisation possibles (charges, chocs, température...).

RESISTANCE DES MATERIAUX

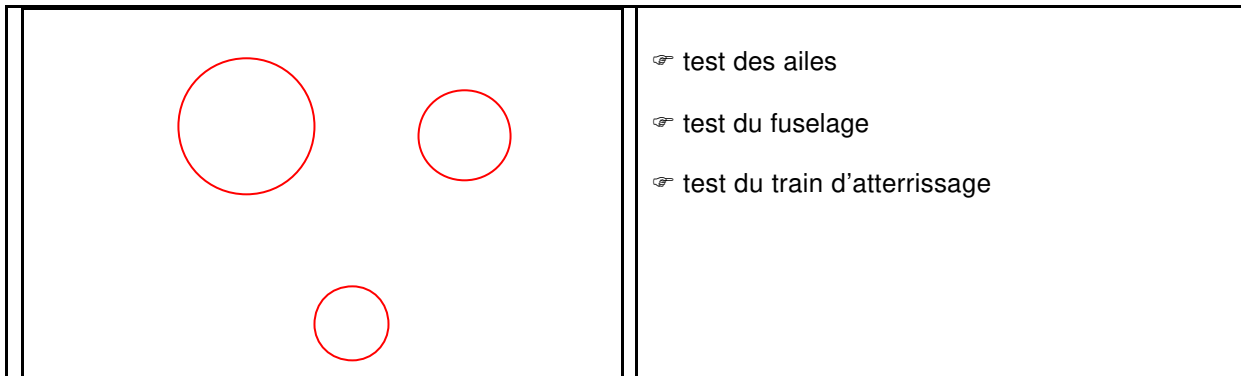
2. Les essais de RDM en aéronautique

En aéronautique, la RDM a une importance primordiale. En plein vol, on imagine facilement les conséquences de la rupture d'une pièce.

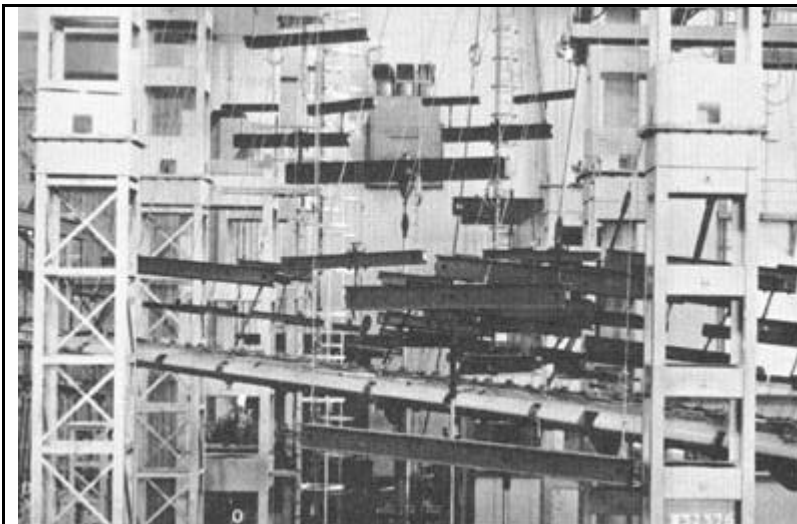
On ne peut pas se permettre de surdimensionner les pièces car le poids de l'avion serait alors trop important. Il faut donc réaliser des calculs et des vérifications très strictes des pièces constitutives d'un avion.

Grâce aux progrès dans la connaissance des matériaux et les moyens de calcul et de modélisation des structures, les pièces mécaniques sont de plus en plus fiables.

Voici quelques exemples :

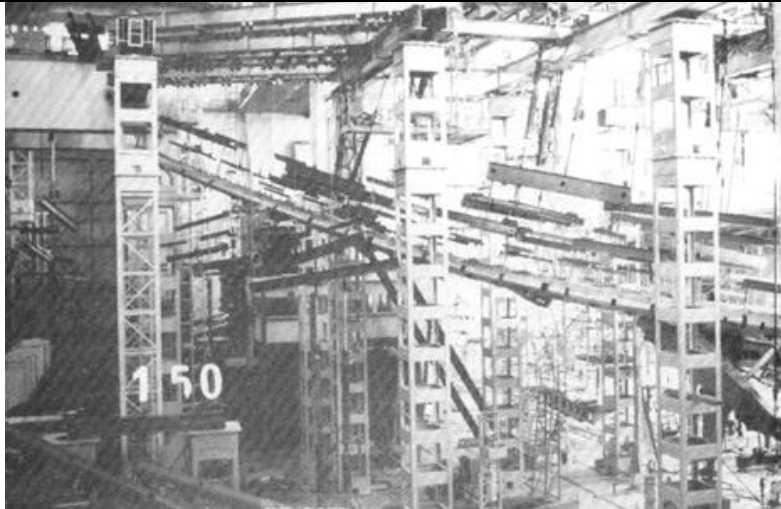


2.1 Test des ailes



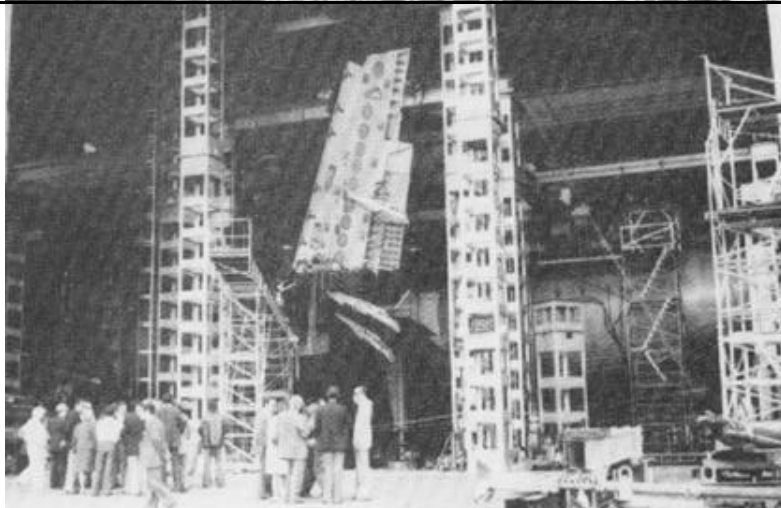
Cet essai consiste à vérifier la résistance statique d'une aile d'avion. Pour modéliser une charge répartie sur toute l'aile, on applique l'effort grâce à des câbles accrochés aux poutres de la photo ci-contre.

RESISTANCE DES MATERIAUX



L'aile est en charge maximum.

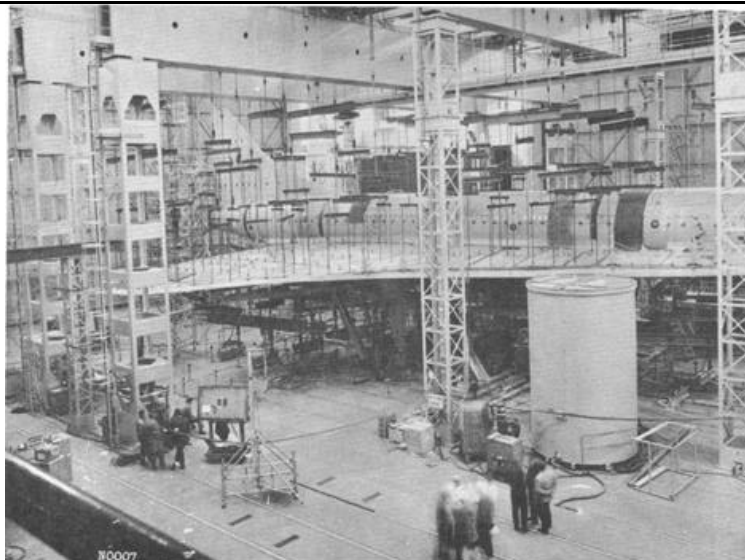
On distingue bien la déformée de l'aile. Pendant tout l'essai, une multitude de capteurs calculent la déformation de l'aile.



Rupture de l'aile !

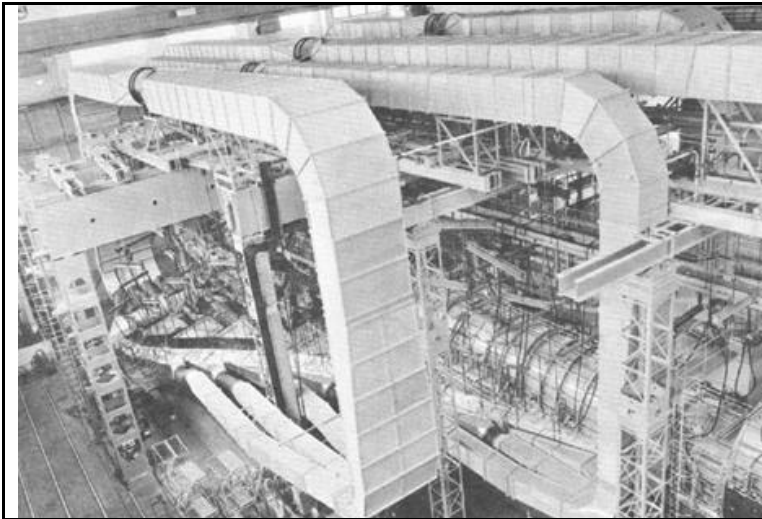
On distingue bien le morceau cassé (vertical) de l'aile.

2.2 Test des ailes du Concorde



Même essai que précédemment, réalisé sur un Concorde. On remarque les câbles fixés sur l'aile de l'avion.

RESISTANCE DES MATERIAUX

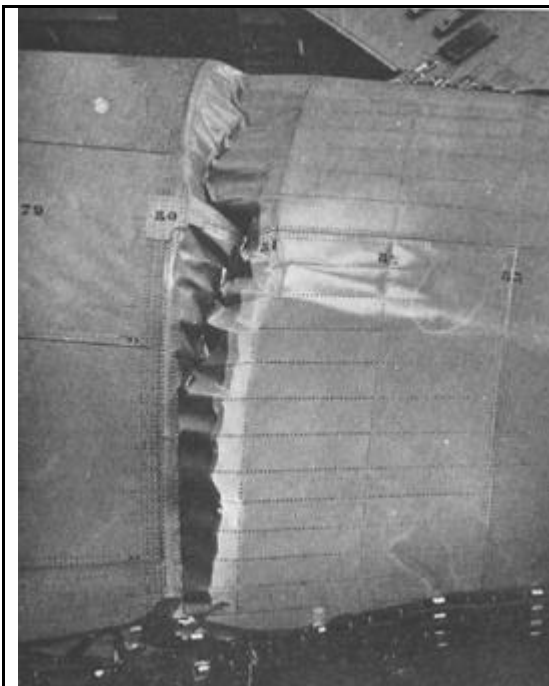


Essai avec charge thermique.

On refait le même essai que précédemment mais à différentes températures (celles-ci vont jusqu'à -50°C).

Les gaines de ventilation injectent un mélange gazeux à -50°C pendant que la structure de l'avion est chauffée...

2.3 Test du fuselage



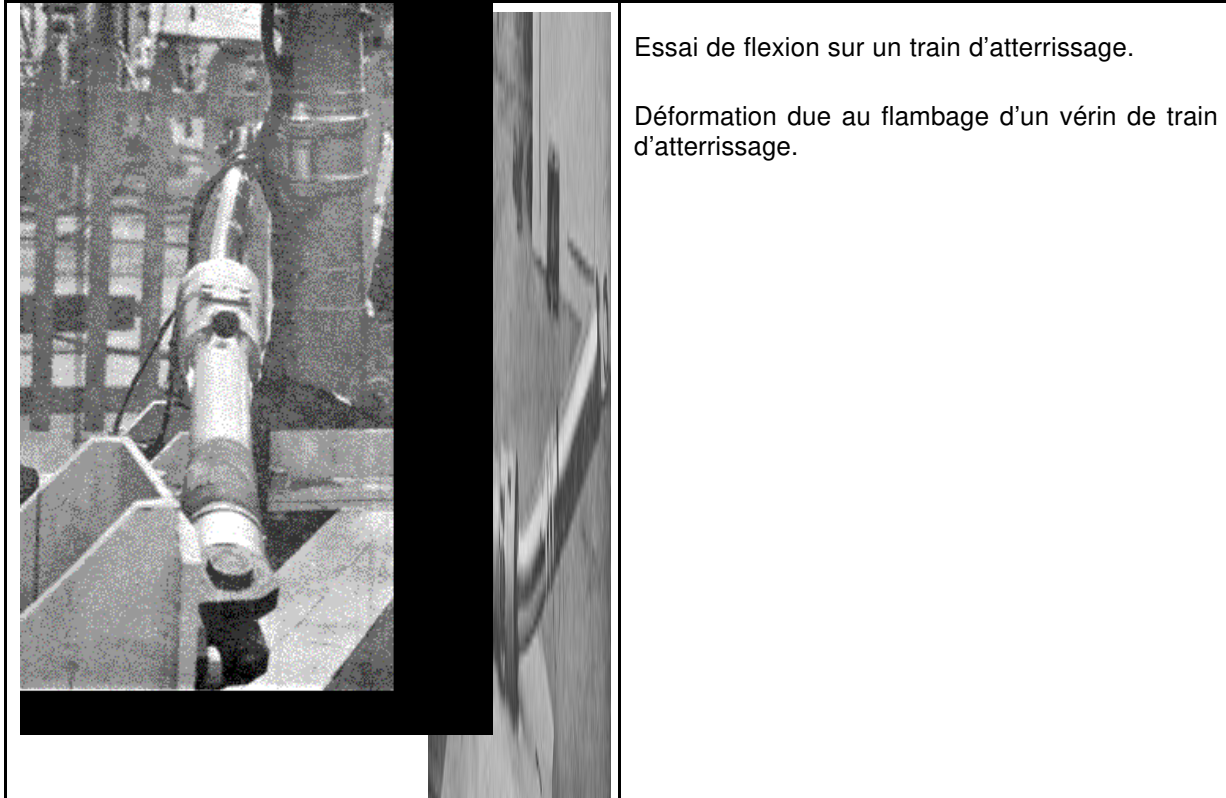
Test de la partie arrière du fuselage.

Essai statique.

Rupture par flambage en flexion et effort tranchant d'une partie arrière du fuselage.

RESISTANCE DES MATERIAUX

2.4 Test du train d'atterrissage



Voilà, c'est tout pour aujourd'hui...

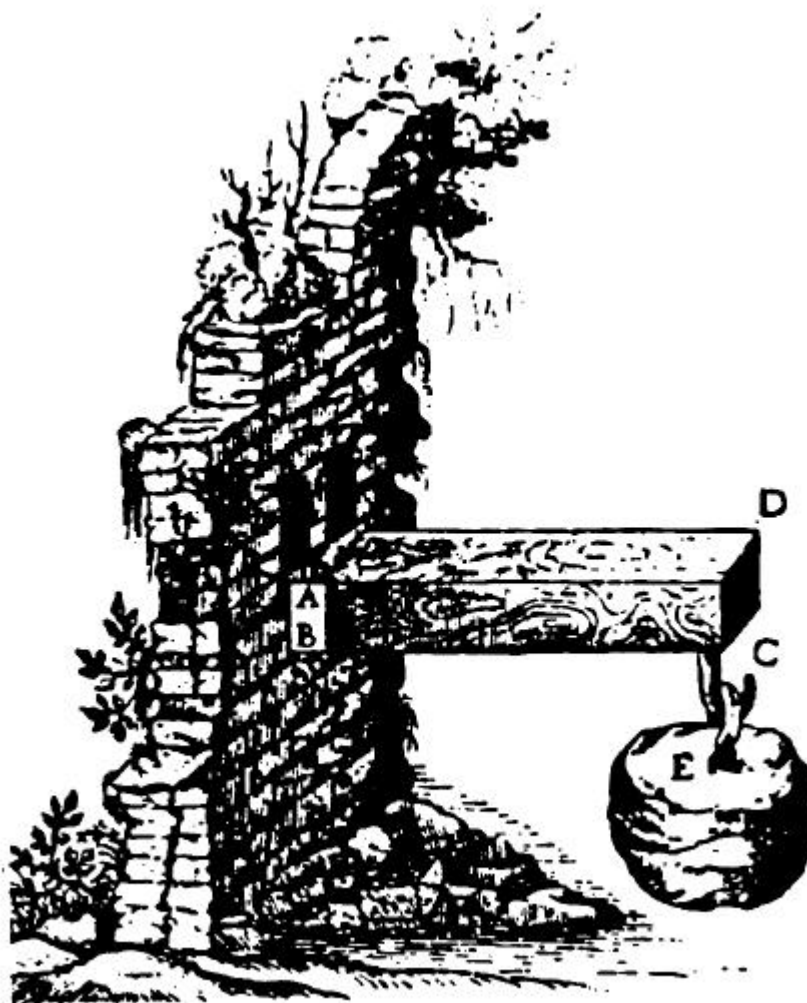


RESISTANCE DES MATERIAUX

RESISTANCE DES MATERIAUX



TESTEZ VOS CONNAISSANCES



Gravure montrant l'essai d'une poutre en flexion

RESISTANCE DES MATERIAUX

(Extrait de « *Discorsi e dimostrazioni mathematiche* » de Galilée)

RESISTANCE DES MATERIAUX

SOMMAIRE

1.	QUESTION1	4
2.	QUESTION 2	4
3.	QUESTION 3	4
4.	QUESTION 4	5
5.	QUESTION 5	5
6.	QUESTION 6	6
7.	QUESTION 7	6
8.	QUESTION 8	7
9.	QUESTION 9	7
10.	QUESTION 10	8
11.	QUESTION 11	8
12.	QUESTION 12	9



RESISTANCE DES MATERIAUX

1. Question1

Indiquez si les essais suivants sont destructifs, ou non destructifs.

Essai de traction	? oui	? non
Photoélasticité	? oui	? non
Essai de résilience	? oui	? non
Ultrasons	? oui	? non

2. Question 2

L'essai de résilience mesure :	? la résistance électrique ? la résistance aux chocs ? la résistance à la corrosion ? l'âge du capitaine ? la malléabilité
--------------------------------	--

3. Question 3

Pour mener à bien une étude de RDM, nous avons besoin de formuler des hypothèses. Cochez les bonnes hypothèses.

Le matériau doit être :	? isotrope ? homogène ? continu ? indéformable
-------------------------	--

RESISTANCE DES MATERIAUX

4. Question 4

Cochez la réponse qui n'est pas une sollicitation :

- ? cisaillement
- ? traction
- ? compression
- ? contrainte normale
- ? torsion

5. Question 5

$$\{\mathcal{S}_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_R$$

- ? flexion
- ? traction / compression
- ? cisaillement
- ? torsion

$$\{\mathcal{S}_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$$

- ? flexion
- ? traction / compression
- ? cisaillement
- ? torsion

$$\{\mathcal{S}_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & M_f \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_R$$

- ? flexion
- ? traction / compression
- ? cisaillement
- ? torsion

$$\{\mathcal{S}_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_R$$

- ? flexion
- ? traction / compression
- ? cisaillement
- ? torsion

RESISTANCE DES MATERIAUX

6. Question 6

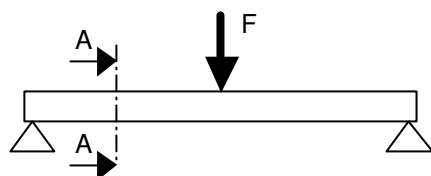
Cochez la ou les bonne(s) réponse(s).

Une contrainte c'est :

- ☐ ? une valeur absolue
- ☐ ? une pression
- ☐ ? un vecteur
- ☐ ? une valeur algébrique
- ☐ ? une densité de forces

7. Question 7

Soit une poutre soumise à de la flexion. Cochez la section de la poutre qui donnera les contraintes les plus faibles.



Section A-A



(1)



(2)



(3)

☐ ? solution (1)

☐ ? solution (2)

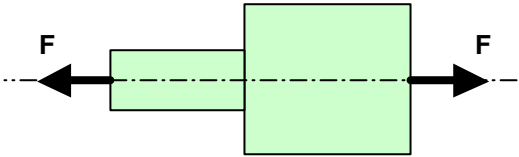
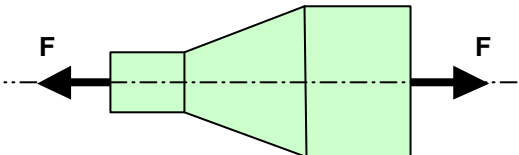
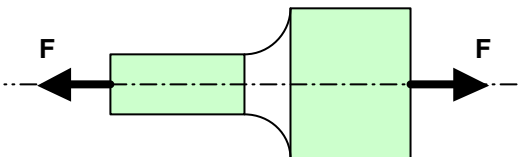
☐ ? solution (3)

N.B. Les sections sont égales dans les trois solutions

RESISTANCE DES MATERIAUX

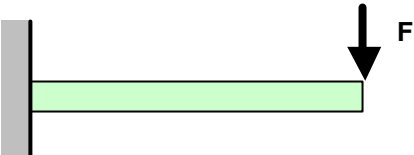
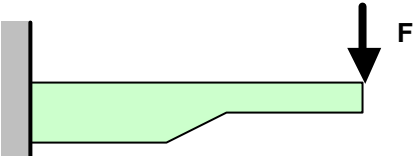
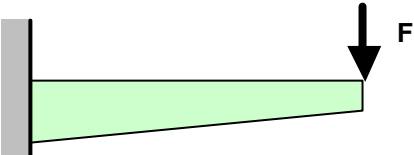
8. Question 8

Soit une poutre soumise à une sollicitation de traction. Parmi les trois propositions de forme, quelle est selon vous la meilleure solution et la plus mauvaise.

	? la meilleure ? acceptable ? la plus mauvaise
	? la meilleure ? acceptable ? la plus mauvaise
	? la meilleure ? acceptable ? la plus mauvaise

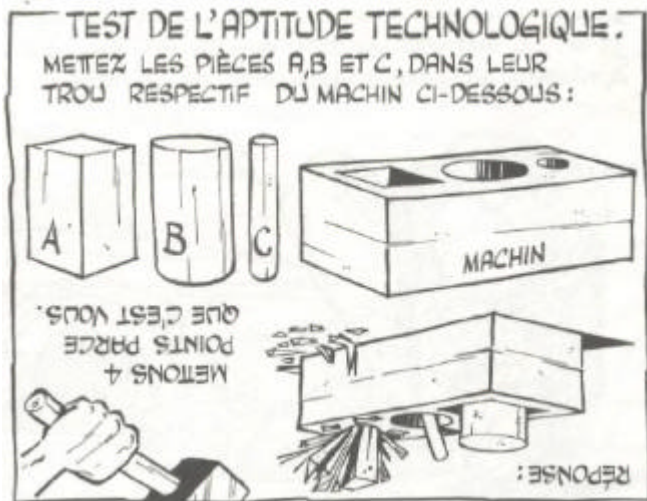
9. Question 9

Soit une poutre soumise à une sollicitation de traction. Parmi les trois propositions de forme, quelle est selon vous la meilleure solution et la plus mauvaise.

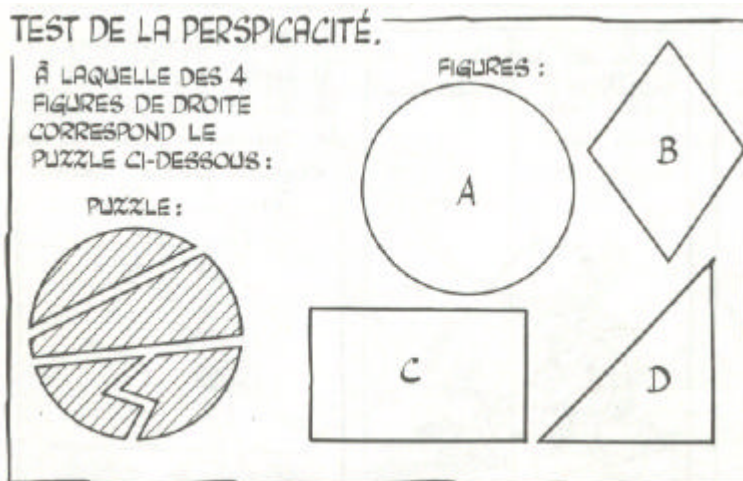
	? la meilleure ? acceptable ? la plus mauvaise
	? la meilleure ? acceptable ? la plus mauvaise
	? la meilleure ? acceptable ? la plus mauvaise

RESISTANCE DES MATERIAUX

10. Question 10

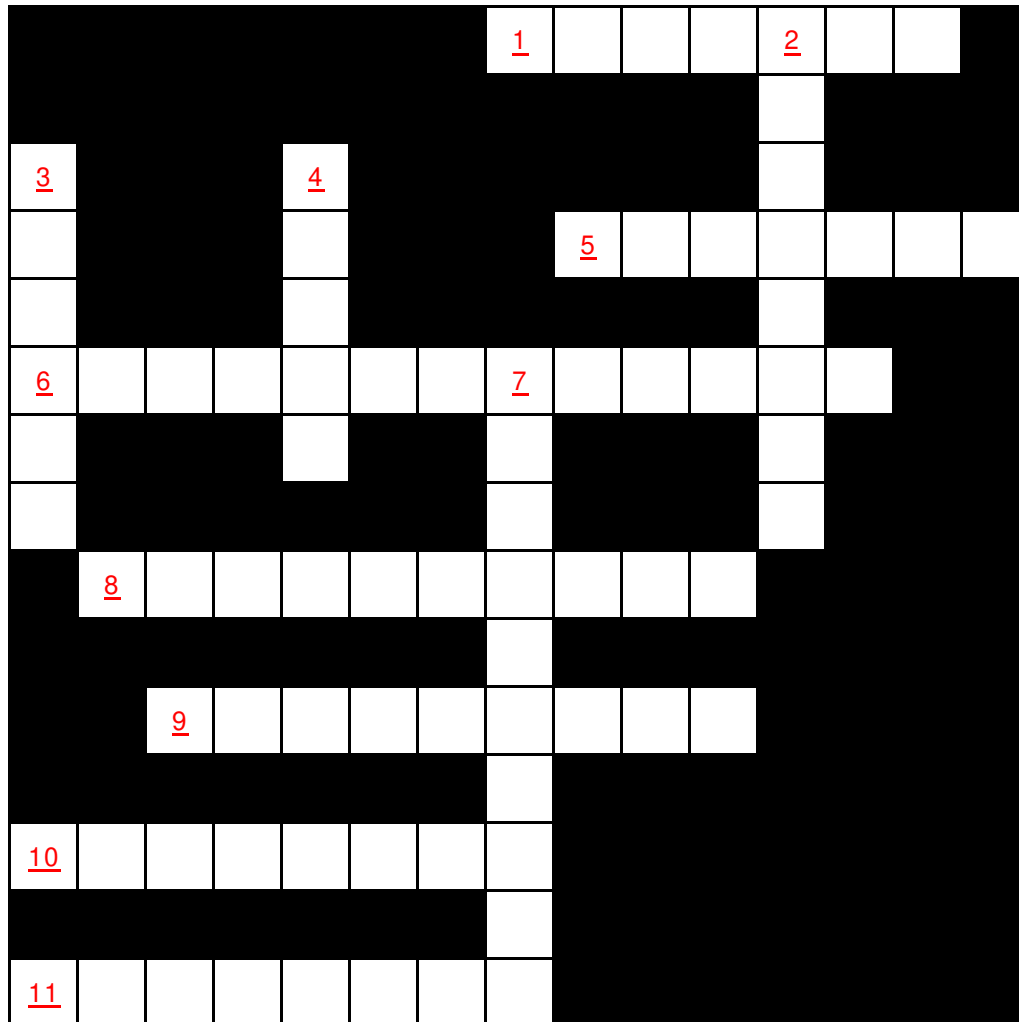


11. Question 11



RESISTANCE DES MATERIAUX

12. Question 12



- 1 Sollicitation appliquée à un plongeur
- 2 A les mêmes caractéristiques mécaniques dans toutes les directions
- 3 Indispensable aux archers
- 4 Matériaux à base de fer
- 5 Quand on dépasse la limite élastique
- 6 ...de contraintes
- 7 Résistance aux chocs
- 8 Densité de forces
- 9 Matériaux en anglais
- 10 Quand on tire dessus (sollicitation)
- 11 Forme que prend la pièce pendant les sollicitations.

Voilà, c'est tout pour aujourd'hui...

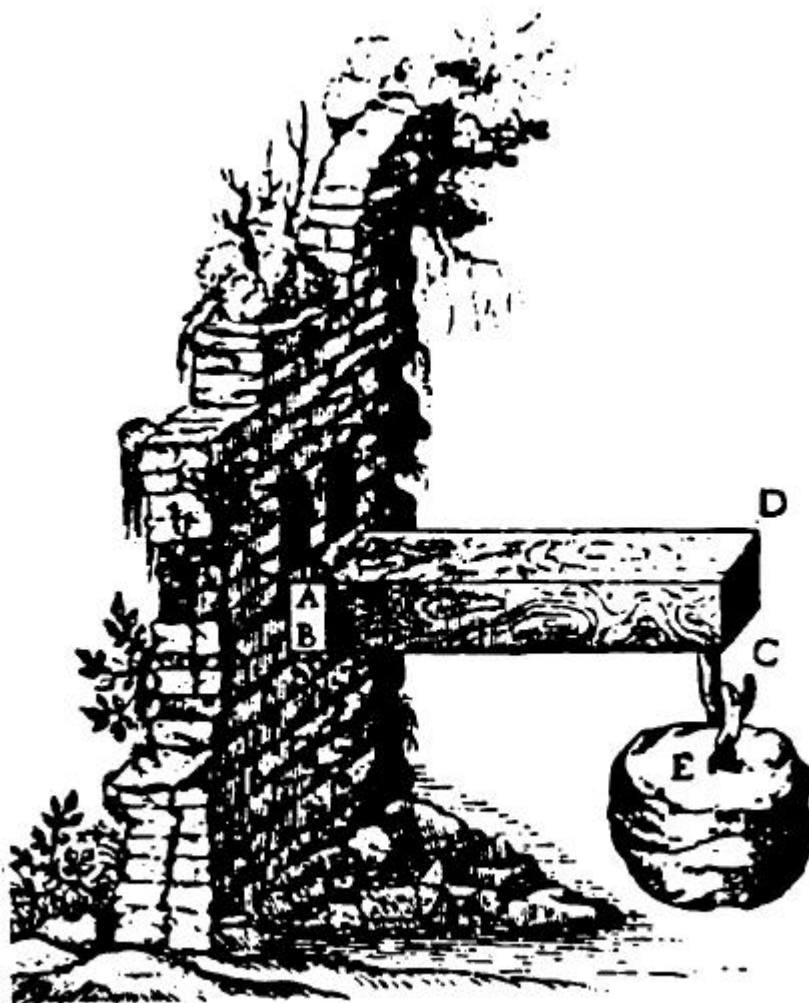


RESISTANCE DES MATERIAUX

RESISTANCE DES MATERIAUX



TORSEUR DE COHESION



Gravure montrant l'essai d'une poutre en flexion

RESISTANCE DES MATERIAUX

(Extrait de « *Discorsi e dimostrazioni mathematiche* » de Galilée)

RESISTANCE DES MATERIAUX

SOMMAIRE

1. TORSEUR DE COHESION.....	4
1.1 EFFORTS INTERIEURS.....	4
1.2 COMPOSANTES DES EFFORTS INTERIEURS.....	5
1.3 TORSEUR DES EFFORTS INTERIEURS (TORSEUR DE COHESION).....	5
1.4 SOLLICITATIONS SIMPLES ET COMPOSEES.....	6



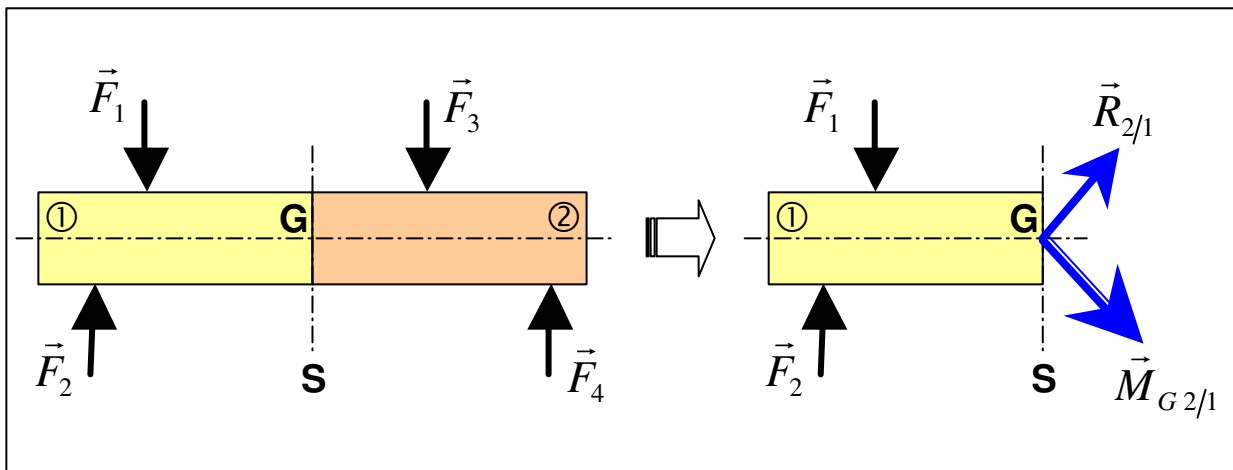
RESISTANCE DES MATERIAUX

1. Torseur de cohésion

Soit une poutre en équilibre sous l'effet d'actions mécaniques extérieures (poids, actions de contact...). En RDM, les efforts extérieurs appliqués à la poutre engendrent des efforts intérieurs à la poutre.

En procédant à une coupure fictive de la poutre et en isolant une des deux parties (la gauche par exemple), les actions mécaniques que la partie droite exerce sur la partie gauche sont dès lors des actions extérieures. La partie gauche considérée étant en équilibre, l'application du Principe Fondamental de la Statique permet de modéliser ces efforts intérieurs par un torseur, appelé ici torseur de cohésion.

1.1 Efforts intérieurs



Principe fondamental de la statique :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0} \\ \sum_{i=1}^n \overline{M(\vec{F}_i)} = \vec{0} \end{cases}$$

❖ On isole la poutre :

La poutre est en équilibre :

$$\begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0} \\ \overline{M_G(\vec{F}_1)} + \overline{M_G(\vec{F}_2)} + \overline{M_G(\vec{F}_3)} + \overline{M_G(\vec{F}_4)} = \vec{0} \end{cases}$$

❖ On isole le tronçon de gauche :

Le tronçon de gauche est en équilibre :

$$\begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R}_{2/1} = \vec{0} \\ \overline{M_G(\vec{F}_1)} + \overline{M_G(\vec{F}_2)} + \vec{M}_{G2/1} = \vec{0} \end{cases}$$

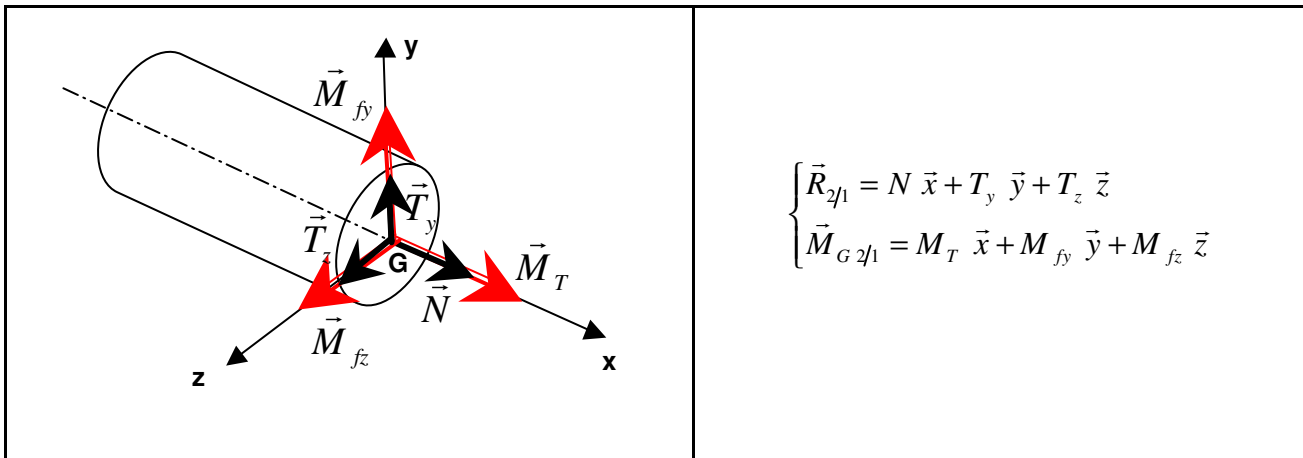
RESISTANCE DES MATERIAUX

Par identification :

$$\vec{R}_{2/1} = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = (\vec{F}_3 + \vec{F}_4)$$

$$\vec{M}_{G\ 2/1} = -\left[M_G(\vec{F}_1) + M_G(\vec{F}_2)\right] = \left[M_G(\vec{F}_3) + M_G(\vec{F}_4)\right]$$

1.2 Composantes des efforts intérieurs



$\vec{N}$: effort normal, porté par la ligne moyenne x ($N = \vec{R}_{G\ 2/1} \cdot \vec{x}$)

$\vec{T} = \vec{T}_y + \vec{T}_z$: effort tranchant, perpendiculaire à la ligne moyenne

$\vec{M}_T$: moment de torsion, porté par la ligne moyenne x

$\vec{M}_f = \vec{M}_{fy} + \vec{M}_{fz}$: moment fléchissant, perpendiculaire à la ligne moyenne.

1.3 Torseur des efforts intérieurs (torseur de cohésion)

La liaison entre les deux tronçons est une liaison encastrement. L'action mécanique du tronçon droit sur le tronçon gauche peut donc être modélisée par un torseur (torseur de cohésion $\{\mathfrak{S}_{coh}\}_G$) de résultante $\vec{R}_{2/1}$ et de moment résultant $\vec{M}_{G\ 2/1}$ au point G.

Par convention, on prendra toujours pour $\{\mathfrak{S}_{coh}\}_G$ l'action mécanique de la partie droite sur la partie gauche :

$$\{\mathfrak{S}_{coh}\}_G = \{\mathfrak{S}_{coh\ 2/1}\}_G.$$

$\vec{R}_{2/1} = -$ somme des efforts à gauche de la section S = $-(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$

$\vec{M}_{G\ 2/1} = -$ moment résultant en G des efforts à gauche de S = $-\left[M_G(\vec{F}_1) + M_G(\vec{F}_2)\right]$

RESISTANCE DES MATERIAUX

$$\{\mathfrak{S}_{coh}\}_G = \{\mathfrak{S}_{coh2/l}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{2/l} \\ \vec{M}_{G2/l} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} N & M_T \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

1.4 Sollicitations simples et composées

Si une seule composante N , T , M_T ou M_f existe, alors que toutes les autres sont nulles, on dit que l'on a une sollicitation simple.

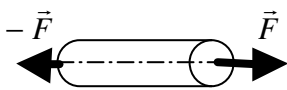
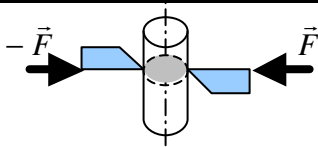
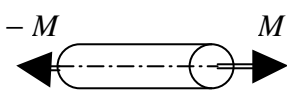
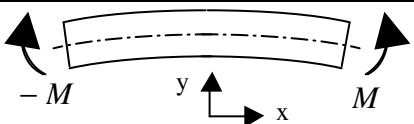
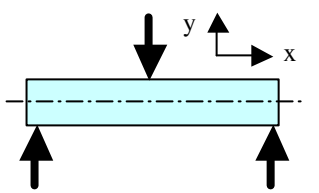
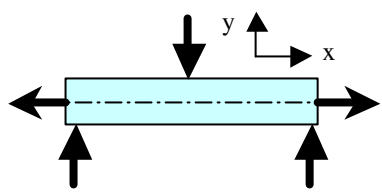
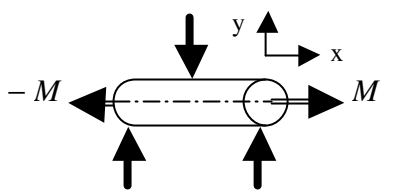
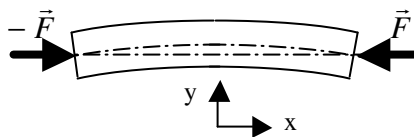
Si deux composantes au moins sont non nulles, on dit que l'on a une sollicitation composée.

Le tableau page suivante résume les différents cas de sollicitations les plus courants.

Voilà, c'est tout pour aujourd'hui...

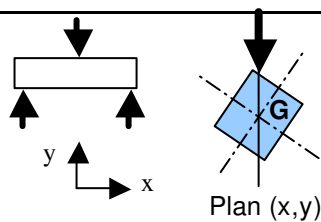


RESISTANCE DES MATERIAUX

Cas	Exemple	Composantes				Observations
		N	T	M_T	M_j	
TRACTION		N	0	0	0	Sollicitations simples
CISAILLEMENT		0	T	0	0	
TORSION		0	0	M_T	0	
FLEXION PURE		0	0	0	M_{fz}	
FLEXION SIMPLE		0	T_y	0	M_{fz}	Sollicitations composées
FLEXION+TRACTION		N	T_y	0	M_{fz}	
FLEXION+TORSION		0	T_y	M_T	M_{fz}	
FLAMBAGE		N	0	0	M_{fz}	

RESISTANCE DES MATERIAUX

FLEXION DEVIEE



0

T_y

T_z

0

M_{fz}

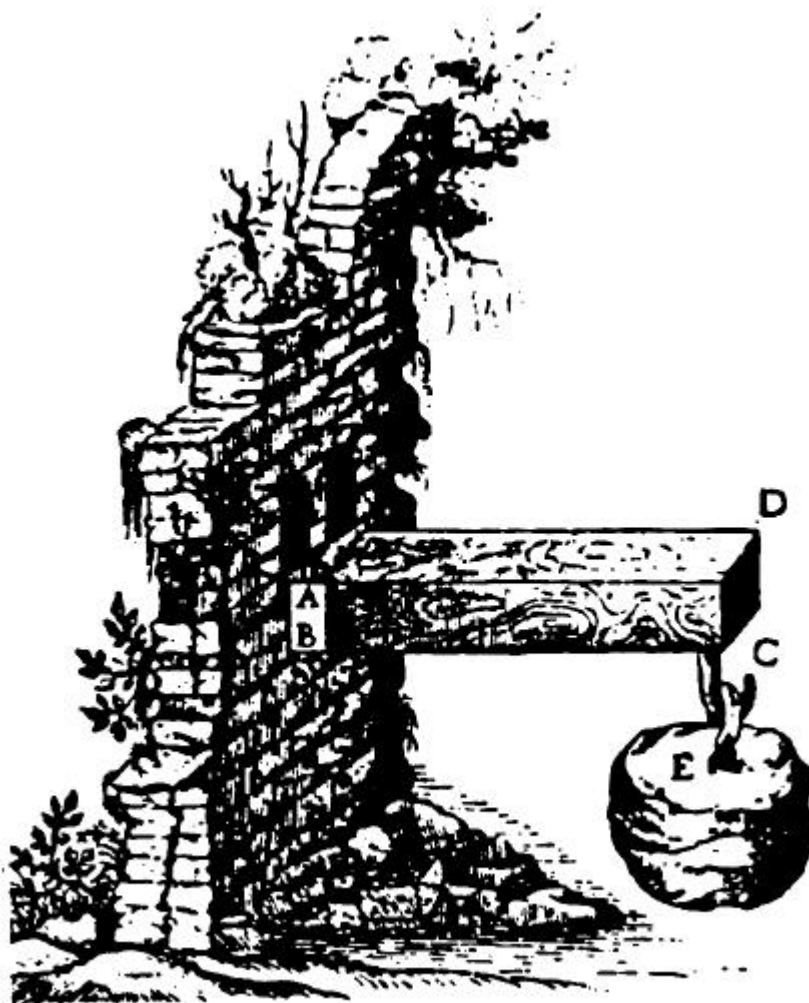
M_{fy}

RESISTANCE DES MATERIAUX

RESISTANCE DES MATERIAUX



NOTION DE CONTRAINTE



Gravure montrant l'essai d'une poutre en flexion

RESISTANCE DES MATERIAUX

(Extrait de « *Discorsi e dimostrazioni mathematiche* » de Galilée)

RESISTANCE DES MATERIAUX

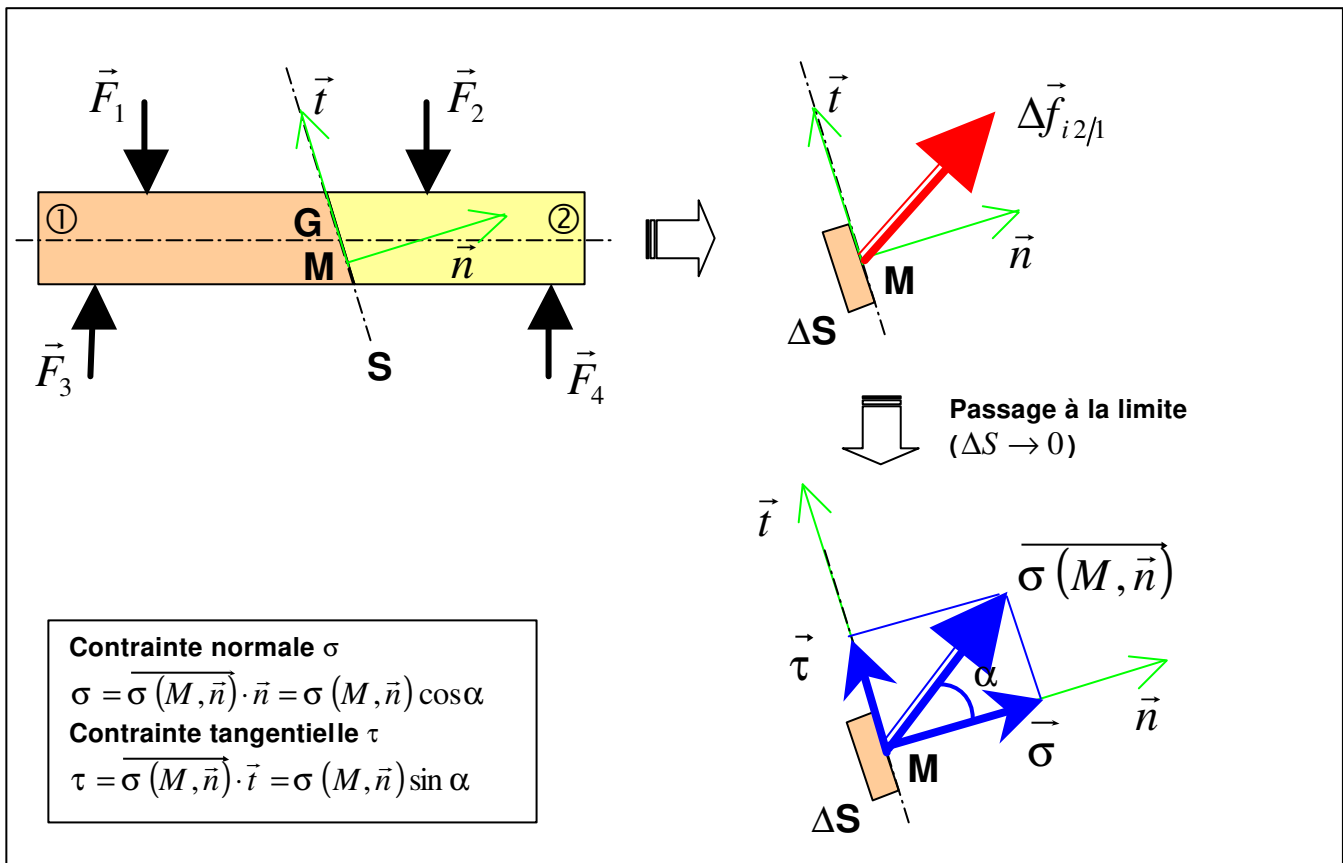
SOMMAIRE

1. CONTRAINTES	4
1.1 NOTION DE CONTRAINTE.....	4
1.1.1 A quoi sert le calcul des contraintes ?.....	4
1.1.2 Peut-on observer une contrainte ?.....	5
1.1.3 Quels sont les paramètres qui influencent les contraintes ?.....	5
1.2 CONCENTRATION DE CONTRAINTES.....	5
1.3 NOTIONS SUR LES COEFFICIENTS DE SECURITE.....	6



1. Contraintes

1.1 Notion de contrainte



Remarque : $\sum \Delta \vec{f}_{i2/l} = \vec{R}_{2/l}$ = somme des $\Delta \vec{f}_i$ pour toute la coupure

Définition : on appelle contrainte $\overline{\sigma(M, \vec{n})}$ en M, dans la direction $\vec{n}$, la limite lorsque ΔS tend vers zéro, du rapport entre l'effort $\Delta \vec{f}_{i2/l}$ et l'aire ΔS entourant le point M.

Autrement dit : $\overline{\sigma(M, \vec{n})} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}_{i2/l}}{\Delta S}$

Remarque : les projections de $\overline{\sigma(M, \vec{n})}$ sur les directions $\vec{n}$ et $\vec{t}$ donnent respectivement les contraintes normale σ et tangentielle τ .

1.1.1 A quoi sert le calcul des contraintes ?

Expérimentalement, on a défini pour chaque matériau une contrainte limite admissible au-delà de laquelle la pièce subit des détériorations de ses caractéristiques mécaniques, dimensionnelles, voire une

RESISTANCE DES MATERIAUX

rupture. Le calcul de la résistance des matériaux consiste à vérifier que les contraintes engendrées par les sollicitations extérieures ne dépassent pas la contrainte limite admissible par le matériau. Le calcul des contraintes sert à évaluer la « tension » dans la matière.

1.1.2 Peut-on observer une contrainte ?

Une contrainte est un outil de calcul, on ne peut pas l'observer directement, par contre on peut observer ses effets : étude des déformations, étude de la cassure, photoélasticité. A l'aide de ces trois méthodes, on peut évaluer les contraintes dans un matériau, mais le résultat obtenu est moins précis que celui résultant d'un logiciel de calcul par éléments finis.

1.1.3 Quels sont les paramètres qui influencent les contraintes ?

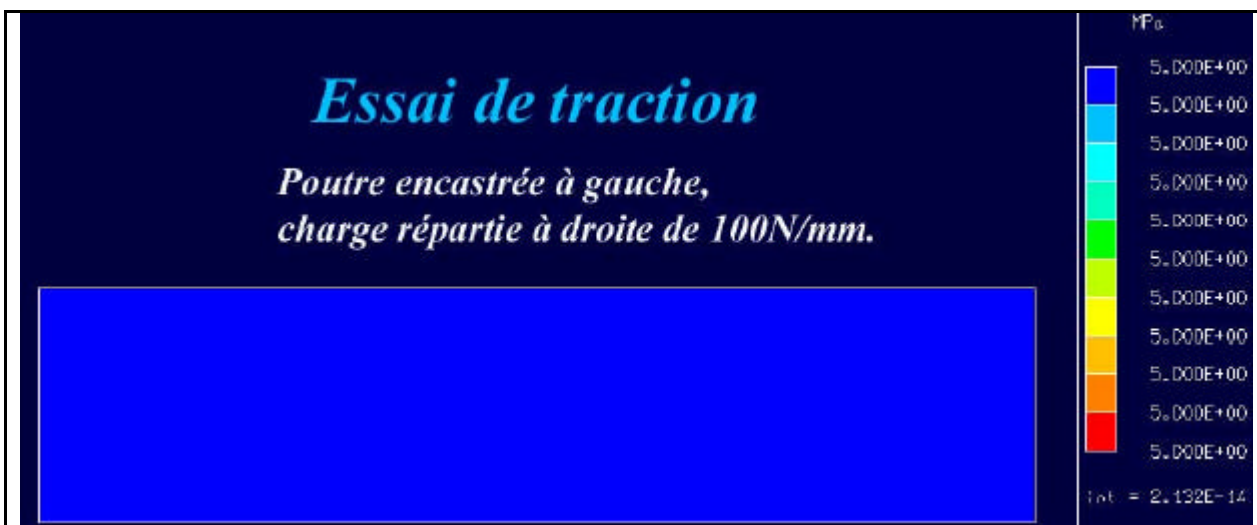
Nous avons vu dans ce qui précède que la contrainte est le rapport d'une force par une surface. Les paramètres qui influencent directement une contrainte sont donc les sollicitations et la section de la poutre.

1.2 Concentration de contraintes

Une contrainte est un effort par unité de surface qui s'exerce dans le matériau. Une contrainte s'exprime en MPa (Méga-Pascal, $1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2$).

Imaginons un solide soumis à une contrainte de 100 MPa : cela revient à dire qu'un effort de 100 N est appliqué sur une surface de 1 mm^2 . La contrainte dépend de la valeur de la charge appliquée et de la section concernée du solide. Pour une même charge, la contrainte sera d'autant plus grande que la section est faible, et inversement.

Le phénomène de concentration de contraintes est mis en évidence ci-après, au travers d'exemples de calcul de contraintes réalisés avec un logiciel de calcul par Eléments Finis (RDM Le Mans).

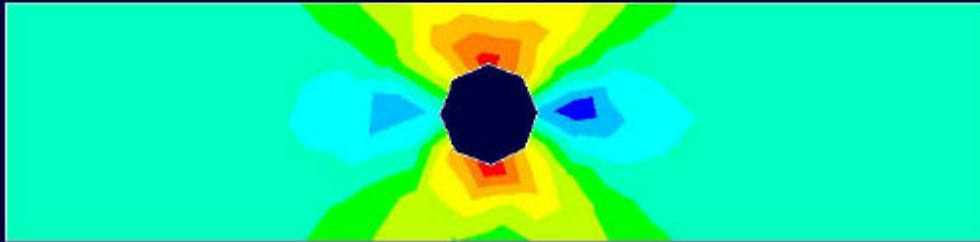


Dans l'exemple ci-dessus, nous avons une poutre soumise à de la traction. L'échelle de couleurs visualise l'intensité de la contrainte dans le matériau. On remarque que la couleur est uniforme (bleu pour ceux qui ont la couleur...), la contrainte est donc identique en tout point de la poutre.

RESISTANCE DES MATERIAUX

Essai de traction

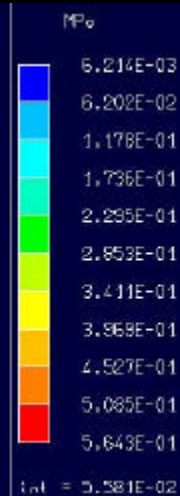
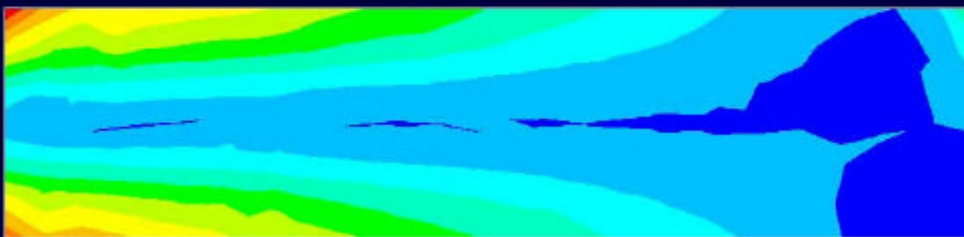
Poutre percée



Même essai, avec la même poutre mais percée. Cette fois, on remarque que la contrainte n'est plus régulière, elle est plus importante au niveau du trou. En effet, la section étant plus petite pour le même effort, la contrainte augmente.

Essai de flexion

sur poutre encastrée



La même poutre est maintenant soumise à de la flexion pure. Elle est encastrée à gauche et soumise à un effort ponctuel à son extrémité droite. Nous remarquons alors que la contrainte est plus importante au niveau de l'encastrement et du point d'application de la charge. On note également que la ligne moyenne n'est presque pas chargée par rapport au reste de la poutre.

1.3 Notions sur les coefficients de sécurité

Pour qu'une structure (machine, véhicule, immeuble..) puisse supporter en toute sécurité les charges qui normalement la sollicitent, il suffit qu'elle puisse résister à des charges plus élevées. La capacité à supporter ces charges s'appelle la résistance de la structure. Le coefficient de sécurité s est alors défini par :

$$s = \frac{\text{charges admissibles par la structure}}{\text{charges habituellement exercées}} = \frac{\text{résistance réelle de la structure}}{\text{résistance strictement nécessaire}}$$

(Par exemple, on peut exiger une résistance réelle égale à deux fois la résistance strictement nécessaire).

RESISTANCE DES MATERIAUX

Le choix de la valeur de s dépend de la connaissance (ou non) des phénomènes agissant sur la structure : surcharges éventuelles, chocs, type et degré de précision des charges (statiques, dynamiques, répétées...), phénomènes de fatigue, concentrations de contraintes, connaissance et variation des propriétés du matériau, qualité de la fabrication, effets de l'environnement, lubrification, mode de rupture (progressive ou brutale), conséquences d'une rupture sur l'environnement (dégâts matériels, humains, pollution...).

Un coefficient de sécurité trop faible augmente exagérément les risques de rupture. Un coefficient de sécurité trop élevé a également des effets néfastes : augmentation du poids, du prix de revient... s varie le plus souvent de 1 à 10.

Pour un grand nombre de structures, la sécurité est obtenue si, sous charge, les déformations du matériau restent élastiques. Ceci est réalisé lorsque les contraintes en n'importe quel point de la structure restent inférieures à la limite élastique R_e (ou $R_{e0.2}$) du matériau. s est alors défini par :

$$s = \frac{R_e}{R_p} = \frac{\text{limite élastique du matériau}}{\text{contrainte tolérée dans la structure (résistance pratique)}}$$

Pour des matériaux fragiles, il est souvent préférable d'utiliser la résistance à la rupture R_r :

$$s = \frac{R_r}{R_p} = \frac{\text{limite à la rupture du matériau}}{\text{contrainte tolérée dans la structure}}$$

(La valeur de s est alors plus grande dans ce cas)

Valeurs indicatives				
s	Charges exercées sur la structure	Contraintes dans la structure	Comportement du matériau	Observations
$1 < s < 2$	régulières et connues	connues	testé et connu	fonctionnement constant sans à-coups
$2 < s < 3$	régulières et assez bien connues	assez bien connues	testé et connu moyennement	fonctionnement usuel avec légers chocs et surcharges modérées
$3 < s < 4$	moyennement connues	moyennement connues	non testé	
	mal connues ou incertaines	mal connues ou incertaines	connu	

Voilà, c'est tout pour aujourd'hui...

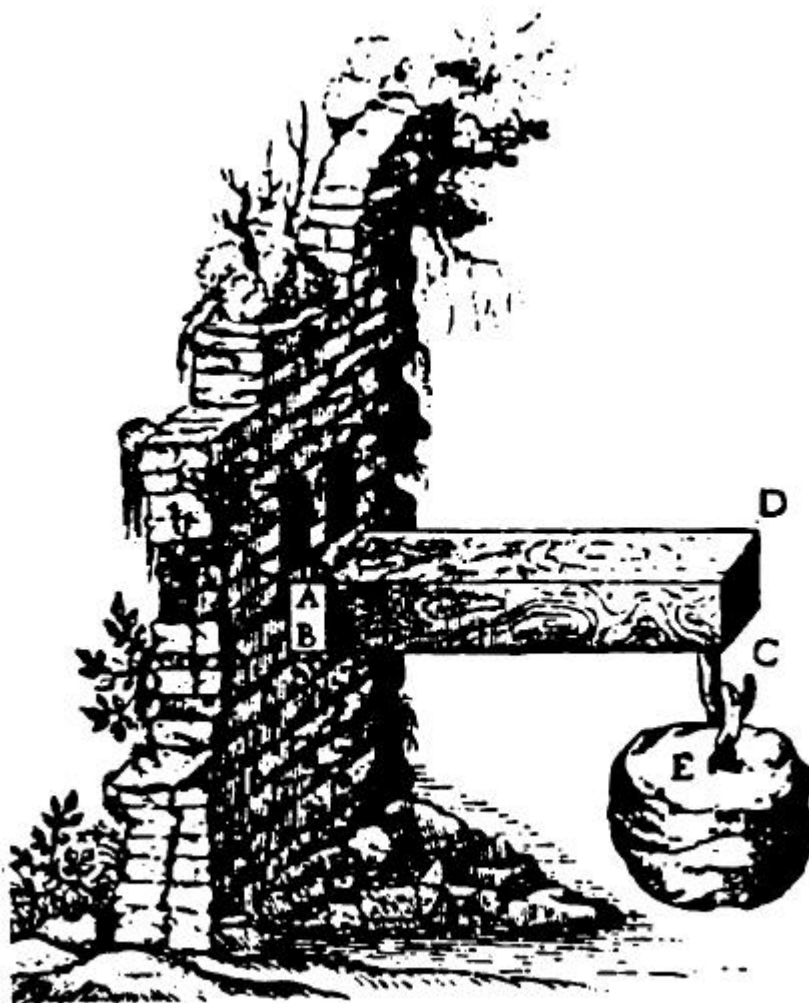


RESISTANCE DES MATERIAUX

RESISTANCE DES MATERIAUX



ESSAIS MECANQUES



Gravure montrant l'essai d'une poutre en flexion

RESISTANCE DES MATERIAUX

(Extrait de « *Discorsi e dimostrazioni mathematiche* » de Galilée)

RESISTANCE DES MATERIAUX

SOMMAIRE

1. ESSAIS MECANQUES	4
1.1 ESSAI DE TRACTION.....	4
1.1.1 <i>Caractéristiques fondamentales</i>	6
1.2 ESSAI DE TRACTION BIAXIAL.....	6
1.3 ESSAI DE COMPRESSION	7
1.4 ESSAI DE CISAILLEMENT	7
1.5 ESSAI DE TORSION.....	7
1.6 ESSAI DE FLEXION	8
1.7 ESSAI DE DURETE.....	8
1.8 ESSAI DE RESILIENCE.....	9
1.9 PHOTOELASTICIMETRIE.....	9
1.10 JAUGES DE DEFORMATIONS (EXTENSOMETRIE).....	10
1.11 RADIOGRAPHIE.....	10
1.12 ULTRASONS	10



RESISTANCE DES MATERIAUX

1. Essais mécaniques

On distingue essentiellement deux types d'essais mécaniques :

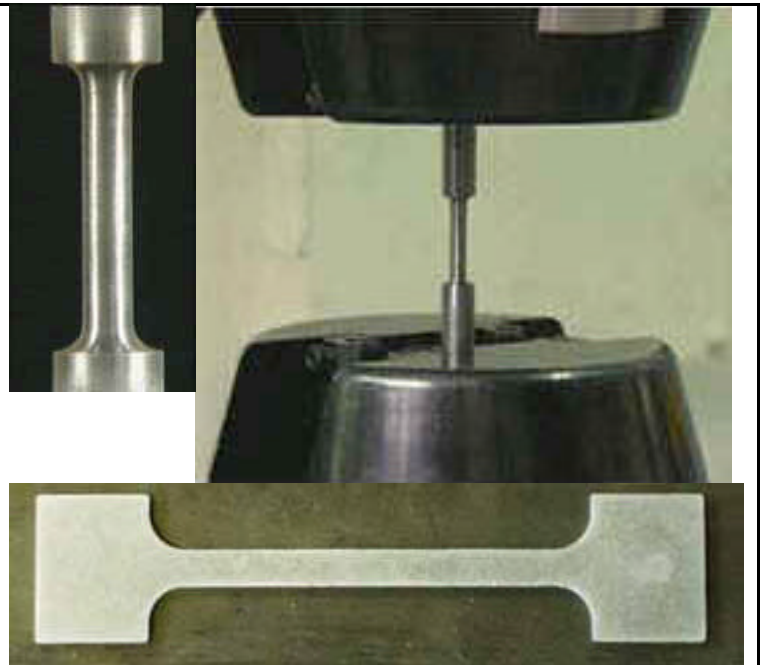
- ☞ les essais destructifs sur éprouvette : la pièce est détruite pendant l'essai ;
- ☞ les essais non-destructifs : la pièce n'est pas détruite. Ces essais sont utilisés sur les pièces complexes, chères et difficiles à réaliser, mais également pour valider une hypothèse de travail ou un modèle d'étude.

Nous allons voir dans ce qui suit un certain nombre d'essais mécaniques, destructifs ou non. L'essai de traction sera quant à lui plus particulièrement détaillé, puisque c'est l'essai le plus couramment rencontré. Vous aurez d'ailleurs la joie immense (si, si...) de réaliser un essai de traction lors de l'une des séances de Travaux Pratiques.

1.1 Essai de traction

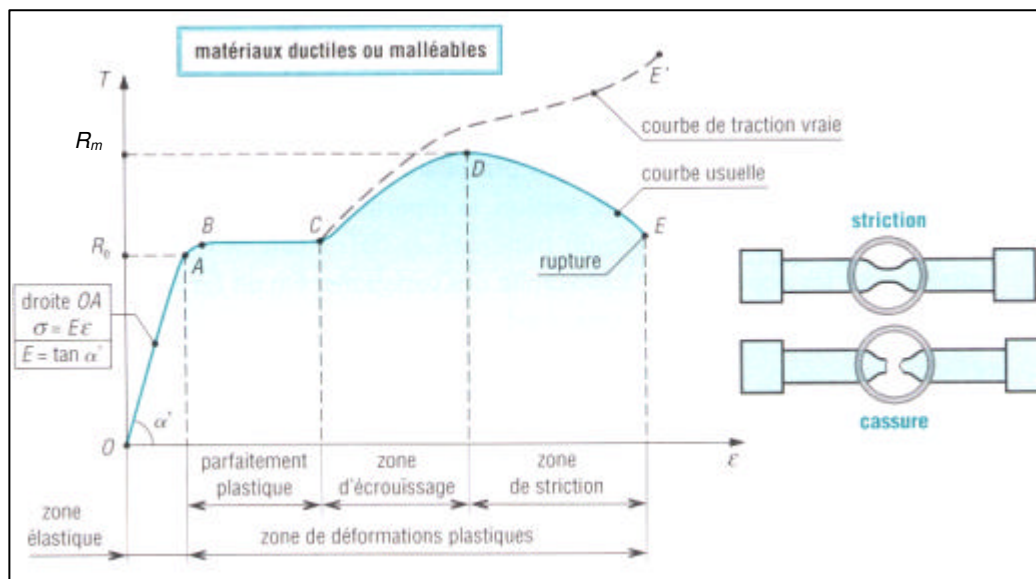
L'essai de traction permet à lui seul de définir les caractéristiques mécaniques courantes utilisées en RDM. La seule connaissance des paramètres de l'essai de traction permet de prévoir le comportement d'une pièce sollicitée en cisaillement, traction, compression et flexion.

Les trois photos ci-contre représentent respectivement une éprouvette plate, une éprouvette cylindrique et un détail d'une éprouvette cylindrique montée dans des mors d'une machine de traction.



RESISTANCE DES MATERIAUX

L'essai est réalisé sur une machine de traction (photo ci-contre) : on applique lentement et progressivement à une éprouvette de forme et dimensions normalisées, un effort de traction croissant dont l'intensité varie de 0 à F.



Le graphe ci-dessus représente la courbe classique (conventionnelle) de traction d'un matériau ductile :

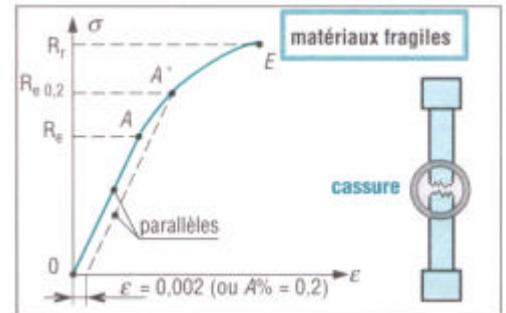
Zone élastique OA : l'éprouvette se comporte élastiquement (comme un ressort) et revient toujours à sa longueur initiale dès que la charge est relâchée. Le point A, auquel correspond la limite élastique R_e , marque la fin de cette zone. La proportionnalité entre la contrainte σ et la déformation ε se traduit par la loi de Hooke ($\sigma = E \varepsilon$). $E = \tan \alpha$ caractérise la pente de la droite OA et $\sigma = E \varepsilon$ son équation.

Zone de déformation plastique AE : on distingue encore trois zones BC, CD et DE. Dans la zone BC, parfaitement plastique, la contrainte reste constante et l'allongement se poursuit jusqu'en C. Entre C et D, zone d'écrouissage, le matériau subit un changement de structure qui accroît sa résistance. Le point D, auquel correspond la résistance maximale R_m , marque la fin de cette zone. Enfin, entre D et E, l'éprouvette subit une striction amenant une diminution de la section avec étranglement. La rupture se produit au point E, auquel correspond la résistance à la rupture R_r .

Remarque : la courbe en trait discontinu correspond à la courbe de traction vraie. A quoi correspond-elle ? Vous pouvez déjà commencer à y réfléchir pour préparer la séance de Travaux Pratiques sur la machine de traction. Indices : que se passe-t-il (d'autre) lorsque l'éprouvette s'allonge ? Qu'enregistre la machine de traction ? Not a Bene : vous avez le droit d'appeler un ami...

RESISTANCE DES MATERIAUX

La courbe ci-contre représente quant à elle le comportement d'un matériau fragile. Dans ce cas, la courbe se réduit presque à la zone de déformation élastique.



1.1.1 Caractéristiques fondamentales

Limite élastique	$Re = \frac{Fe}{S_0}$	Re limite élastique en MPa Fe charge maxi élastique en N S_0 section initiale en mm^2
Résistance à la rupture	$Rr = \frac{Fr}{S_0}$	Rr résistance à la rupture en MPa Fr charge à la rupture en N S_0 section initiale en mm^2
Allongement relatif	$A\% = \frac{L_u - L_0}{L_0}$	L_u longueur ultime après rupture en mm L_0 longueur initiale en mm
Allongement	$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$	$\Delta L = L - L_0$ allongement en mm L_0 longueur initiale en mm ϵ allongement (ou déformation)

1.2 Essai de traction biaxial

Il est possible de tester des pièces en réalisant deux essais de traction en même temps.

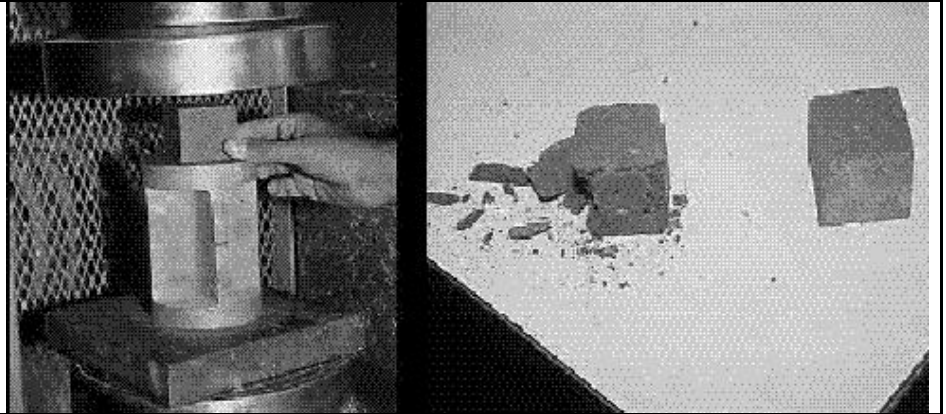
Avec le montage ci-contre, on teste des fibres en traction simultanément dans deux sens différents. Ces fibres intégreront sans doute un matériau composite.



RESISTANCE DES MATERIAUX

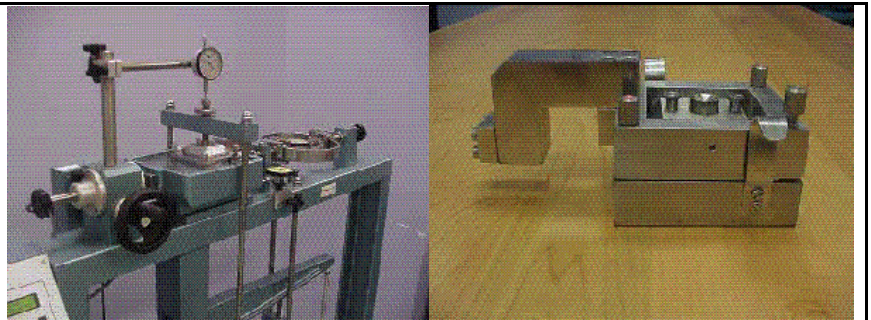
1.3 Essai de compression

Les photos ci-contre montrent un essai de compression sur des échantillons de béton.



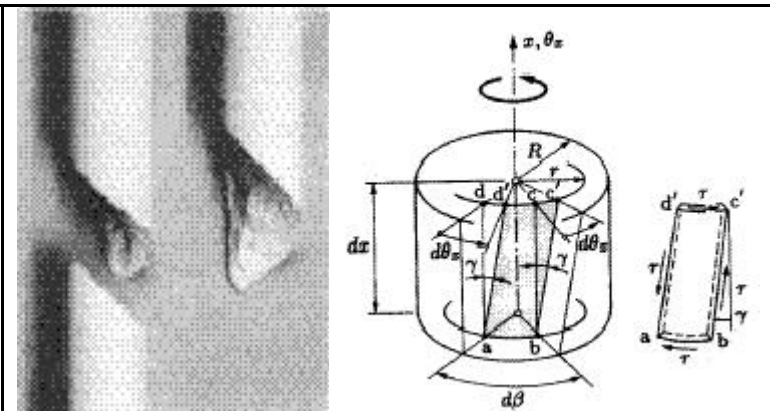
1.4 Essai de cisaillement

Le dispositif ci-contre permet d'étudier la résistance au cisaillement des différentes couches d'un sol.



1.5 Essai de torsion

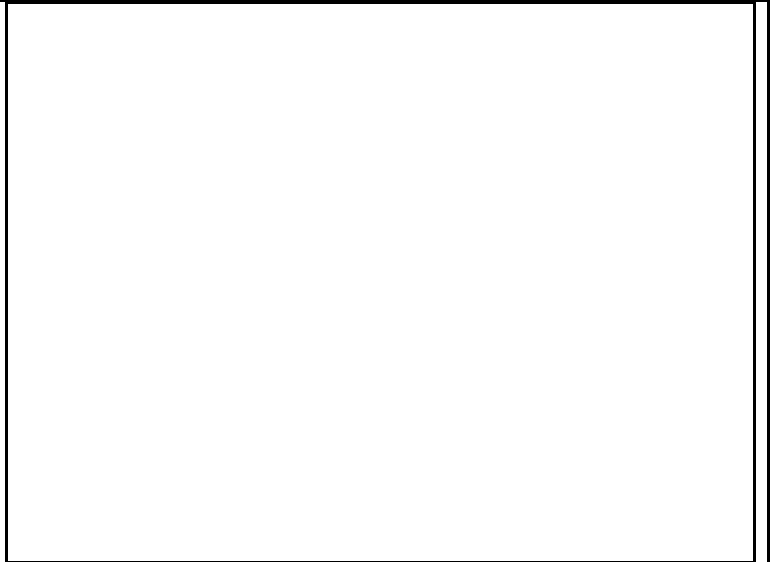
La photo ci-contre représente une éprouvette après un essai de torsion. L'essai de torsion permet notamment de déterminer le module d'élasticité transversal ou module de Coulomb (G).



RESISTANCE DES MATERIAUX

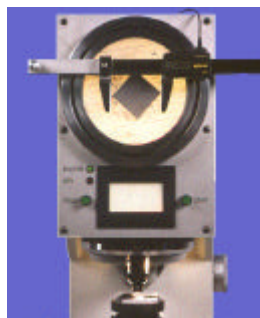
1.6 Essai de flexion

La photo ci-contre représente un essai de flexion longitudinale sur un tuyau en fonte ductile.
(photo PONT-A-MOUSSON)



1.7 Essai de dureté

Cet essai est destiné à vérifier la dureté superficielle d'une pièce. Il consiste à indenter la surface de la pièce à tester à l'aide d'un pénétrateur sphérique (dureté Brinell), conique (dureté Rockwell) ou pyramidal à base carrée (dureté Vickers) sur lequel on applique une charge connue. La mesure de l'aire de l'empreinte, rapportée à la charge appliquée permet de déduire la dureté.

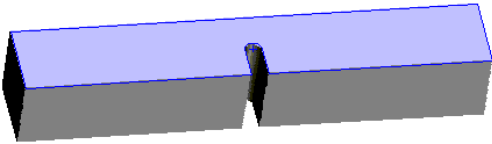


Machine universelle (1 à 250 kg)

RESISTANCE DES MATERIAUX

1.8 Essai de résilience

Les paramètres de ténacité déterminés par l'essai de traction n'ont plus de sens lorsque la charge s'applique très rapidement. On parle de choc lorsque la durée d'application de la charge est de l'ordre du $1/100$ de seconde. La résistance au choc ou résilience est caractérisée par le quotient de l'énergie nécessaire pour rompre l'éprouvette en un seul coup par la surface de la section rompue. Les photos ci-contre et ci-dessous représentent respectivement la machine d'essai (Mouton de Charpy) et une éprouvette entaillée en U.



1.9 Photoélasticimétrie

La photoélasticimétrie permet une étude détaillée des régions chargées. On y observe les zones d'iso-contraintes ainsi que leur progression. Cette méthode est très efficace pour l'étude des concentrations de contraintes comme : les trous, les encoches, les épaulements...

Pour modéliser l'objet de l'étude, on utilise une matière plastique transparente. Un système optique spécial (polariscope) permet d'observer les variations de contraintes avec les modifications de couleurs de la pièce.

Ci-contre, un exemple d'une visualisation des contraintes au niveau du contact entre deux dents d'un engrenage : les zones très colorées subissent les contraintes les plus élevées.

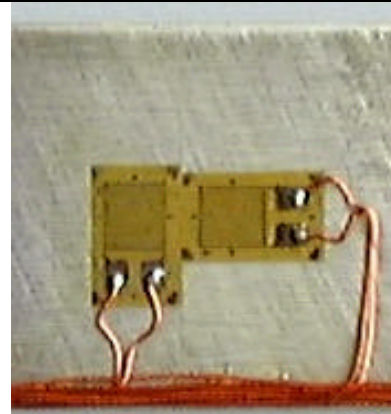


RESISTANCE DES MATERIAUX

1.10 Jauges de déformations (extensométrie)

L'utilisation de jauges est la méthode expérimentale la plus usitée pour vérifier les résultats théoriques. Les jauges sont collées directement sur la surface à étudier et mesurent les déformations « en un point donné ». Les contraintes sont alors déduites par les lois de la RDM.

Sur la photo ci-contre, les deux jauges sont situées au même point, mais dans orientées selon des directions différentes. Ce montage permet de mesurer les déformations dans deux directions à 90°.

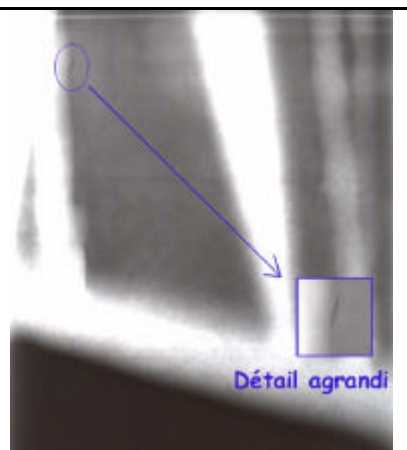


1.11 Radiographie

Il est possible de radiographier une pièce mécanique comme on le fait en médecine.

Néanmoins, les pièces métalliques ne laissant pas facilement les rayons X les traverser, il faut une quantité de rayons beaucoup plus importante, très dangereuse pour l'homme.

Sur la photo ci-contre, représentant une pièce de moteur d'avion, on met en évidence un « cric », bulle d'air restée à l'intérieur de la matière lors de la fabrication.



1.12 Ultrasons

Les traducteurs du type de la figure ci-contre génèrent, lorsqu'ils sont appliqués sur la surface de la pièce à étudier, des ultrasons qui se propagent à l'intérieur du matériau.

Ils peuvent alors être utilisés soit pour détecter la présence de fissures à l'intérieur de la pièce, soit pour déterminer les propriétés mécaniques du matériau.

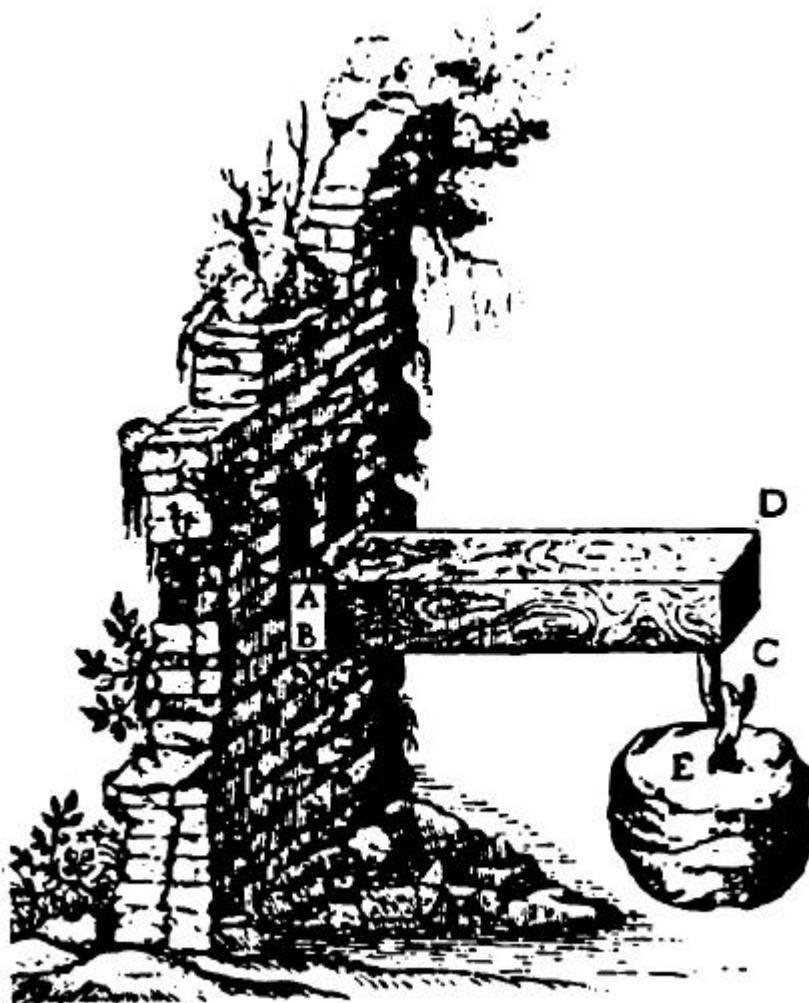


RESISTANCE DES MATERIAUX

RESISTANCE DES MATERIAUX



TRACTION



Gravure montrant l'essai d'une poutre en flexion

RESISTANCE DES MATERIAUX

(Extrait de « *Discorsi e dimostrazioni mathematiche* » de Galilée)

RESISTANCE DES MATERIAUX

SOMMAIRE

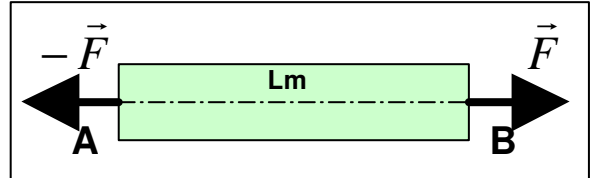
1.	DEFINITION.....	4
2.	EFFORT NORMAL N	5
3.	CONTRAINTE NORMALE σ	6
4.	CONDITION DE RESISTANCE.....	7
5.	DEFORMATIONS	7
5.1	ALLONGEMENTS.....	7
5.2	CONTRACTION LATÉRALE – COEFFICIENT DE POISSON ν	8
6.	RELATION CONTRAINTES - DEFORMATIONS	9
6.1	LOI DE HOOKE.....	9
6.2	EXEMPLES DE VALEURS DE MODULE D'YOUNG	9
6.3	ESSAI DE TRACTION.....	10
7.	CONCENTRATION DE CONTRAINTES	10
8.	CONTRAINTES DANS UNE SECTION INCLINÉE.....	13



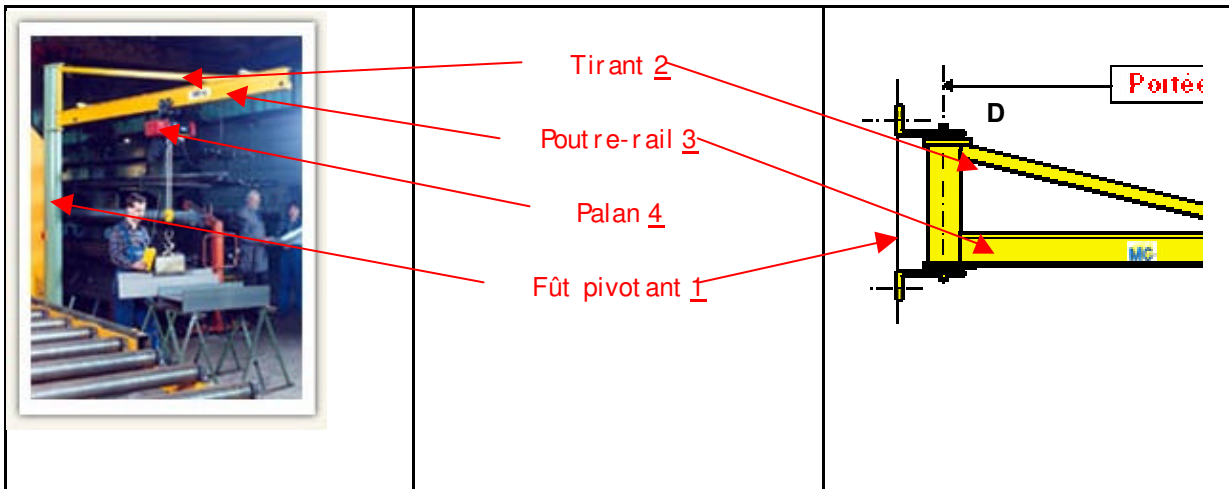
RESISTANCE DES MATERIAUX

1. Définition

Une poutre droite est sollicitée en traction chaque fois que les actions à ses extrémités (A et B) se réduisent à deux forces égales et opposées ($\vec{F}$ et $-\vec{F}$), de direction la ligne moyenne (Lm).

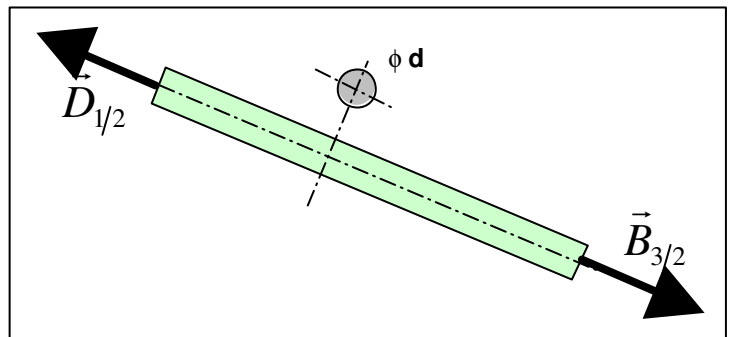


Exemple : les deux figures ci-dessous représentent une potence murale à flèche triangulée, utilisée en manutention pour lever et déplacer des charges.



Cette potence se compose d'un palan 4, d'une poutre rail 3, d'un fût pivotant 1 et d'un tirant 2. Le tirant 2 est soumis à une sollicitation de traction : il est soumis à l'action des deux forces $\vec{B}_{3/2}$ et $\vec{D}_{1/2}$, égales et opposées, de direction BD, d'intensité maximale 6 200 N (intensité atteinte lorsque le palan est à l'extrême droite).

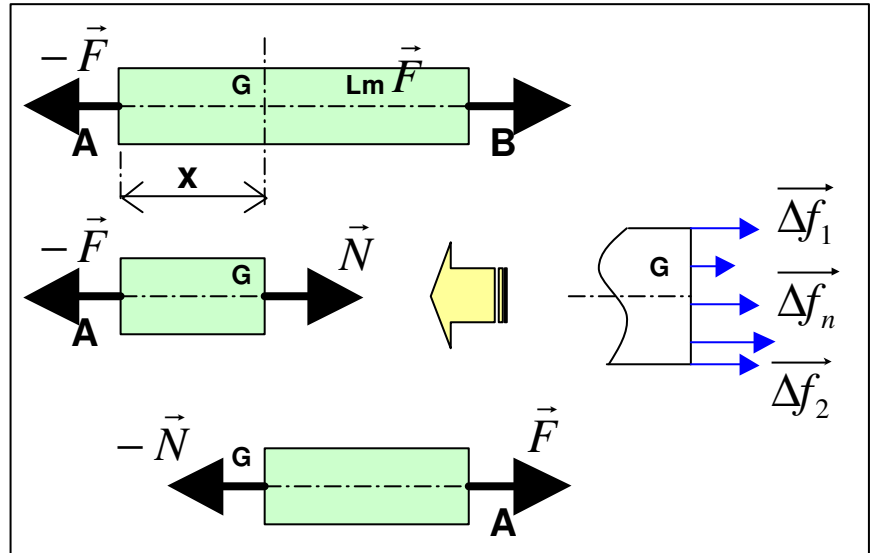
Le tirant 2 est cylindrique, de diamètre d inconnu, de longueur 2.8 m. Il est réalisé en acier (résistance à la rupture $R_r = 500$ MPa, limite élastique $R_e = 300$ MPa). Le diamètre d va être déterminé dans les paragraphes suivants.



RESISTANCE DES MATERIAUX

2. Effort normal N

Faisons une coupure fictive dans la poutre précédente (section droite S, située à une distance x du point A) entre les deux extrémités A et B, de façon à faire apparaître les efforts intérieurs dans la poutre. Cette coupure S divise la poutre en deux tronçons AG et GB.

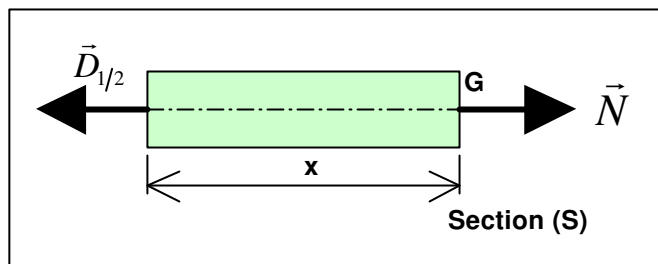


Si on isole le tronçon AG, la résultante des actions $\overrightarrow{\Delta f_1}, \overrightarrow{\Delta f_2}, \dots, \overrightarrow{\Delta f_n}$ qui s'exercent en chaque point de la coupure par le tronçon GB se réduit au seul effort normal $\vec{N}$ en G (centre de gravité de la section S).

$$\vec{N} = \overrightarrow{\Delta f_1} + \overrightarrow{\Delta f_2} + \dots + \overrightarrow{\Delta f_n} = \vec{F} \quad (\text{direction AGB})$$

On a donc $N = F \quad \forall x$

Exemple : reprenons le cas du tirant.



$$N = B_{3/2} = D_{1/2} = 6\,200 \text{ daN}$$

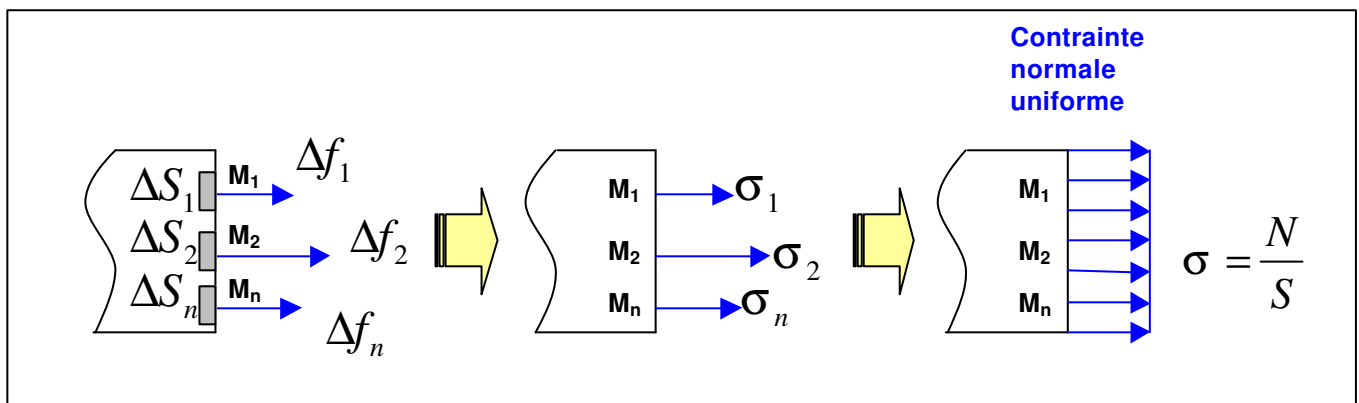
RESISTANCE DES MATERIAUX

3. Contrainte normale σ

Divisons la section S précédente en n petites surfaces élémentaires $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ telles que :

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_n$$

Chaque élément de surface supporte un effort de traction $\vec{\Delta f}_1, \vec{\Delta f}_2, \dots, \vec{\Delta f}_n$ parallèle à la ligne moyenne AB.



Si $M_1, M_2, M_3, \dots$ sont les centres des petites surfaces ΔS , en chaque point, la contrainte σ est définie comme la limite du rapport de Δf sur ΔS lorsque ΔS tend vers 0 :

$$\sigma_1 = \lim_{\Delta S_1 \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f_1}{\Delta S_1} \right) ; \quad \sigma_2 = \lim_{\Delta S_2 \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f_2}{\Delta S_2} \right) ; \quad \dots ; \quad \sigma_n = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f_n}{\Delta S_n} \right)$$

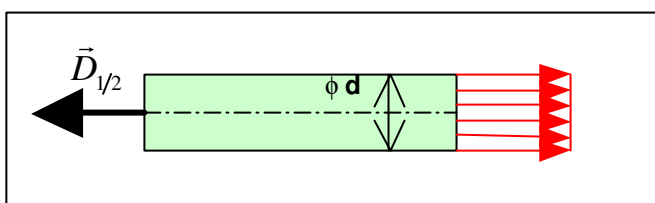
Contrainte normale uniforme : dans le cas général, et sauf cas particulier de concentrations de contraintes, on admettra que toutes les contraintes précédentes sont identiques.

On dit qu'il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite S . Il en résulte que :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

avec σ la contrainte normale en MPa
 N l'effort normal en N
 S la section droite en mm^2

Exemple : reprenons le cas du tirant, en supposant $d = 20 \text{ mm}$.



$$D_{1/2} = 6\,200 \text{ daN}$$

$$S = \frac{\pi \times 20^2}{4} = 314 \text{ mm}^2$$

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{D_{1/2}}{S} = \frac{62\,000}{314} = 197 \text{ N.mm}^{-2}$$

RESISTANCE DES MATERIAUX

4. Condition de résistance

Pour des conditions de sécurité liées à l'usage de l'appareil, la contrainte σ précédemment déterminée doit rester inférieure à une contrainte limite admissible, appelée résistance pratique à l'extension R_{pe} .

La résistance pratique R_{pe} est fixée par des normes ou par le constructeur. Dans le cas général, R_{pe} est définie à partir de la limite élastique R_e du matériau, déterminée par l'essai de traction.

$$\sigma_{Maxi} = \frac{N}{S} \leq R_{pe} = \frac{R_e}{s}$$

avec s le coefficient de sécurité adopté pour la construction de l'appareil.

Exemple : reprenons le cas du tirant. Si on impose une contrainte admissible de 100 MPa, déterminons le diamètre d minimal pour la construction de celui-ci, ainsi que le coefficient de sécurité adopté. Rappel : effort $N = 62\,000$ N.

$$\text{❖ Détermination du diamètre } d : \sigma_{Maxi} = \frac{N}{S} = \frac{62\,000}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq 100 \quad \text{d'où } d \geq 28.1 \text{ mm}$$

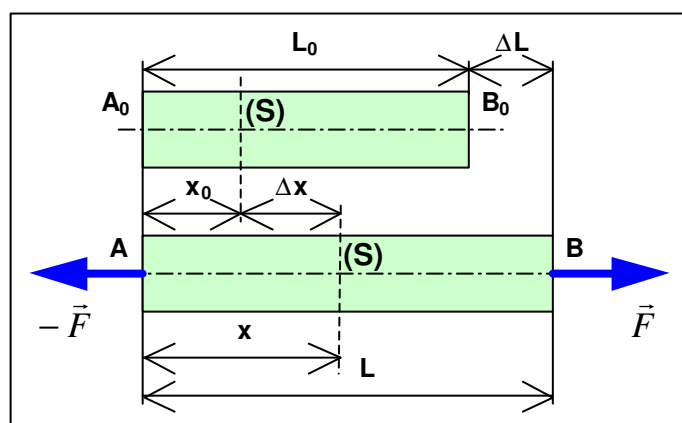
❖ Détermination du coefficient de sécurité : l'acier employé a pour caractéristiques $R_e = 300$ MPa et $R_r = 500$ MPa.

$$R_{pe} = \frac{R_e}{s} \quad \text{ou} \quad s = \frac{R_e}{R_{pe}} = \frac{300}{100} = 3$$

5. DEFORMATIONS

5.1 Allongements

L_0 : longueur initiale de la poutre
 L : longueur finale de la poutre
 ΔL : allongement total de la poutre
 x_0 : longueur initiale du tronçon
 x : longueur finale du tronçon
 Δx : allongement du tronçon

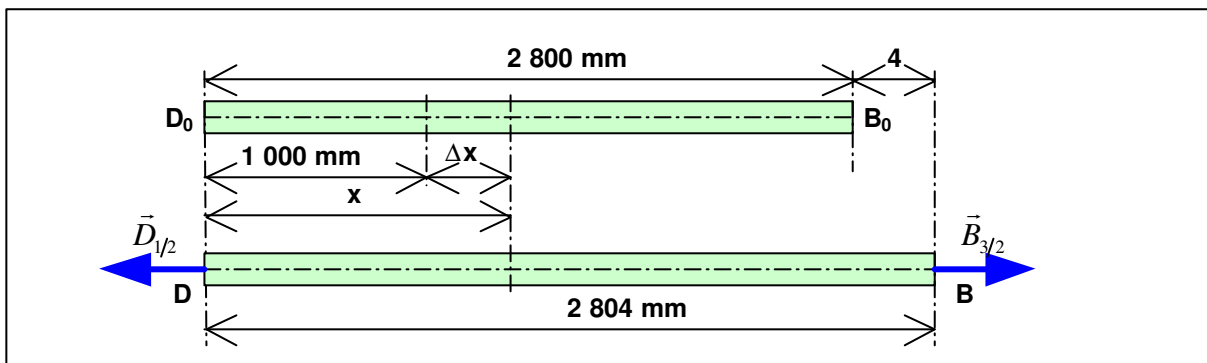


RESISTANCE DES MATERIAUX

L'expérimentation montre que les allongements sont proportionnels aux longueurs initiales. L'allongement relatif (déformation ε) traduit cette propriété :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{\Delta x}{x_0}$$

Exemple : reprenons le cas du tirant. Sous charge, le tirant s'allonge de 4 mm. Déterminons la déformation ε et l'allongement d'un tronçon de longueur 1m.



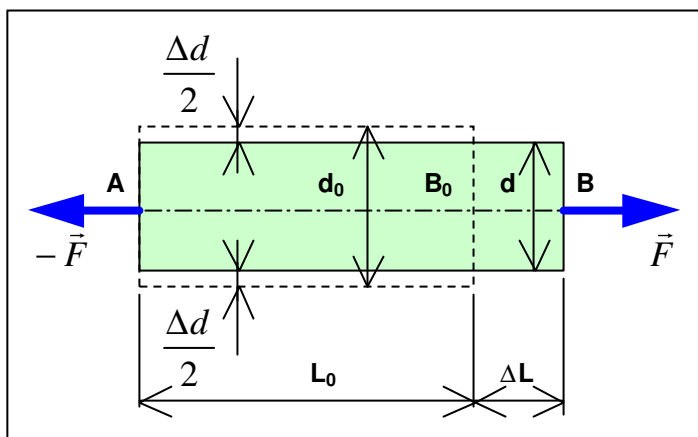
❖ Déformation ε : $\varepsilon = \frac{4}{2800} = 0.00143$

❖ Allongement : $\varepsilon = \frac{\Delta x}{1000} = 0.00143$ d'où $\Delta x = 0.00143 \times 1000 = 1.43 \text{ mm}$

On a donc $x = 1001.43 \text{ mm}$

5.2 Contraction latérale – Coefficient de Poisson ν

Le coefficient de Poisson ν caractérise le rapport entre la contraction latérale ε_d et l'allongement relatif de la poutre ε_L :



$$\varepsilon_d = \frac{\Delta d}{d_0} \quad \text{et} \quad \varepsilon_L = \frac{\Delta L}{L_0}$$

$$\text{alors } \nu = -\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_L}$$

RESISTANCE DES MATERIAUX

6. Relation Contraintes - Déformations

6.1 Loi de Hooke

Pour un grand nombre de matériaux, l'essai de traction montre qu'il existe une zone élastique pour laquelle l'effort $\vec{F}$ de traction est proportionnel à l'allongement ΔL . Autrement dit, le rapport $F/\Delta L$ est constant (analogie avec un ressort $F = k x$).

Cette propriété est énoncée par la loi de Hooke : en déformation élastique, la contrainte normale σ est proportionnelle à l'allongement relatif ε :

$$\sigma = E \varepsilon$$

avec σ la contrainte normale (en MPa)

ε l'allongement relatif (sans unité)

E le module d'élasticité longitudinale ou module d'Young (en MPa)

Remarques : le module d'élasticité longitudinale E est une caractéristique (propriété mécanique intrinsèque) du matériau. La loi de Hooke est à la RDM ce que la loi d'Ohm est à l'électricité.

Exemple : reprenons le cas du tirant. ($d = 28$ mm, $\sigma = 100$ MPa, $E = 200$ GPa, $L = 2.8$ m). Déterminons l'allongement du tirant :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E} = \frac{100}{200\,000} = 0.0005$$

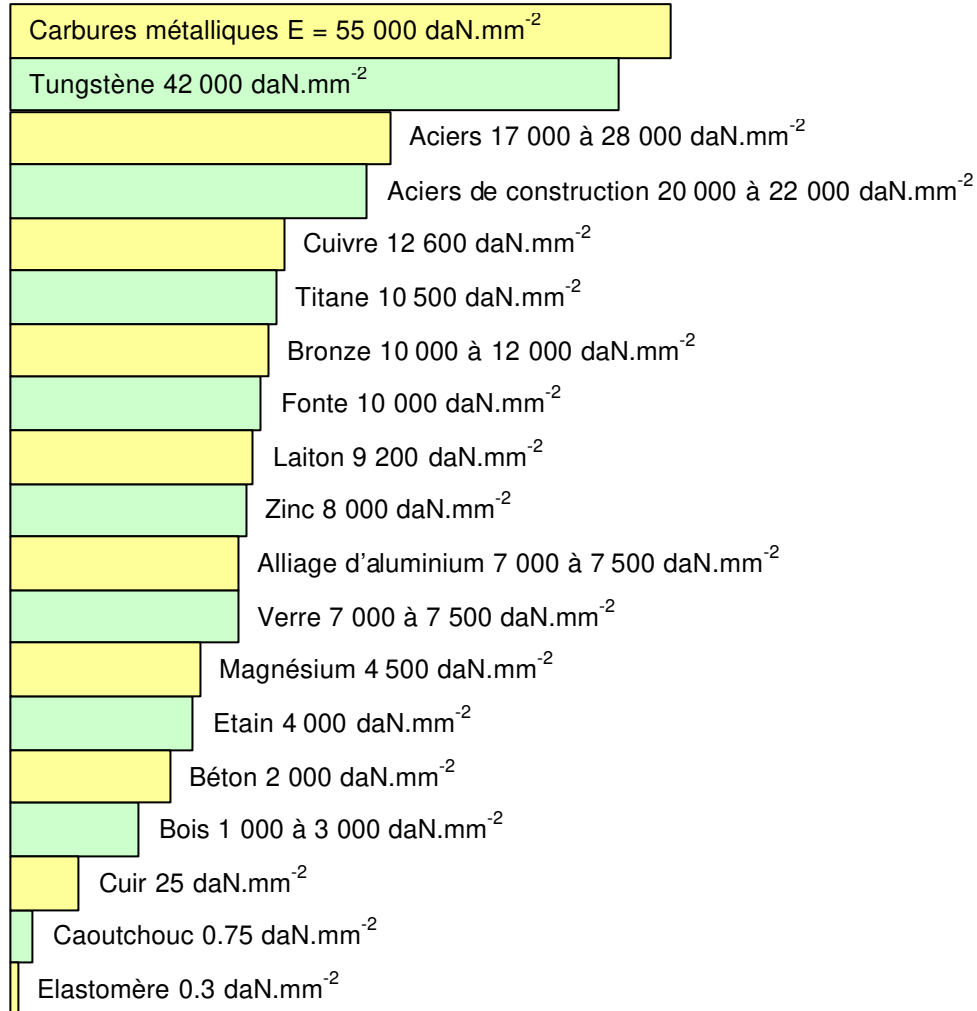
$$\Delta L = \varepsilon \times L = 0.0005 \times 2\,800 = 1.4 \text{ mm}$$

6.2 Exemples de valeurs de module d'Young

Voir tableau page suivante.

RESISTANCE DES MATERIAUX

Module d'YOUNG



6.3 Essai de traction

Voir le chapitre consacré aux essais mécaniques.

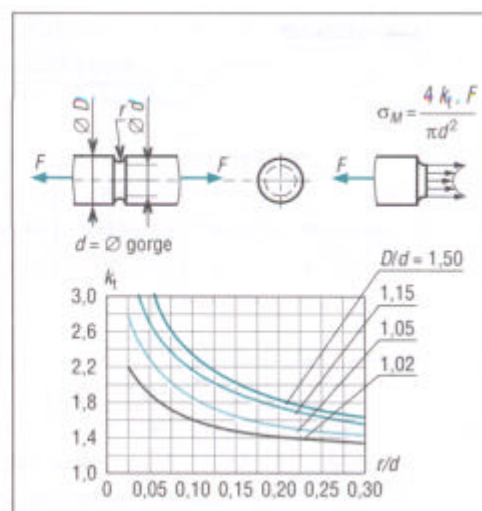
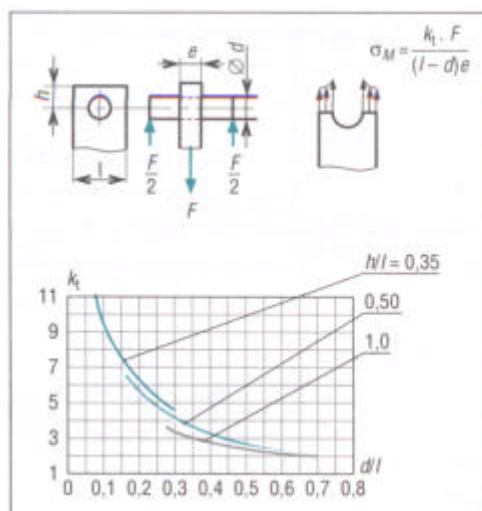
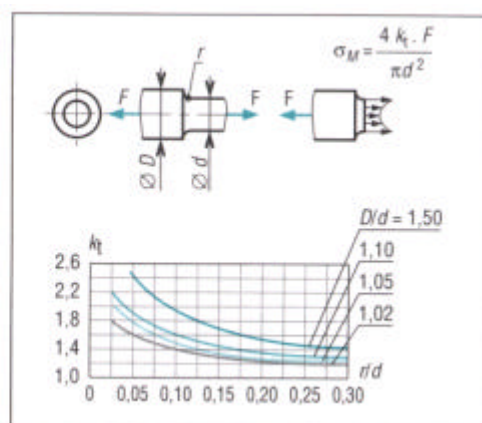
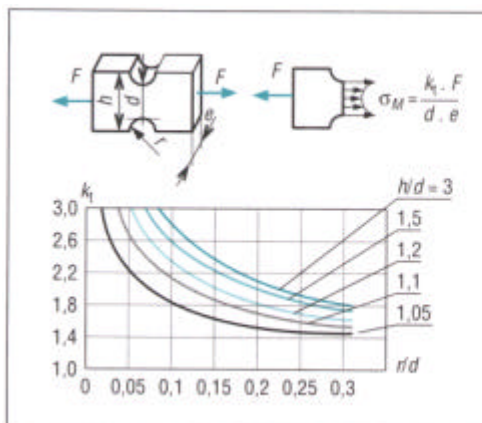
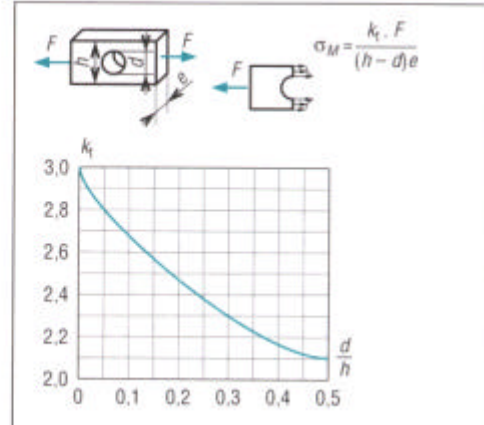
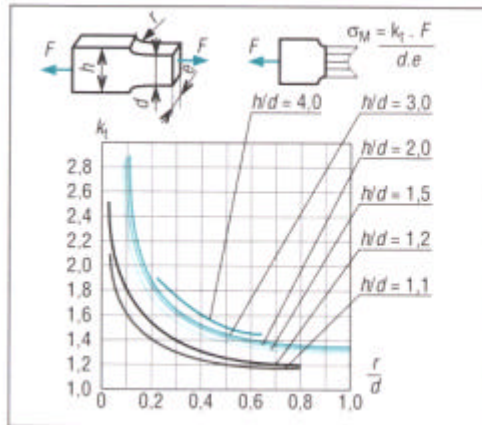
7. Concentration de contraintes

Lorsque les poutres étudiées présentent de brusques variations de sections (trous, gorges, épaulements...), la relation $\sigma = N/S$ n'est plus applicable. En effet, au voisinage du changement de section, la répartition des contraintes n'est plus uniforme et présente des extremums. Le maximum est atteint pour les points situés à proximité des variations : on dit qu'il y a concentration de contraintes en ces points. La valeur de la contrainte est alors donnée par :

$$\sigma_{\text{Maxi}} = K_t \cdot \sigma_0 \quad \text{avec} \quad \sigma_0 = \frac{F}{S} = \frac{N}{S}$$

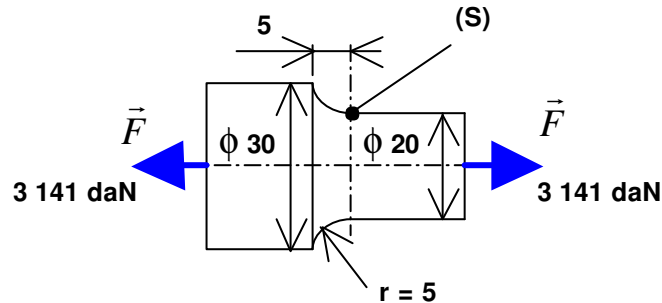
RESISTANCE DES MATERIAUX

K_t est appelé le coefficient de concentration de contraintes. K_t dépend de la forme de la section et du type de la variation (voir tableaux suivants).



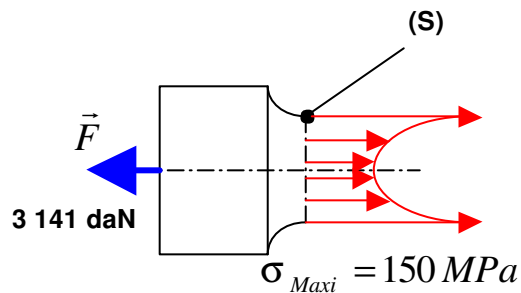
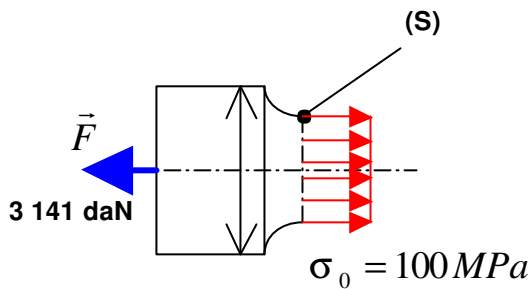
RESISTANCE DES MATERIAUX

Exemple : déterminons σ_{Maxi} près de l'épaulement, au niveau de la section S, pour la pièce proposée :



Cas avec contraintes uniformes

Cas de concentration de contraintes



$$\sigma_0 = \frac{F}{S} = \frac{31\,410}{\frac{\pi \times 20^2}{4}} = 100 \text{ N.mm}^{-2}$$

$$\sigma_0 = \frac{F}{S} = \frac{31\,410}{\frac{\pi \times 20^2}{4}} = 100 \text{ N.mm}^{-2}$$

$$\sigma_{Maxi} = K_t \cdot \sigma_0$$

$$\frac{r}{d} = 0.25 \text{ et } \frac{D}{d} = 1.5$$

Le tableau donne alors $K_t = 1.5$

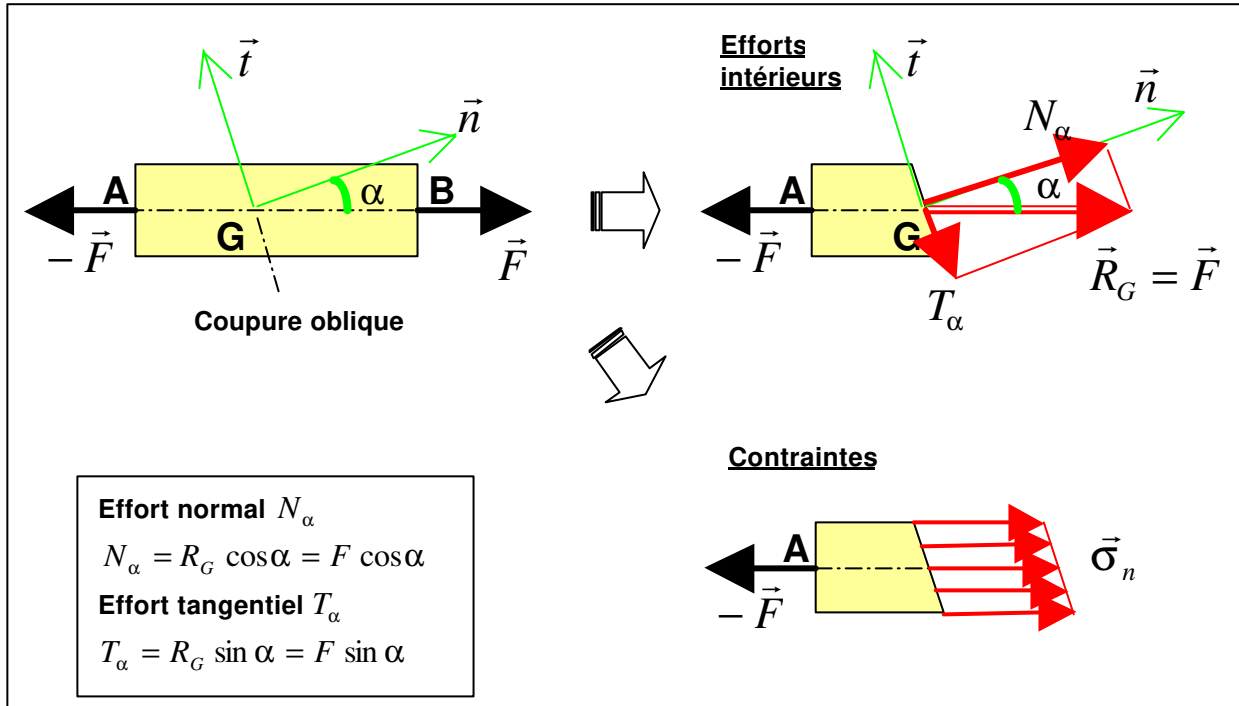
$$\text{d'où } \sigma_{Maxi} = 1.5 \times 100 = 150 \text{ N.mm}^{-2}$$

Conclusion : la contrainte est maximale à la périphérie de (S), pour le diamètre de 20 et a pour valeur $\sigma_{Maxi} = 150 \text{ N.mm}^{-2}$

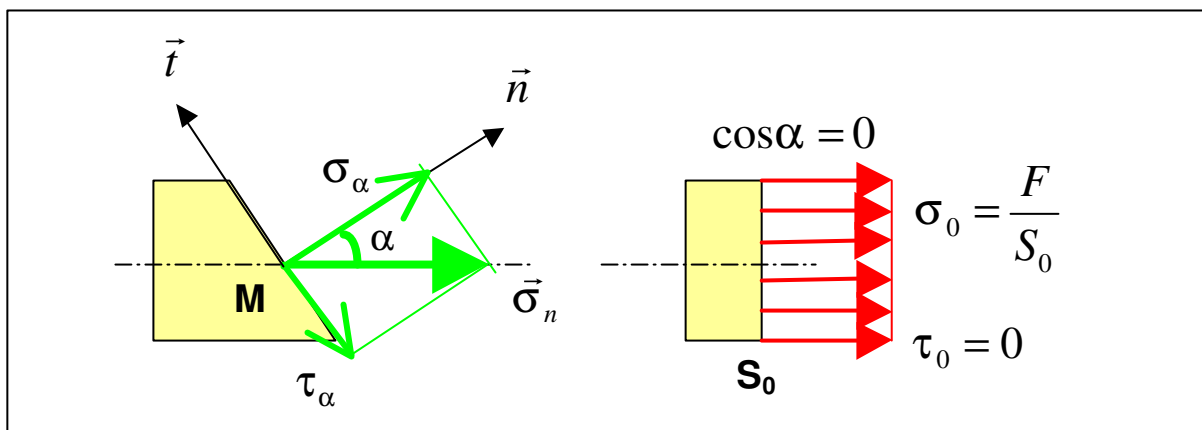
RESISTANCE DES MATERIAUX

8. Contraintes dans une section inclinée

Déterminons les contraintes exercées dans une section inclinée d'un angle α (section de normale $\vec{n}$ et de vecteur tangent $\vec{t}$).



L'équilibre statique du tronçon AG montre que les efforts intérieurs se réduisent à $\vec{R}_G = \vec{F}$ au point G, barycentre de la section inclinée. La projection de $\vec{R}_G$ sur $\vec{n}$ et $\vec{t}$ donne respectivement l'effort normal N_α et l'effort tranchant T_α dans la coupure.



Les contraintes $\vec{\sigma}_n$ dans la section sont identiques en tout point et parallèles à l'axe (ligne moyenne) de la poutre. La projection de $\vec{\sigma}_n$ sur $\vec{n}$ et $\vec{t}$ donne respectivement la contrainte normale à la coupure σ_α et la

RESISTANCE DES MATERIAUX

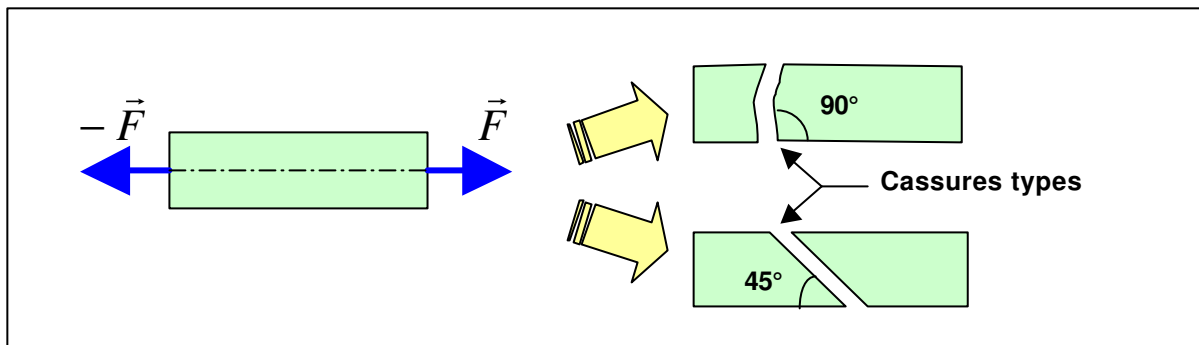
contrainte tangentielle τ_α . En remarquant que $S_0 = S \cos \alpha$ (avec S_0 l'aire de la section droite et S l'aire de la section inclinée) et que $\sigma_0 = F/S_0$:

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{S} = \frac{N_\alpha}{S_0} \cos \alpha = \frac{F}{S_0} \cos^2 \alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{T_\alpha}{S} = \frac{F \sin \alpha \cos \alpha}{S_0} = \sigma_0 \sin \alpha \cos \alpha$$

Remarque : la contrainte normale σ_α est maximale pour $\alpha = 0$ ($\sigma_{\alpha \text{ Maxi}} = \sigma_0$) et la contrainte tangentielle τ_α est maximale pour $\alpha = 45^\circ$ ($\tau_{\alpha \text{ Maxi}} = \sigma_0/2$)

Remarque : lorsque les matériaux ont une résistance au cisaillement plus faible, la rupture par traction ou compression se produit dans un plan incliné à 45° , plan où les contraintes de cisaillement τ_α sont maximales. En revanche, si la résistance à la traction est proportionnellement plus faible, la rupture se produit dans une section droite ($\alpha = 0$).



Voilà, c'est tout pour aujourd'hui...

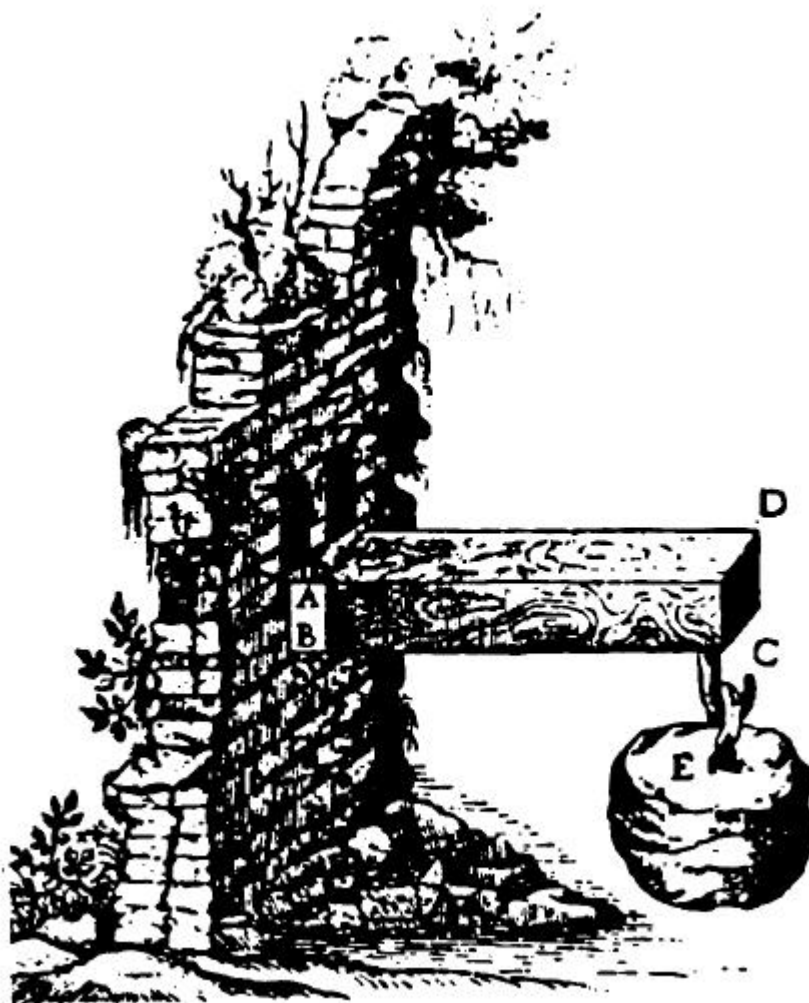


RESISTANCE DES MATERIAUX

RESISTANCE DES MATERIAUX



CISAILLEMENT



Gravure montrant l'essai d'une poutre en flexion

RESISTANCE DES MATERIAUX

(Extrait de « *Discorsi e dimostrazioni mathematiche* » de Galilée)

RESISTANCE DES MATERIAUX

SOMMAIRE

1. DEFINITION - EXEMPLES	4
2. EFFORT TRANCHANT T.....	5
3. CONTRAINTE DE CISAILLEMENT τ	6
3.1 CONTRAINTE TANGENTIELLE UNIFORME.....	6
4. CALCUL DES CONSTRUCTIONS	7
5. DEFORMATION – ANGLE DE GLISSEMENT γ	7
5.1 RELATION ENTRE τ ET γ	8



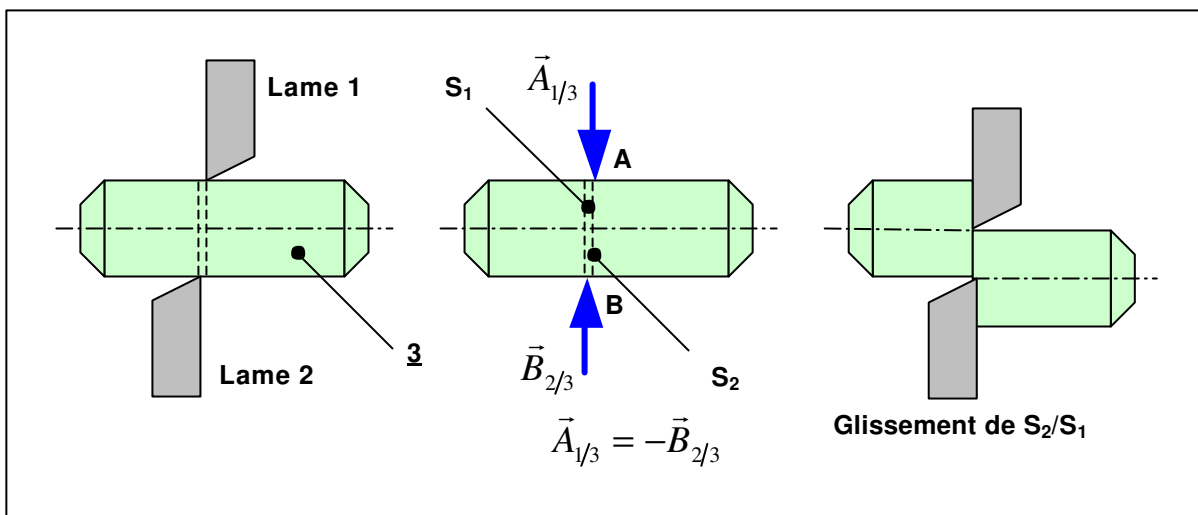
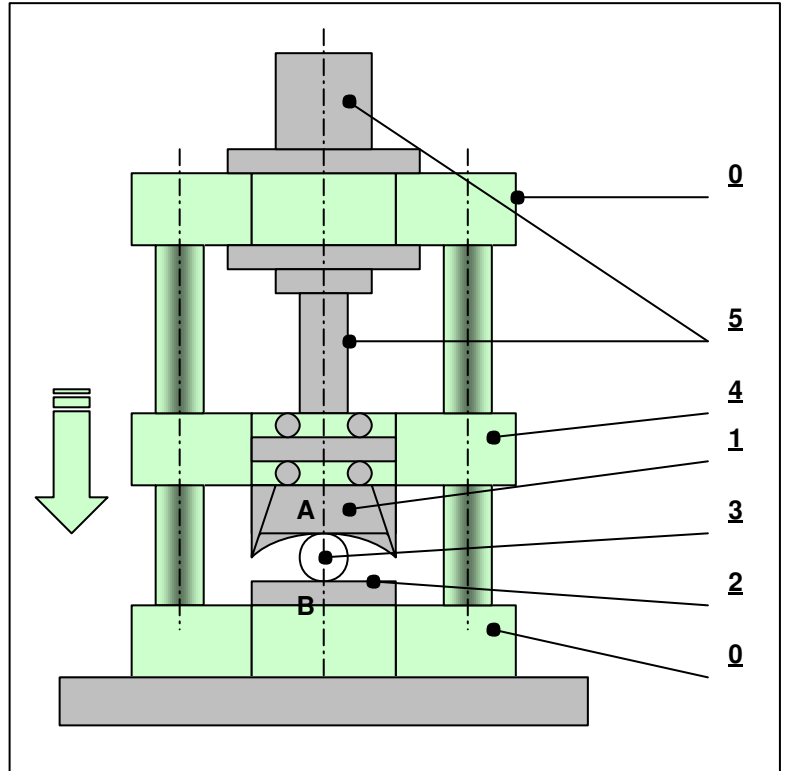
RESISTANCE DES MATERIAUX

1. Définition - Exemples

Exemple 1 : une superbe cisaille hydraulique est utilisée pour couper des ronds, fers et plats de petites dimensions.

Elle se compose d'un bâti 0, d'un coulisseau 4 en liaison glissière par rapport au bâti, d'une lame fixe 2, d'une lame mobile 1 et d'un vérin hydraulique 5 fournissant l'effort de coupe.

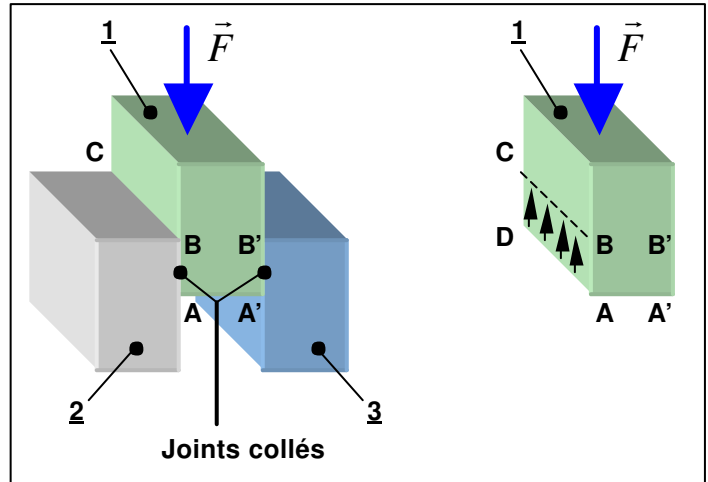
Les efforts de cisaillement $\vec{A}_{1/3}$ et $\vec{B}_{2/3}$ exercés par les lames sont perpendiculaires à la poutre 3. Le cisaillement de la poutre se traduit par le glissement de la section droite S_1 par rapport à la section droite S_2 qui lui est directement en contact.



RESISTANCE DES MATERIAUX

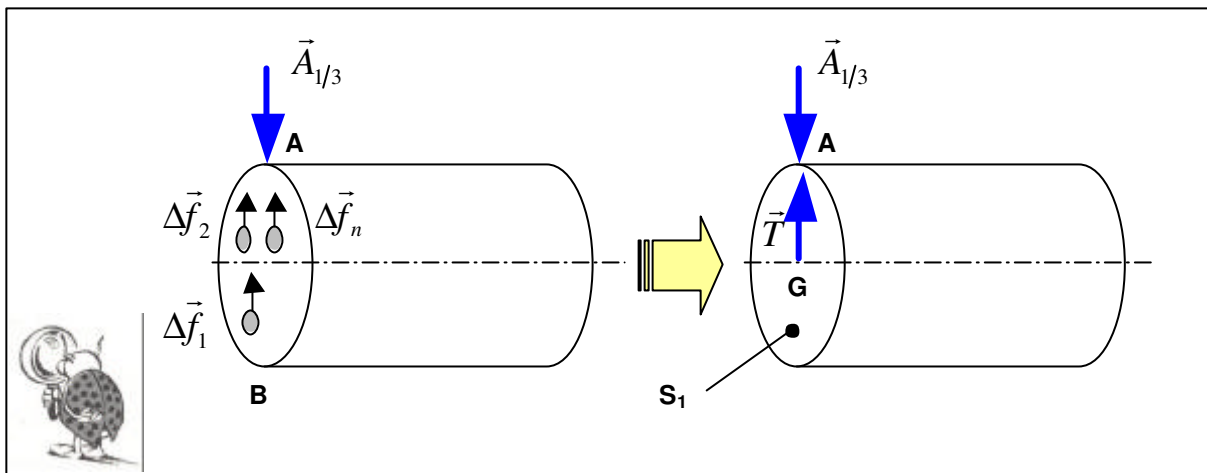
Exemple 2 : trois blocs identiques 1, 2 et 3 de forme parallélépipédique sont collés en chape comme le montre la figure ci-contre.

L'assemblage supporte une charge $\vec{F}$ suivant son axe de symétrie. Les deux faces collées ABCD et A'B'C'D' sont soumises à un cisaillement de même nature que celui de l'exemple 1.



2. Effort tranchant T

Pour l'exemple du paragraphe précédent, les actions exercées par S_2 sur S_1 sont schématisées par un infini de forces élémentaires $\Delta\vec{f}_1, \Delta\vec{f}_2, \dots, \Delta\vec{f}_n$ qui agissent respectivement sur les surfaces élémentaires $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ telles que : $S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_n$



La résultante $\vec{T}$ des forces élémentaires s'applique au point G, barycentre de la section droite S_1 . $\vec{T}$ est égale et opposée à $\vec{A}_{1/3}$ (Principe Fondamental de la Statique) :

$$\vec{T} = \Delta\vec{f}_1 + \Delta\vec{f}_2 + \dots + \Delta\vec{f}_n = -\vec{A}_{1/3} = \text{effort tranchant}$$

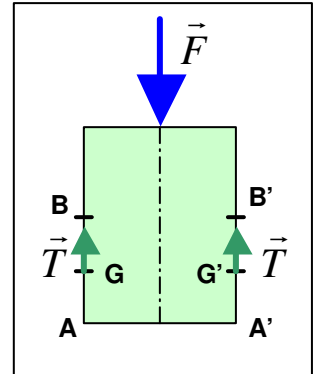
RESISTANCE DES MATERIAUX

Exemple : reprenons l'exemple 2 avec $F = 200 \text{ daN}$.

Du fait de la symétrie, les faces ABCD et A'B'C'D' supportent le même effort tranchant $\vec{T}$. L'équilibre du bloc 1 donne :

$$T = \frac{F}{2} = 100 \text{ daN}$$

$\vec{T}$ s'applique aux centres de gravité des surfaces ABCD et A'B'C'D', respectivement G et G'.



3. Contrainte de cisaillement τ

Si $M_1, M_2, \dots, M_n$ sont les centres des surfaces élémentaires $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$, en chaque point, la contrainte tangentielle τ est définie comme la limite du rapport Δf sur ΔS lorsque ΔS tend vers 0 :

$$\tau_1 = \lim_{\Delta S_1 \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f_1}{\Delta S_1} \right) ; \quad \tau_2 = \lim_{\Delta S_2 \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f_2}{\Delta S_2} \right) ; \dots ; \quad \tau_n = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f_n}{\Delta S_n} \right)$$

Remarque : $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ sont contenues dans le plan de la section droite, contrairement aux contraintes normales σ (cas de la traction uniaxiale) qui lui sont perpendiculaires.

3.1 Contrainte tangentielle uniforme

Dans le cas du cisaillement, on suppose que toutes les contraintes tangentielles élémentaires sont identiques : il y a répartition uniforme des contraintes dans la section cisillée. Il en résulte que :

$$\tau = \frac{T}{S}$$

avec τ la contrainte tangentielle en N.mm^{-2}
 T l'effort tranchant en N
 S la section cisillée en mm^2

Pause récréative : reprenons l'exemple 1 de la poutre sectionnée par la cisaille hydraulique (toujours superbe au demeurant). Le vérin hydraulique 5 imprime un effort $F = 10\,000 \text{ daN}$ sur la poutre de section circulaire de diamètre 50. Déterminons la contrainte dans la section cisillée :

La section cisillée vaut :
$$S = \frac{\pi \times 50^2}{4} \approx 1965 \text{ mm}^2$$

La contrainte tangentielle est alors :
$$\tau = \frac{F}{S} = \frac{100\,000}{1965} \approx 51 \text{ N.mm}^{-2}$$



RESISTANCE DES MATERIAUX

4. Calcul des constructions

On utilise le même raisonnement qu'en traction pour la plupart des constructions, sauf pour le cas où la rupture est recherchée (cas du sectionnement de la poutre par la cisaille par exemple), la contrainte tangentielle τ doit toujours rester inférieure à la contrainte admissible au cisaillement du matériau τ_{adm} ou R_{pg} :

$$\tau = \frac{T}{S} \leq \tau_{adm} \quad \text{ou} \quad R_{pg} \quad \text{avec} \quad \tau_{adm} = R_{pg} = \frac{R_{eg}}{s}$$

avec R_{pg} la résistance pratique au glissement ou au cisaillement en $N.mm^{-2}$

R_{eg} la limite élastique au cisaillement (analogue à R_e) en $N.mm^{-2}$

R_g la limite à la rupture par cisaillement (analogue à R_r) en $N.mm^{-2}$

s le coefficient de sécurité adopté

Remarque : R_{eg} et R_g sont des données obtenues par essais mécaniques sur les matériaux. Pour la plupart des métaux et alliages, en première approximation :

$$R_g \approx \frac{R_r}{2} \quad \text{et} \quad R_{eg} \approx \frac{R_e}{2}$$

Exemple : reprenons l'exemple 2 avec $AB = A'B' = 30 \text{ mm}$ et $BC = B'C' = 100 \text{ mm}$. Si la contrainte admissible au cisaillement dans le joint collé est de 900 kPa , déterminons la charge F maximale supportable :

La section cisailée vaut : $S = 30 \times 100 = 3\,000 \text{ mm}^2$

L'effort tranchant vaut : $T = \frac{F}{2}$

La contrainte de cisaillement s'exprime par : $\tau = \frac{T}{S} = \frac{F}{2S} = \frac{F}{2 \times 3\,000} \leq 0.9 \text{ N.mm}^{-2}$

D'où $F \leq 5\,400 \text{ N}$

5. DEFORMATION – ANGLE DE GLISSEMENT γ

On a déjà vu dans les exemples précédents, que dans le cas du cisaillement, les déformations sont caractérisées par un glissement des sections droites les unes par rapport aux autres. Le glissement est mesuré par l'angle γ appelé angle de glissement (unité : radian).

RESISTANCE DES MATERIAUX

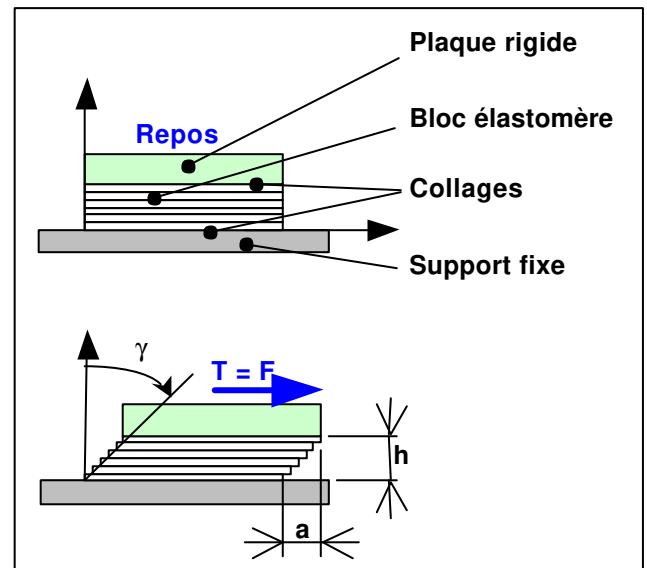
Exemple 1 : un bloc en élastomère est collé entre une plaque rigide et un support fixe. La plaque permet de bien répartir l'effort de cisaillement T sur tout le bloc.

Le cisaillement amène un glissement des sections droites successives les unes par rapport aux autres (analogie avec un jeu de cartes que l'on étale sur une table).

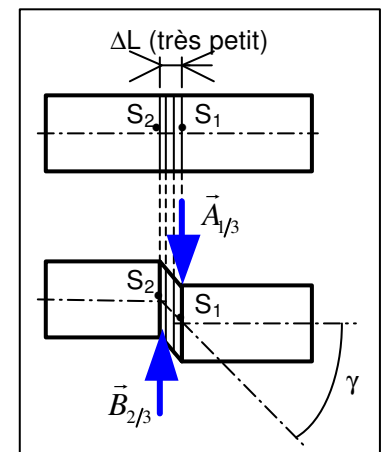
Le glissement peut être caractérisé par l'angle γ , appelé angle de glissement et tel que :

$$\operatorname{tg} \gamma = a/h$$

Si γ est petit : $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = a/h$



Exemple 2 : reprenons le cas de la poutre sectionnée par la cisaille hydraulique. Le glissement de la section droite S_1 par rapport à la section droite S_2 peut être défini par un angle de glissement γ analogue à celui de l'exemple 1 précédent.



Remarque : comme dans le cas de la sollicitation de traction, il existe des déformations élastiques (exemple du bloc élastomère) et des déformations plastiques (exemple de la poutre cisailée).

5.1 Relation entre τ et γ

Lorsque les déformations sont élastiques, la contrainte de cisaillement τ est proportionnelle à l'angle de glissement γ . Autrement dit :

$$\tau = G \gamma$$

avec τ la contrainte tangentielle (en $\text{N} \cdot \text{mm}^{-2}$)
 γ l'angle de glissement (en rad)
 G le module d'élasticité transversale (en $\text{N} \cdot \text{mm}^{-2}$)

Remarque : cette dernière relation est analogue à la loi de Hooke (vu en traction) $\sigma = E \varepsilon$, avec G constante caractéristique du matériau au même titre que le module d'Young E (pour les métaux, $G \approx 0.4 E$).

RESISTANCE DES MATERIAUX

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

avec E le module d'élasticité longitudinale (ou module d'Young en $N.mm^{-2}$)
G le module d'élasticité transversale (ou module de Coulomb en $N.mm^{-2}$)
 ν le coefficient de Poisson (sans unité)

Exemple : reprenons l'exemple du bloc élastomère parallélépipédique ($c \times b \times h$) avec $c = 50$, $b = 100$ mm et $G = 800$ kPa. Déterminons γ si $T = 100$ daN et le décalage a si $h = 25$ mm.

Contrainte de cisaillement τ : $\tau = \frac{T}{S} = \frac{T}{c \times b} = \frac{1000}{50 \times 100} = 0.2 \text{ } N.mm^{-2}$

Angle de glissement γ : $\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{0.2}{0.8} = 0.25 \text{ } rad = 14.3^\circ$

Décalage a : $a = h \tan \gamma = 6.4 \text{ } mm$

Voilà, c'est tout pour aujourd'hui...

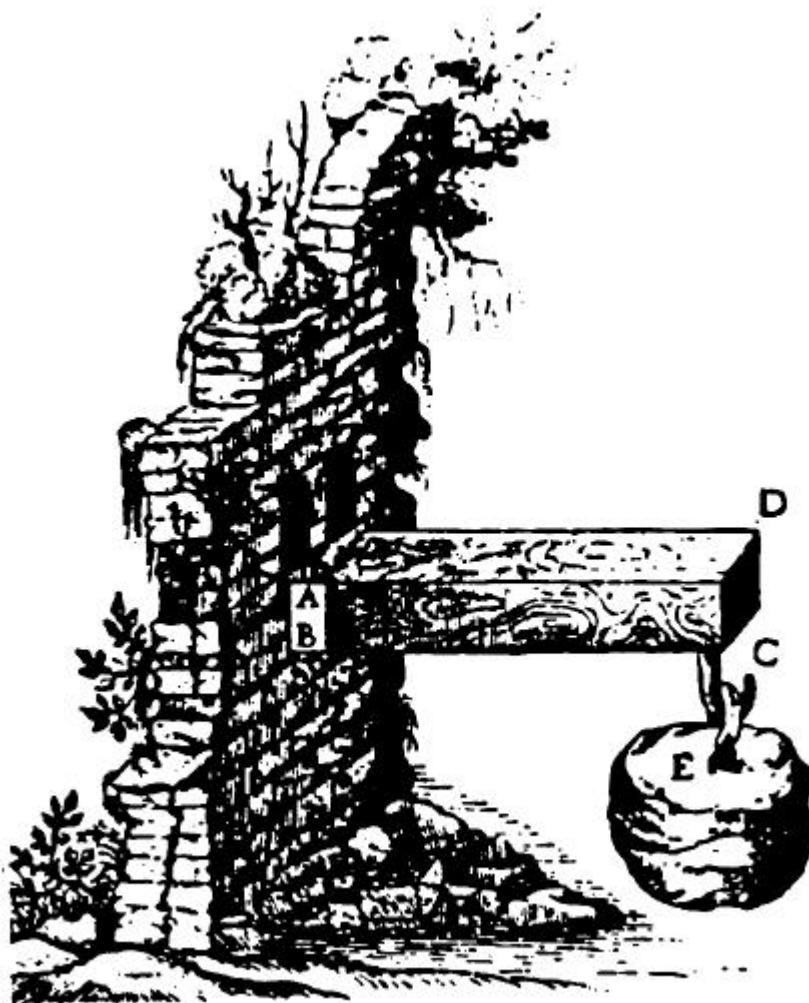


RESISTANCE DES MATERIAUX

RESISTANCE DES MATERIAUX



TORSION



Gravure montrant l'essai d'une poutre en flexion

RESISTANCE DES MATERIAUX

(Extrait de « *Discorsi e dimostrazioni mathematiche* » de Galilée)

RESISTANCE DES MATERIAUX

SOMMAIRE

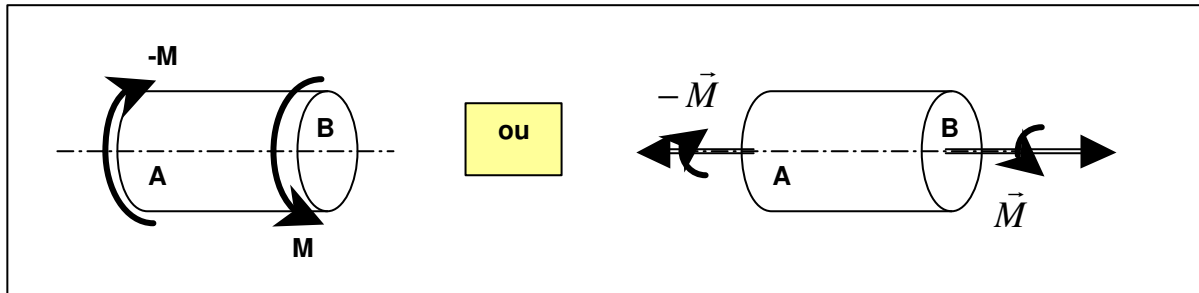
1.	DEFINITION - EXEMPLES	4
2.	DEFORMATIONS – ANGLE DE TORSION θ	5
2.1	CONSTATATIONS EXPERIMENTALES.....	5
2.2	ANGLE UNITAIRE DE TORSION θ	5
3.	EFFORTS INTERIEURS – MOMENT DE TORSION.....	6
4.	CONTRAINTES TANGENTIELLES DE TORSION.....	6
4.1	EXEMPLES DE VALEURS DE G	7
5.	RELATION ENTRE M_T ET θ	8
6.	RELATION ENTRE τ ET M_T	9
7.	CALCUL DES CONSTRUCTIONS	9
8.	CONCENTRATION DE CONTRAINTES	10



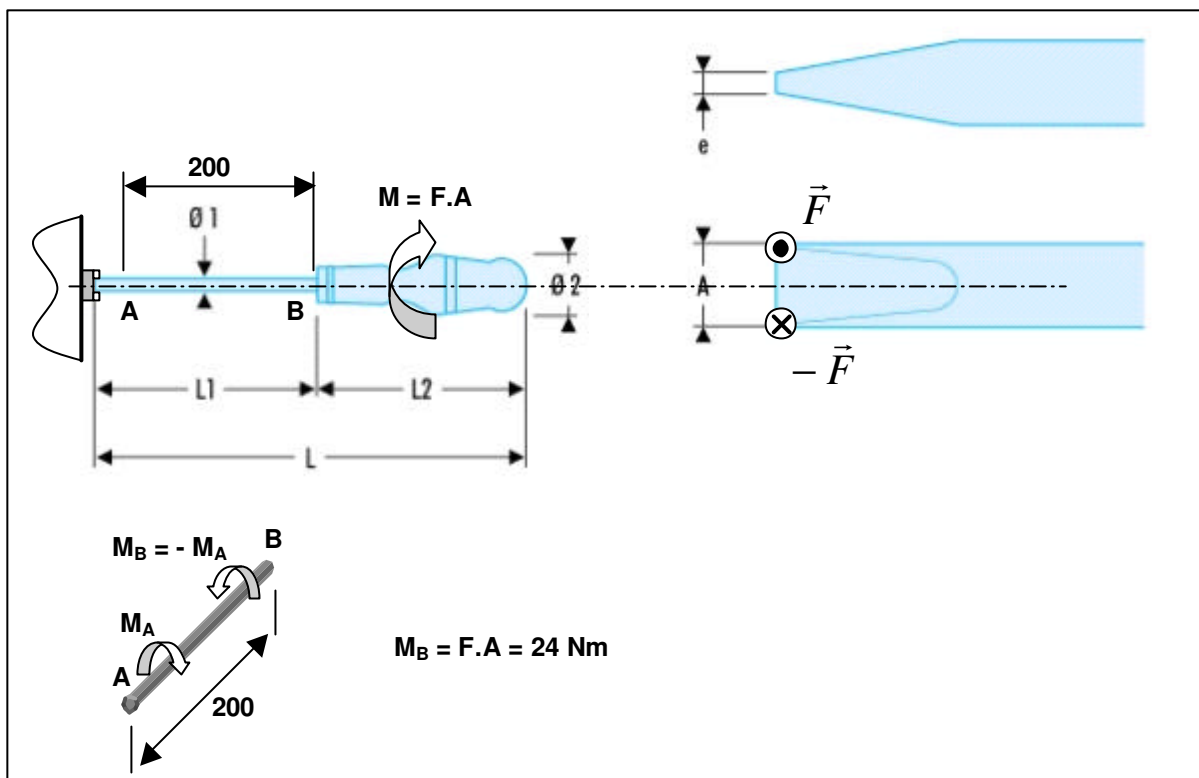
RESISTANCE DES MATERIAUX

1. Définition - Exemples

Une poutre droite est sollicitée en torsion chaque fois que les actions aux extrémités (A et B) se réduisent à deux couples M et $-M$ égaux et opposés d'axe la ligne moyenne L_m .



Exemple : tige de tournevis.



RESISTANCE DES MATERIAUX

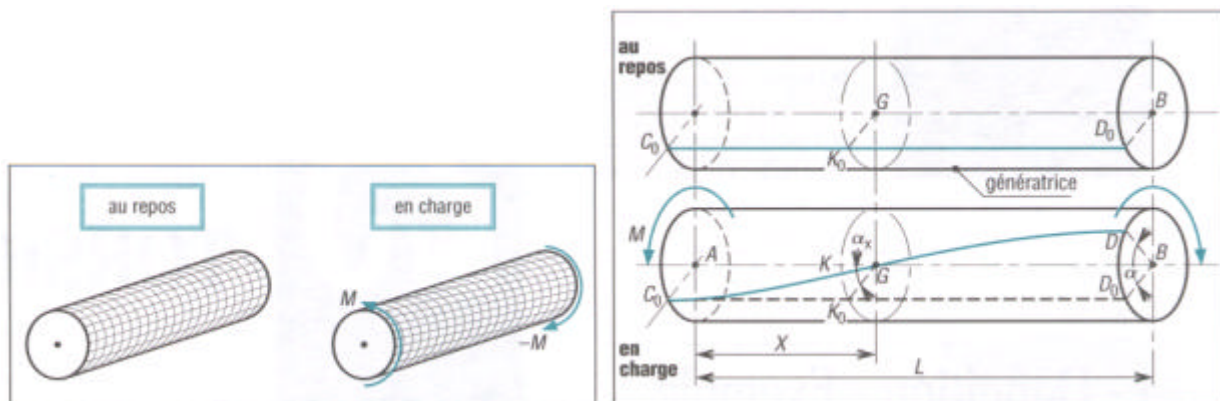
2. Déformations – Angle de torsion θ

2.1 Constatations expérimentales

Les sections droites avant déformation restent droites après déformation (planes et perpendiculaires à la ligne moyenne).

Les fibres ou génératrices initialement parallèles à la ligne moyenne s'enroulent suivant des hélices autour de cet axe. La longueur des fibres restent sensiblement invariable ou constante (hypothèse des petites déformations).

Les sections droites tournent ou glissent en bloc les unes par rapport aux autres (rotations d'axe la ligne moyenne). Les rayons GK restent droits dans le domaine élastique, mais s'incurvent dans le domaine plastique.



α_x = angle (GK_0, GK) = angle de torsion entre les sections droites A et G

α = angle (BD_0, BD) = angle de torsion de la poutre.

2.2 Angle unitaire de torsion θ

Si on suppose que les sections droites tournent toutes entre elles de la même façon, alors l'angle de torsion entre deux sections droites quelconques est proportionnel à la distance entre celles-ci. Autrement dit :

$$\frac{\alpha}{L} = \frac{\alpha_x}{X} = \theta = \text{angle unitaire de torsion}$$

Exemple : reprenons l'exemple du tournevis avec $M = 24 \text{ Nm}$, si l'angle de torsion α_{AB} mesuré entre A et B est égal à 14.6° . Déterminons θ :



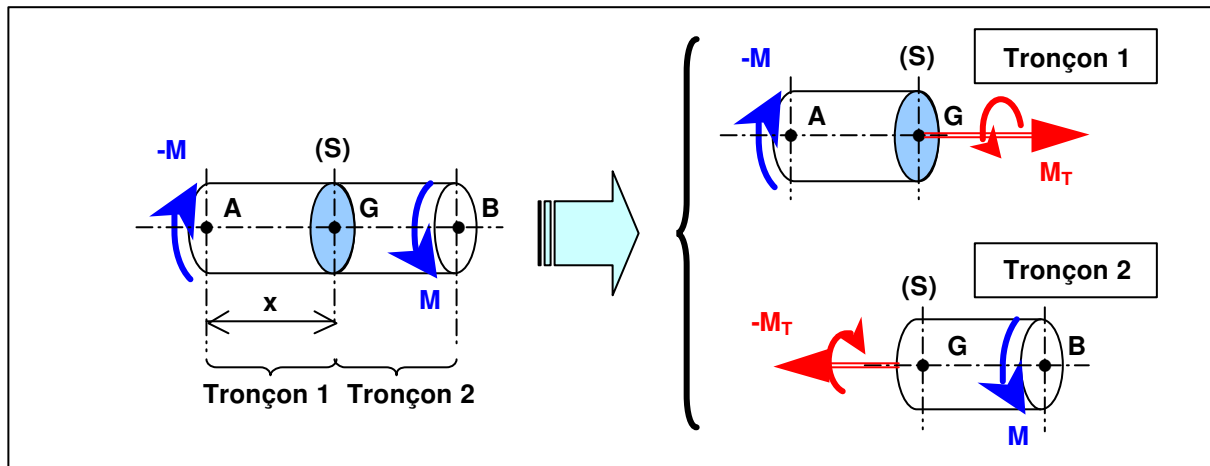
$$\theta = \frac{\alpha_{AB}}{L_{AB}} = \frac{14.6}{200} = 0.073^\circ \cdot \text{mm}^{-1}$$

$$\text{ou encore } \theta = 73^\circ \cdot \text{m}^{-1} = \frac{73\pi}{180} = 1.274 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$$

RESISTANCE DES MATERIAUX

3. Efforts intérieurs – Moment de torsion

La démarche reste la même qu'aux chapitres précédents, on pratique une coupure fictive (S) dans la poutre afin de la diviser en deux tronçons pour faire apparaître et calculer (statique) les efforts intérieurs ou de cohésion (S est une section droite).



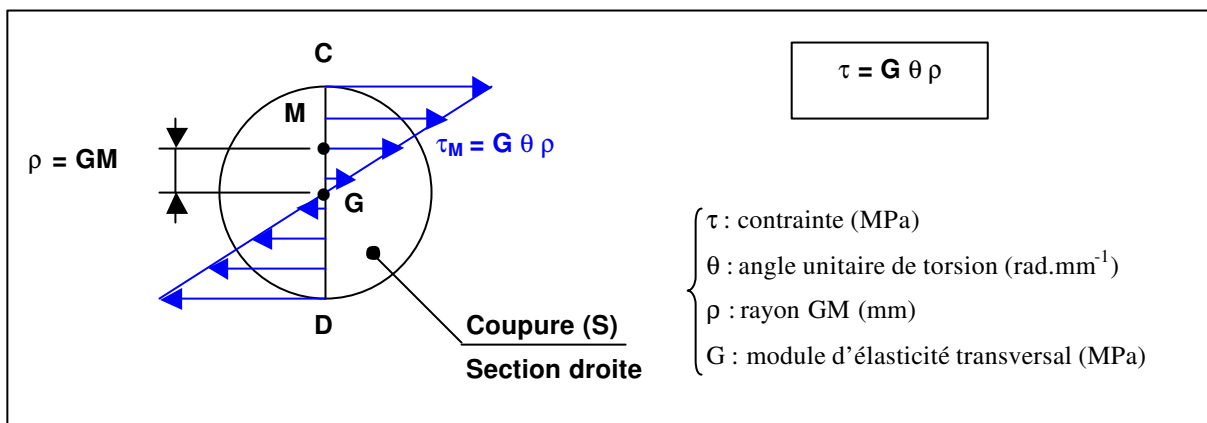
L'étude de l'équilibre de l'un ou l'autre tronçon montre que les actions de cohésion se réduisent à un couple de torsion M_T d'axe la ligne moyenne (x), tel que :

$$M_T = M$$

Remarque : dans le cas de la torsion, tous les autres efforts intérieurs sont nuls ($N = T = M_f = 0$).

4. Contraintes tangentielles de torsion

En torsion, et dans le cas des petites déformations, les contraintes normales σ sont négligeables. Les contraintes dans la coupure (S) se réduisent à des contraintes tangentielles ou de cisaillement τ . A partir de la relation « $\tau = G \gamma$ » obtenue au chapitre « Cisaillement », on montre que la contrainte τ_M , en un point M quelconque de la coupure (S) est proportionnelle à la distance $\rho = GM$, entre le point et la ligne moyenne.



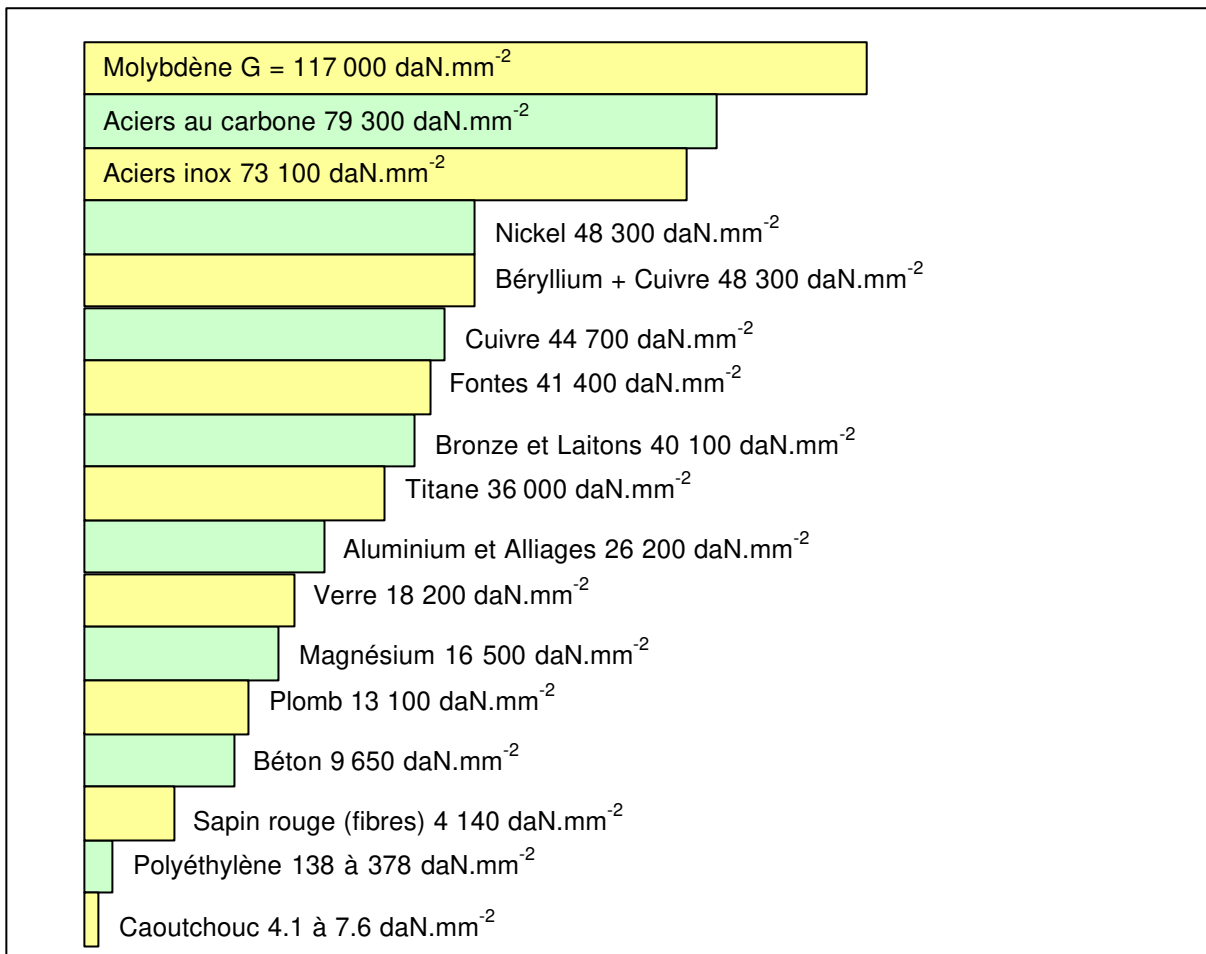
RESISTANCE DES MATERIAUX

Remarque : tous les points situés sur un même cercle de centre G et de rayon ρ ont même contrainte. Les contraintes sont maximales à la périphérie :

$$\tau_{\text{Maxi}} = G \theta R \quad \text{pour} \quad \rho_{\text{Maxi}} = R$$

Pour les métaux : $G \approx 0.4 E$

4.1 Exemples de valeurs de G



Exemple : reprenons le cas de la tige de tournevis, $G = 80 \text{ GPa}$, $\theta = 73^\circ.\text{m}^{-1}$. Déterminons la contrainte de cisaillement maximale dans la tige.



Diamètre de la tige : $d = 7 \text{ mm}$ d'où $\rho_{\text{Maxi}} = 3.5 \text{ mm}$

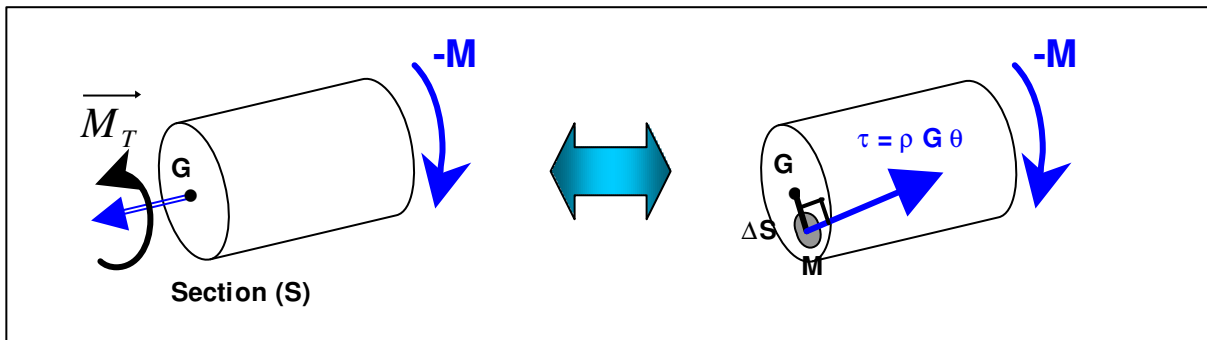
$$\theta = 73^\circ.\text{m}^{-1} = \frac{73\pi}{180} = 1.27 \text{ rad.m}^{-1} = 0.00127 \text{ rad.mm}^{-1}$$

d'où la contrainte $\tau_{\text{Maxi}} = G \theta \rho_{\text{Maxi}} = 80\,000 \times 0.00127 \times 3.5 = 356 \text{ N.mm}^{-2}$

RESISTANCE DES MATERIAUX

5. Relation entre M_T et θ

En chaque point M de la coupure s'exerce, pour l'élément de surface ΔS autour de M , une force élémentaire $\Delta \vec{f} = \vec{\tau} \cdot \Delta S$ dont la direction est perpendiculaire à GM .

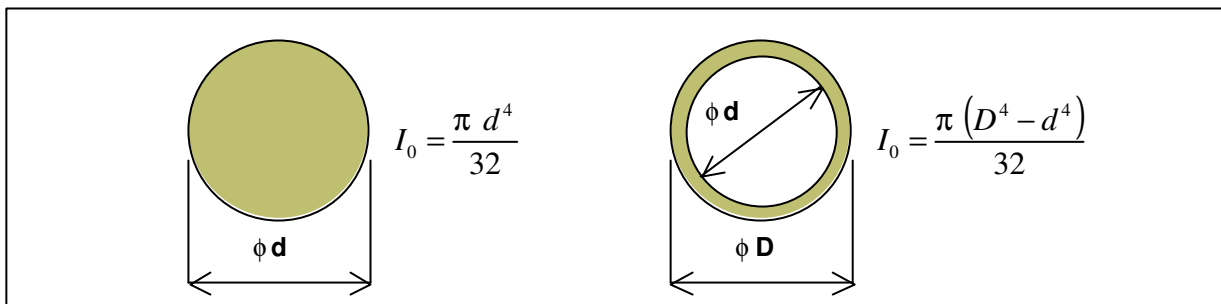


Le moment en G de cette force est $M_G(\Delta \vec{f}) = \Delta f \cdot \rho = \Delta f \cdot \rho$

Le moment de torsion M_T est égal au moment résultant en G de toutes les forces élémentaires $\Delta \vec{f}$ de la section (S).

$$\begin{aligned} M_T &= \sum_{(S)} M_G(\Delta \vec{f}) = \sum_{(S)} \Delta f \cdot \rho = \sum_{(S)} \tau \rho \Delta S = \sum_{(S)} G \theta \rho^2 \Delta S \\ &= G \theta \sum_{(S)} \rho^2 \Delta S = G \theta \int_{(S)} \rho^2 dS \\ &= G \theta I_0 \end{aligned}$$

Le terme $\int_{(S)} \rho^2 dS = I_0$ est le moment polaire de la section (S) par rapport au point G .



L'angle unitaire de torsion θ est proportionnel au moment de torsion M_T : $M_T = G \theta I_0$

avec M_T le moment de torsion (Nmm)
 G le module d'élasticité transversal (MPa)
 θ l'angle unitaire de torsion ($\text{rad} \cdot \text{mm}^{-1}$)
 I_0 le moment polaire par rapport au point G (mm^4)

RESISTANCE DES MATERIAUX

Exemple : reprenons l'exemple du tournevis avec $M_T = 24 \text{ Nm}$, $d = 7 \text{ mm}$ et $G = 80 \text{ GPa}$. Déterminons l'angle unitaire de torsion.



$$\text{Moment polaire de la section droite : } I_0 = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi 7^4}{32} = 235.7 \text{ mm}^4$$

$$\text{Angle unitaire de torsion : } \theta = \frac{M_T}{G I_0} = \frac{24 \cdot 10^3}{80000 \times 235.7} = 0.00127 \text{ rad} \cdot \text{mm}^{-1}$$

6. Relation entre τ et M_T

A partir des relations $\tau = G \theta \rho$ et $M_T = G \theta I_0$ on peut écrire : $G \theta = \frac{\tau}{\rho} = \frac{M_T}{I_0}$

$$\text{On obtient ainsi : } \tau = \frac{M_T}{I_0} \rho$$

avec τ la contrainte de cisaillement (MPa)
 M_T le moment de torsion (Nmm)
 ρ le rayon (mm)
 I_0 le moment polaire (mm^4)

Exemple : reprenons l'exemple du tournevis avec $M_T = 24 \text{ Nm}$, $d = 7 \text{ mm}$. Déterminons la contrainte tangentielle et la contrainte tangentielle maximale.



$$I_0 = 235.7 \text{ mm}^4 \quad \text{et} \quad \tau = \frac{24000}{235.7} \rho = 102 \rho \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

$$\tau_{\text{Maxi}} = 102 \rho_{\text{Maxi}} = 102 \times 3.5 = 356 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$$

7. Calcul des constructions

Sauf pour le cas où la rupture est recherchée, la contrainte tangentielle maximale τ_{Maxi} doit rester inférieure à la résistance pratique au glissement ou au cisaillement R_{pg} du matériau. Autrement dit :

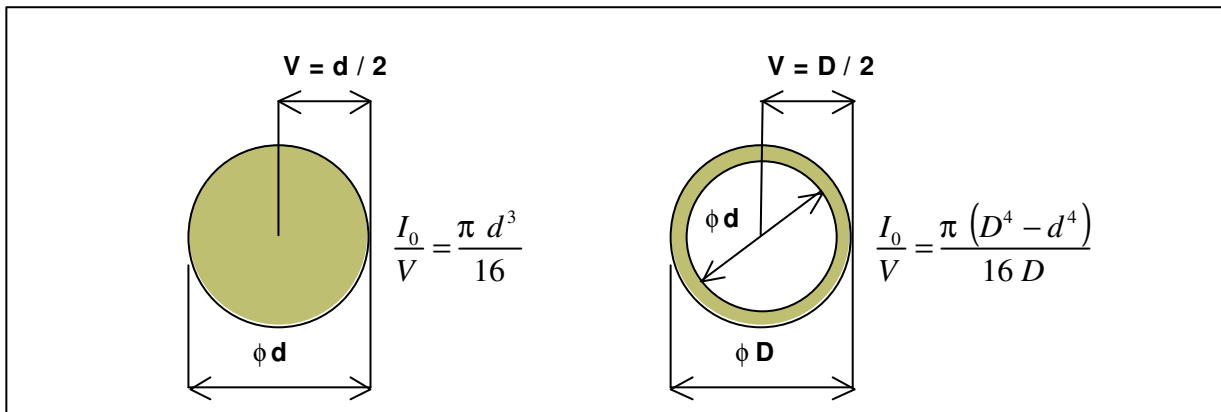
$$\tau_{\text{Maxi}} = \frac{M_T}{I_0} \rho_{\text{Maxi}} = \frac{M_T}{\left(\frac{I_0}{V}\right)} \leq R_{pg} \quad \text{avec} \quad \rho_{\text{Maxi}} = V \quad \text{et} \quad R_{pg} = \frac{R_{e g}}{s}$$

RESISTANCE DES MATERIAUX

avec R_{eg} la limite élastique au cisaillement du matériau (MPa)
 s le coefficient de sécurité

Pour les métaux $R_{eg} \approx \frac{R_e}{2}$

$\frac{I_0}{V}$ est le module de torsion (mm^3)



Exemple : pour le tournevis précédent, on impose une contrainte admissible au cisaillement de 200 MPa. Déterminons la valeur maximale du diamètre d lorsque $M_{T \text{ Maxi}} = 24 \text{ Nm}$.



$$\text{Contrainte tangentielle maximale : } \tau_{\text{Maxi}} = \frac{24000}{\left(\frac{I_0}{V}\right)} = \frac{24000}{\left(\frac{\pi d^3}{16}\right)} \leq R_{pg} = 200 \text{ N.mm}^{-2}$$

d'où on tire $d \geq 8.5 \text{ mm}$

8. Concentration de contraintes

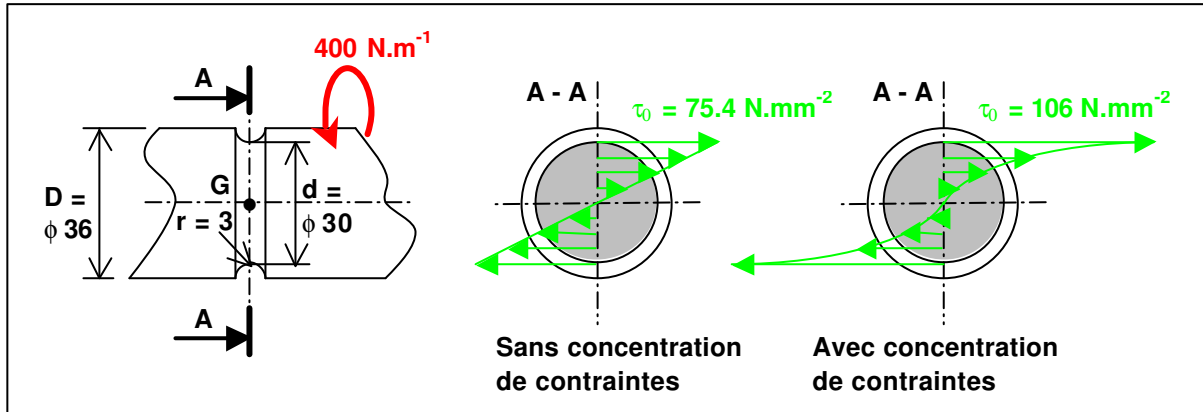
Lorsque les arbres étudiés présentent de brusques variations de section (gorge, épaulement, trou de perçage..), les relations précédentes ne sont plus applicables. Au voisinage du changement de section, la répartition des contraintes est modifiée, τ_{Maxi} est supérieure à τ calculée : on dit alors qu'il y a concentration de contraintes.

Si K_{ts} est le coefficient de concentration de contraintes :

$$\tau_{\text{Maxi}} = K_{ts} \cdot \tau_0 \quad \text{avec} \quad \tau_0 = \frac{M_T}{\left(\frac{I_0}{V}\right)}$$

RESISTANCE DES MATERIAUX

Exemple : déterminons la contrainte au fond d'une gorge d'un arbre de transmission soumis à un couple de torsion de 400 Nm.

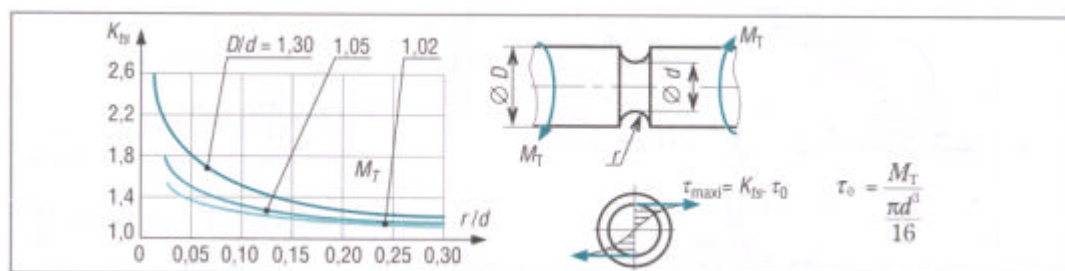
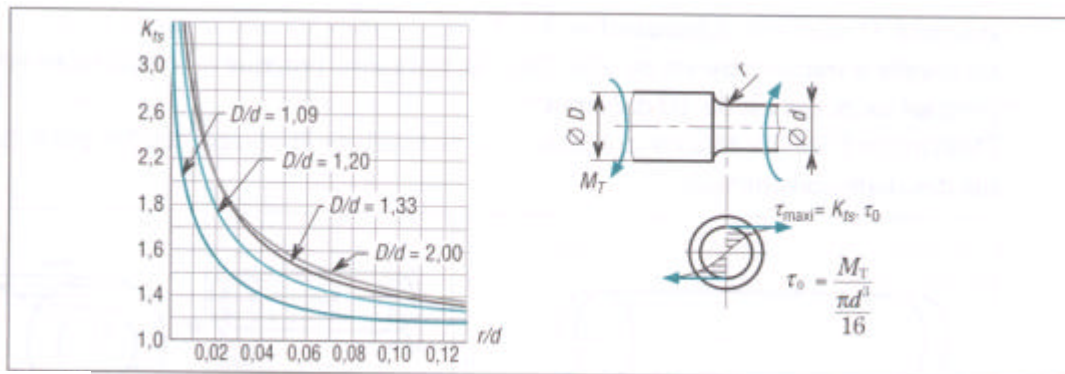


Déterminons K_{ts} : $\frac{r}{d} = \frac{3}{30} = 0.1$ et $\frac{D}{d} = \frac{36}{30} = 1.2$

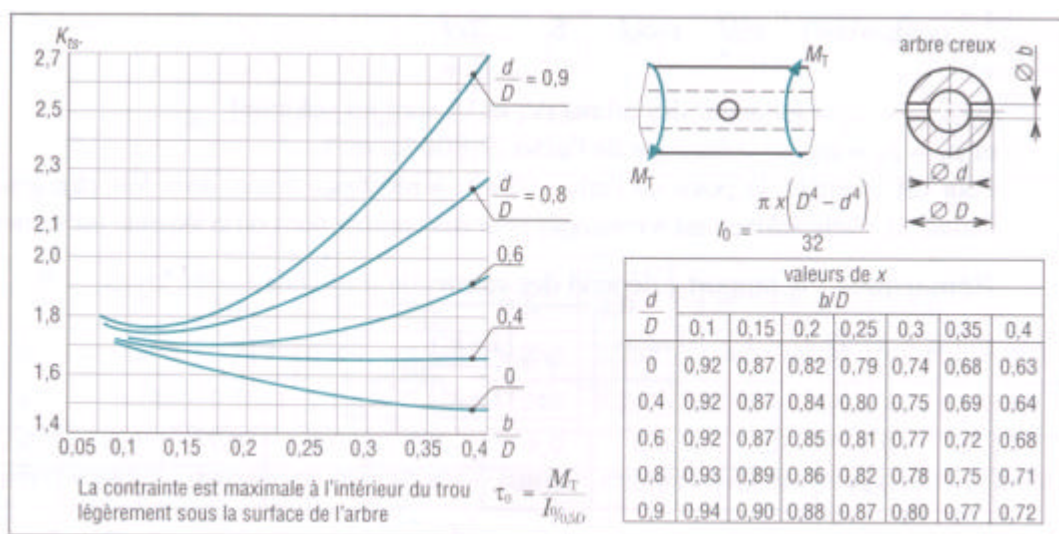
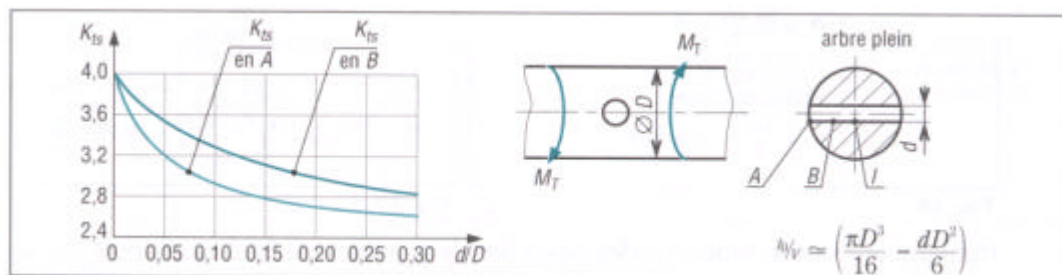
Le tableau qui va bien nous donne alors $K_{ts} \approx 1.4$

Contrainte $\tau_0 = \frac{M_T}{\left(\frac{I_0}{V}\right)} = \frac{M_T \times 16}{\pi d^3} = \frac{400000 \times 16}{\pi 30^3} = 75.45 \text{ N.mm}^{-2}$

Contrainte maximale $\tau_{Maxi} = K_{ts} \cdot \tau_0 = 1.4 \times 75.45 = 105.63 \text{ N.mm}^{-2}$



RESISTANCE DES MATERIAUX



Voilà, c'est tout pour aujourd'hui...

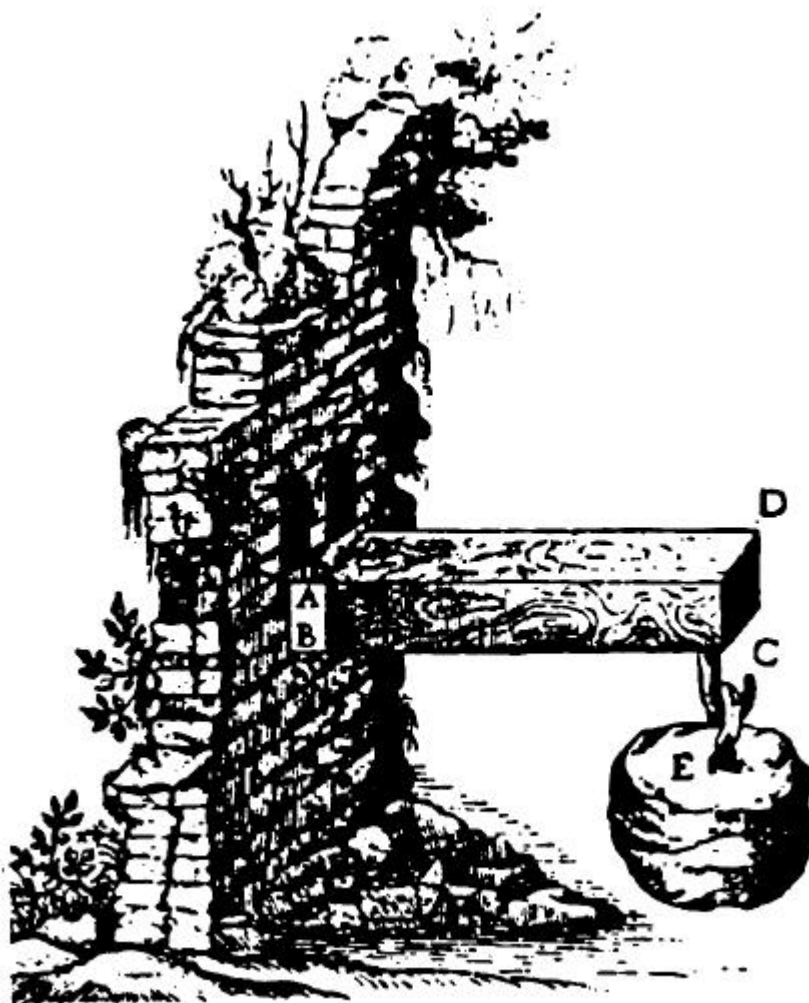


RESISTANCE DES MATERIAUX

RESISTANCE DES MATERIAUX



FLEXION



Gravure montrant l'essai d'une poutre en flexion

RESISTANCE DES MATERIAUX

(Extrait de « *Discorsi e dimostrazioni mathematiche* » de Galilée)

RESISTANCE DES MATERIAUX

SOMMAIRE

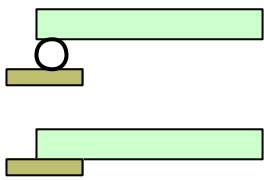
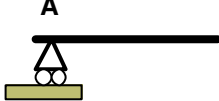
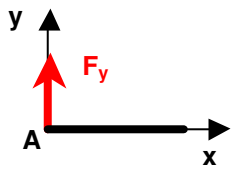
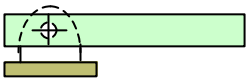
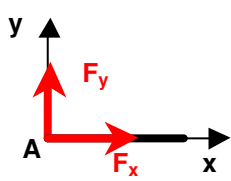
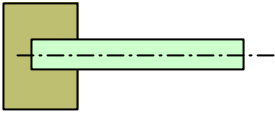
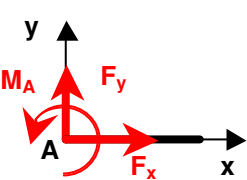
1. SCHEMATISATION DES LIAISONS	4
2. EFFORTS INTERIEURS	6
3. DIAGRAMMES	6
3.1 ESSAI DE FLEXION	7
3.2 CORRESPONDANCE ENTRE LES DIAGRAMMES	8
3.3 POUTRE ENCASTREE	9
4. CHARGES REPARTIES	10
4.1 CHARGE REPARTIE UNIFORME	10
4.2 CHARGE REPARTIE LINEAIREMENT VARIABLE	11
5. CONTRAINTES DE FLEXION	12
5.1 CONTRAINTES NORMALES EN FLEXION	12
5.2 CALCUL DES CONSTRUCTIONS	13
5.3 CONCENTRATION DE CONTRAINTES EN FLEXION	15
5.4 CONTRAINTES DE CISAILLEMENT EN FLEXION	17
5.4.1 <i>Mise en évidence</i>	17
5.4.2 <i>Cas des poutres rectangulaires</i>	17
5.4.3 <i>Cas des poutres circulaires</i>	18
5.4.4 <i>Exemple</i>	18
6. DEFORMATIONS EN FLEXION	19
6.1 NOTION DE DEFORMEE	19
6.2 METHODE PAR INTEGRATION	20
6.2.1 <i>Principe</i>	20
6.2.2 <i>Exemple</i>	20



RESISTANCE DES MATERIAUX

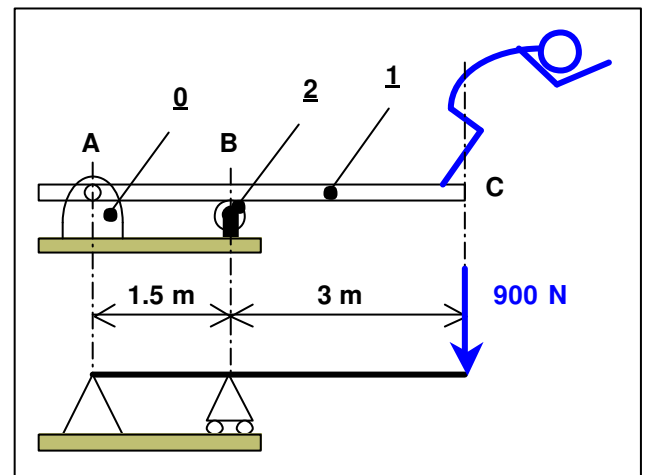
1. Schématisation des liaisons

Dans le cas des problèmes plans (systèmes de forces coplanaires), la schématisation des liaisons et des efforts exercés se ramène à trois cas types : appui simple (ponctuel ou plan sans frottement), articulation (pivot) et encastrement.

TYPE	EXEMPLES	SCHEMATISATION	ACTIONS EXERCEES
Appui simple			
Pivot			
Encastrement			

Exemple : planche de plongeur

La poutre 1 est schématisée par sa ligne moyenne AC. La liaison en A (pivot 1/0) est une articulation et la liaison en B entre 1 et 2 se ramène à un appui simple. $\vec{P}$ (900 N) schématise l'action du nageur.



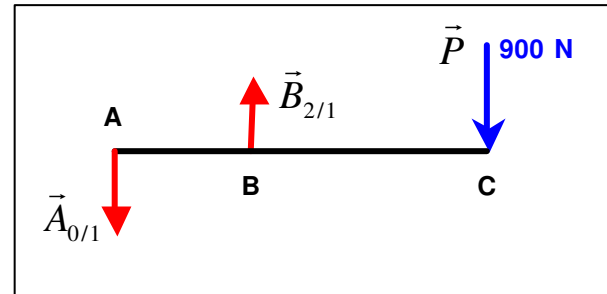
RESISTANCE DES MATERIAUX

A l'équilibre (Principe Fondamental de la Statique), si on isole 1 :

$$\begin{cases} \vec{A}_{0/1} + \vec{B}_{2/1} + \vec{P} = \vec{0} \\ M_A(\vec{A}_{0/1}) + M_A(\vec{B}_{2/1}) + M_A(\vec{P}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -A_{0/1} + B_{2/1} - 900 = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{0/1} \times 0 + B_{2/1} \times 1.5 - 900 \times 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

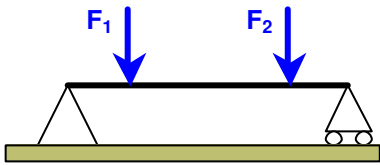
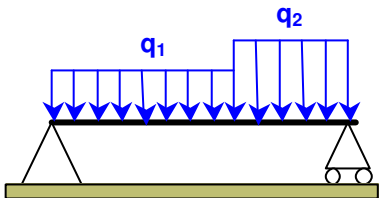
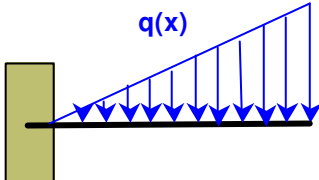


L'équation (2) donne $B_{2/1} = 2700 \text{ N}$ (et orientée effectivement comme sur le schéma, vers le haut).

En injectant $B_{2/1} = 2700 \text{ N}$ dans (1), on trouve $A_{0/1} = 1800 \text{ N}$ (orientée effectivement comme sur le schéma, vers le bas).

Remarque 1 : dans la plupart des schématisations, la poutre est modélisée par sa ligne moyenne.

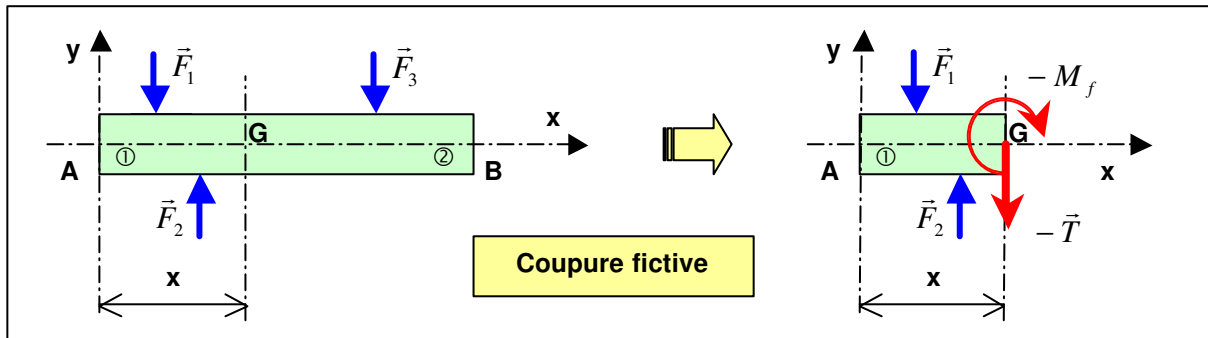
Remarque 2 : les poutres sont identifiées à partir des charges extérieures appliquées :

Poutre simple sur deux appuis avec charges concentrées F_1 et F_2	
Poutre simple sur deux appuis avec charges réparties q_1 et q_2	
Poutre encastree avec charge répartie $q(x)$ linéairement croissante	

RESISTANCE DES MATERIAUX

2. Efforts intérieurs

Dans le cas de la flexion, les efforts intérieurs dans n'importe quelle section droite se réduisent à un effort tranchant T (perpendiculaire à la ligne moyenne) et à un moment fléchissant M (perpendiculaire à la ligne moyenne et à T).



Pour faire apparaître les efforts intérieurs, on effectue une coupure fictive à la distance x de l'origine A. En isolant le tronçon 1, on obtient l'effort tranchant T et le moment fléchissant M_f (on obtient en fait respectivement $-T$ et $-M_f$, voir Cours « Torseur de Cohésion »).

$\vec{T}$ = somme vectorielle de toutes les forces extérieures transversales situées à gauche de la section fictive = $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$

M_f = moment résultant en G de toutes les actions extérieures situées à gauche de la section fictive = $M_G(\vec{F}_1) + M_G(\vec{F}_2)$

Remarque : le cas $M_f \neq 0$ avec $T = 0$ correspond à de la flexion pure, alors que le cas $M_f \neq 0$ avec $T \neq 0$ correspond à de la flexion simple.

3. Diagrammes

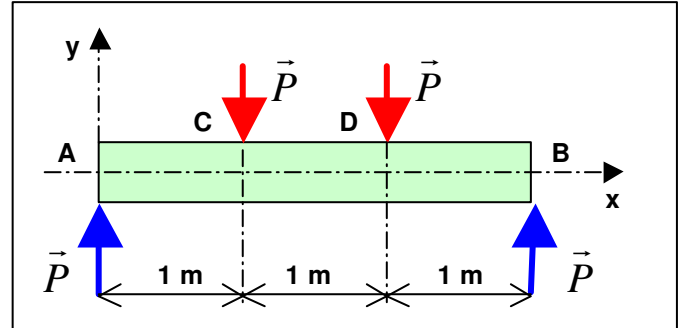
Les valeurs de l'effort tranchant T et du moment fléchissant M_f varient avec la position x de la coupure fictive. Les diagrammes de t et M_f (graphes mathématiques de type (x, y)) permettent de décrire les variations de ces deux grandeurs et ainsi repérer les maximums à prendre en compte lors des calculs des contraintes.

RESISTANCE DES MATERIAUX

3.1 Essai de flexion

Un dispositif de mise en charge exerce une poussée de 20 000 N qui se répartit en C et D, alors que le bâti de la machine supporte la poutre en A et B.

La symétrie du chargement et des appuis entraîne $A = B = C = D = P = 10\,000\text{ N}$, le poids de la poutre étant négligé.



❖ Etude du tronçon AC : section fictive d'abscisse $0 \leq x \leq 1\text{ m}$

Une seule force à gauche de la section fictive : $\vec{P}$ au point A

Effort tranchant $T_{AC} = P = 10\,000\text{ N}$ pour tout $0 \leq x \leq 1\text{ m}$

Moment fléchissant $M_{fAC} = -P \times x = -10\,000 x\text{ Nm}$

❖ Etude du tronçon CD : section fictive d'abscisse $1 \leq x \leq 2\text{ m}$

Deux forces à gauche de la section fictive : $\vec{P}$ au point A, et $-\vec{P}$ au point C

Effort tranchant $T_{CD} = P - P = 0\text{ N}$ pour tout $1 \leq x \leq 2\text{ m}$

Moment fléchissant $M_{fCD} = -P \times x + P \times (x - 1) = -P = -10\,000\text{ Nm}$

Remarque : sur ce tronçon $M_f \neq 0$ et $T = 0$, on est dans un cas de flexion pure.

❖ Etude du tronçon DB : section fictive d'abscisse $2 \leq x \leq 3\text{ m}$

Trois forces à gauche de la section fictive : $\vec{P}$ en A, et $-\vec{P}$ aux points C et D

Effort tranchant $T_{DB} = P - P - P = -10\,000\text{ N}$ pour tout $2 \leq x \leq 3\text{ m}$

Moment fléchissant $M_{fDB} = -P \times x + P \times (x - 1) + P \times (x - 2) = -P = 10\,000 (x - 3)\text{ Nm}$

RESISTANCE DES MATERIAUX

❖ Diagrammes : rassemblons les trois résultats précédents sur un même graphe :

Diagramme des efforts tranchants :

$$T_{AC} = 10000 \text{ N pour } 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

$$T_{CD} = 0 \text{ N pour } 1 \leq x \leq 2 \text{ m}$$

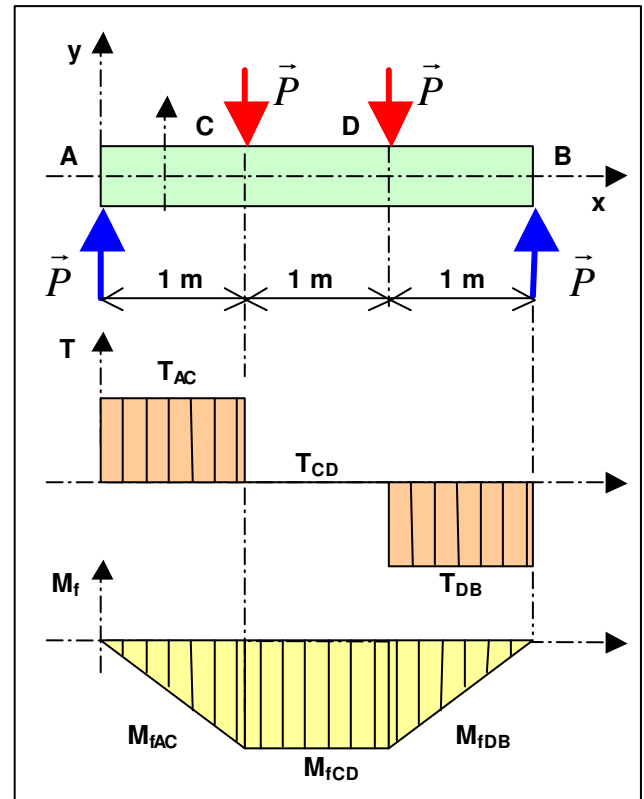
$$T_{DB} = -10000 \text{ N pour } 2 \leq x \leq 3 \text{ m}$$

Diagramme des moments fléchissants :

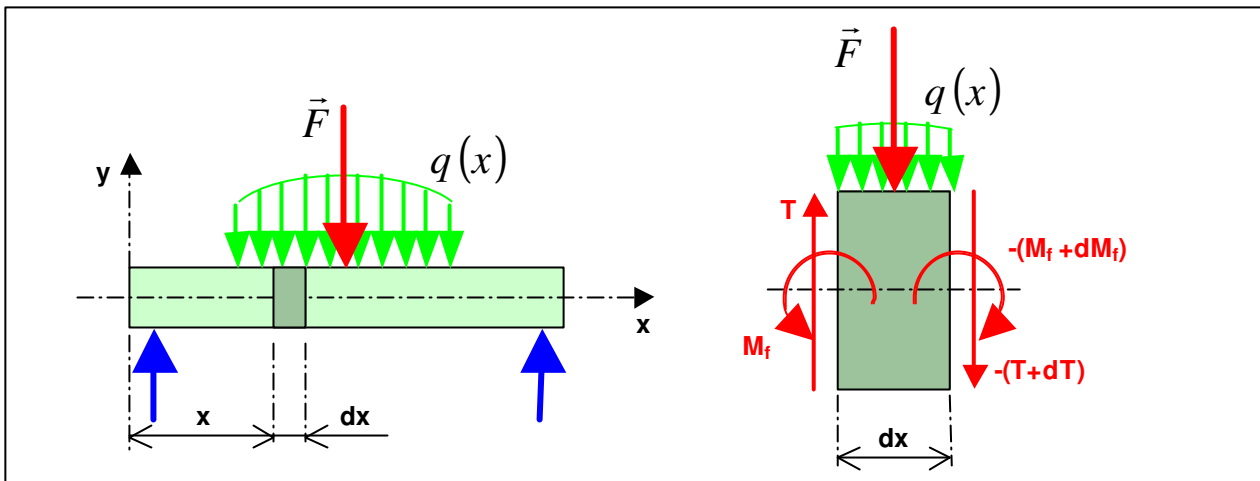
$$M_{fAC} = -10000 x \text{ Nm pour } 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

$$M_{fCD} = -10000 \text{ Nm pour } 1 \leq x \leq 2 \text{ m}$$

$$M_{fDB} = 10000 (x - 3) \text{ Nm pour } 2 \leq x \leq 3 \text{ m}$$



3.2 Correspondance entre les diagrammes



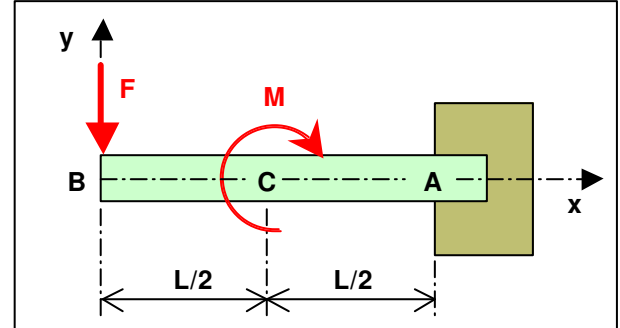
L'étude de l'équilibre du tronçon de largeur dx appartenant à la poutre, compte tenu des charges indiquées, donne :

$$\frac{dT}{dx} = -q(x) \quad \text{et} \quad \frac{dM_f}{dx} = -T$$

RESISTANCE DES MATERIAUX

3.3 Poutre encastrée

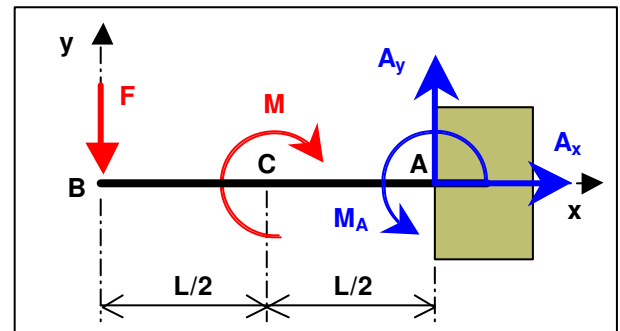
On considère une poutre encastrée de longueur $L = 2 \text{ m}$ soumise à un effort concentré $F = 1000 \text{ N}$ (vers le bas) au point B et à un couple pur $M = 1000 \text{ Nm}$ (sens anti-trigonométrique) autour du point C.



❖ Actions exercées par l'encastrement sur la poutre : le Principe Fondamental de la Statique donne :

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{A} = \vec{0} \\ M_A(\vec{F}) + M_A(\vec{A}) - M + M_A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_x = 0 \\ A_y - 1000 = 0 \\ 1000 \times 2 - M + M_A = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = 1000 \text{ N} \\ M_A = -1000 \text{ Nm} \end{cases}$$



❖ Etude du tronçon BC : $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$

Effort tranchant :

$$T_{BC} = -F = -1000 \text{ N}$$

Moment fléchissant :

$$M_{fBC} = F \times x = 1000 x \text{ Nm}$$

❖ Etude du tronçon CA : $1 \leq x \leq 2 \text{ m}$

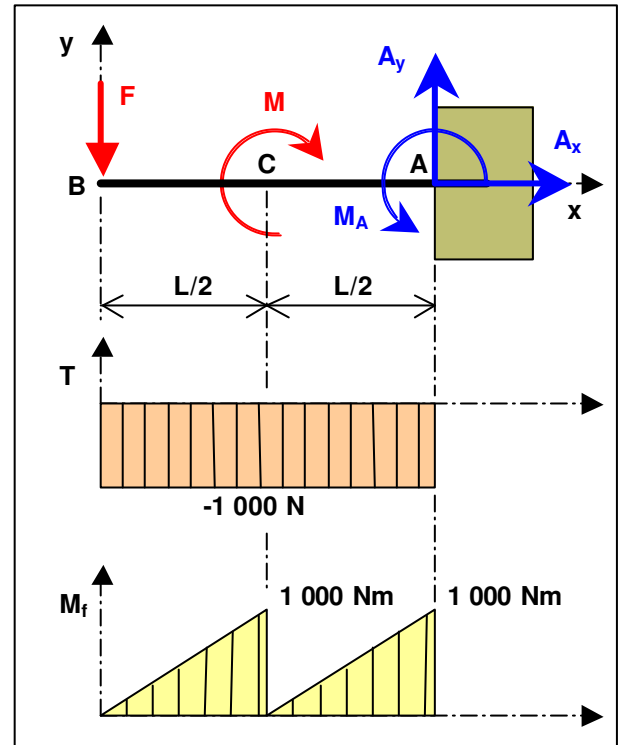
Effort tranchant :

$$T_{CA} = -F = -1000 \text{ N}$$

Moment fléchissant :

$$M_{fCA} = F \times x - M = 1000(x - 1) \text{ Nm}$$

❖ Diagrammes : ci-contre.



RESISTANCE DES MATERIAUX

4. Charges réparties

Les charges réparties ont pour origine les actions de pesanteur et des actions de contact diverses (vent, neige, pression d'un fluide...). Elles peuvent être uniformes ou variables.

4.1 Charge répartie uniforme

Traisons ce cas à partir d'un exemple. Considérons une poutre (longueur $L = 4$ m) réalisée à partir d'un profilé IPE dont le poids est de 40 daN par mètre ($\vec{q} = -400 \vec{y}$ ou $q = 400 \text{ N.m}^{-1}$).

❖ Actions aux appuis en A et B :

Le Principe Fondamental de la Statique donne : $\vec{A} + \vec{B} + \vec{q} = \vec{0}$

En projection sur y : $A_y + B_y - qL = 0$ avec $A_y = B_y$ du fait de la symétrie.

$$\text{D'où } A_y = B_y = \frac{qL}{2} = \frac{400 \times 4}{2} = 800 \text{ N}$$

❖ Effort tranchant :

$$T_{AB} = A_y - qx = 400(2 - x)$$

❖ Moment fléchissant :

$$M_{fAB} = -A_y \times x + q \times x \times \frac{x}{2} = 200x(x - 4)$$

❖ Diagrammes : ci-contre.

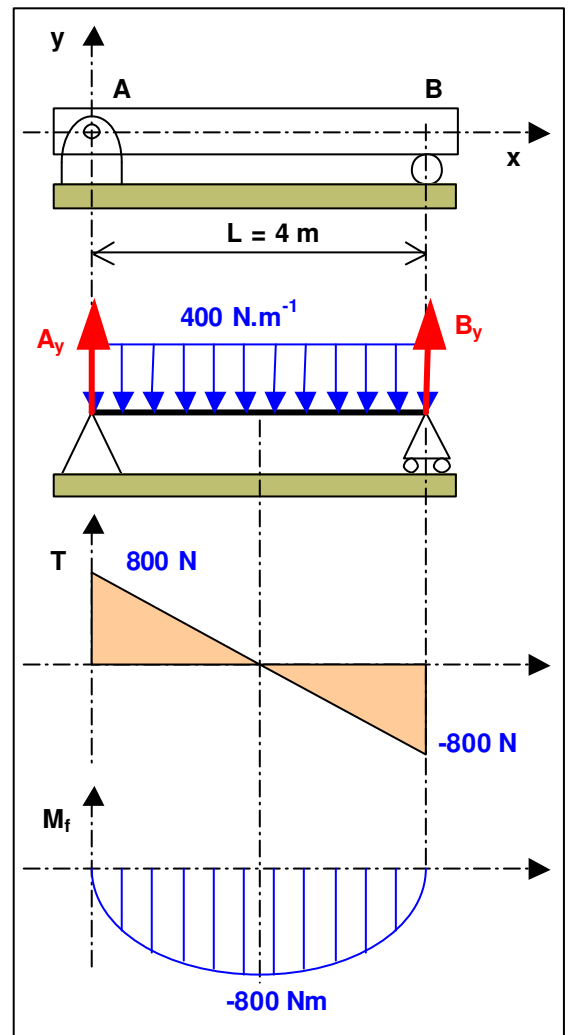
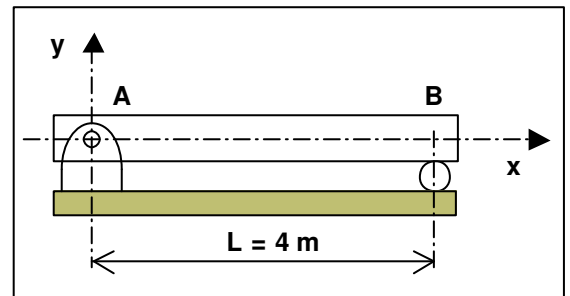
❖ Remarque : calcul de l'extrémum

$$\frac{dM_{fAB}}{dx} = \frac{d[200x(x - 4)]}{dx} = 400(x - 2)$$

s'annule pour $400(x - 2) = 0$ soit $x = 2$

et la valeur maxi du moment fléchissant est alors (pour $x = 2$) :

$$M_{fABMaxi} = 200 \times 2(2 - 4) = -800 \text{ Nm}$$



RESISTANCE DES MATERIAUX

4.2 Charge répartie linéairement variable

Nous allons également traiter ce cas à partir d'un exemple. Prenons le cas d'une poutre (longueur $L = 3$ m) encastree en A, supportant la charge linéairement croissante $q(x)$ de la figure ci-contre.

❖ Charge répartie : $\frac{q(x)}{x} = \frac{q_A}{L}$

d'où $q(x) = \frac{q_A}{L} x = \frac{1500}{3} x = 500 x \text{ Nm}$

❖ Action à l'encastrement : Principe Fondamental de la Statique :

$$\begin{cases} \vec{R} + \vec{A} = \vec{0} \\ M_A(\vec{R}) + M_A(\vec{A}) = 0 \end{cases}$$

où $\vec{R}$ est la résultante de la charge répartie $q(x)$ sur toute la longueur L :

$$R = \frac{1500 \times 3}{2} = 2250 \text{ N (aire du triangle)}$$

Cette résultante s'applique au « centre de gravité du triangle », c'est-à-dire à la distance $L/3$ du point A.

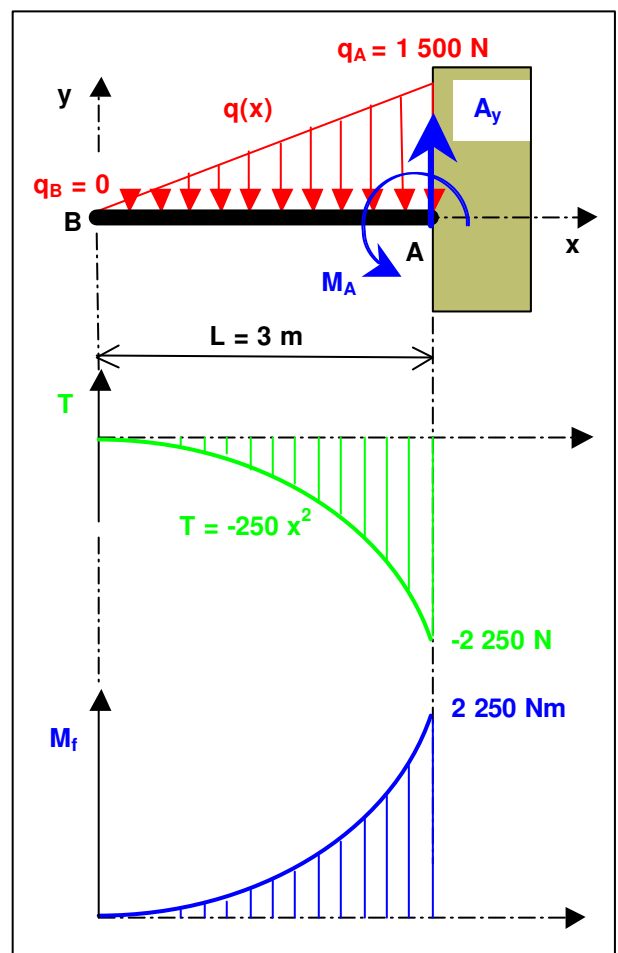
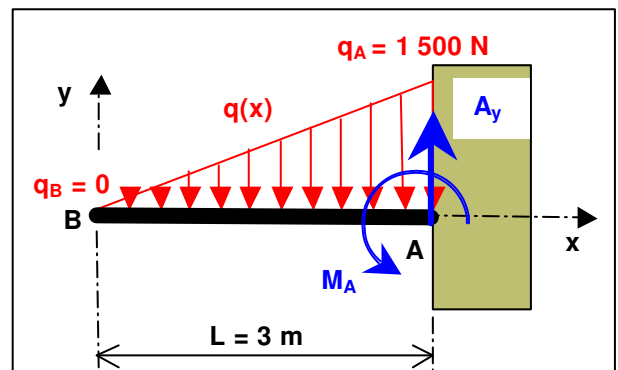
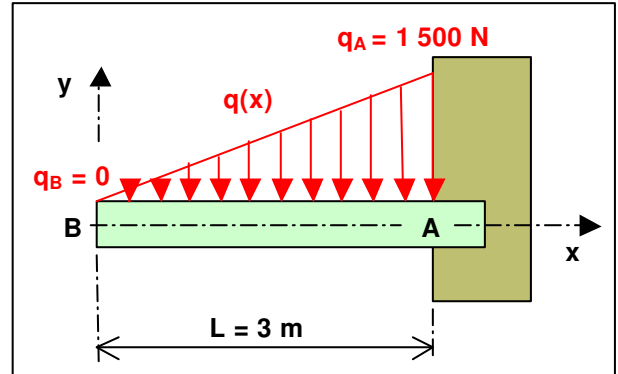
On a donc $\begin{cases} A_y - R = 0 \\ R \times \frac{L}{3} + M_A = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} A_y = R = 2250 \text{ N} \\ M_A = -R \times \frac{L}{3} = -2250 \times \frac{3}{3} = -2250 \text{ Nm} \end{cases}$$

❖ Effort tranchant :

$$T_{BA} = -\frac{500 x \times x}{2} = -250 x^2 \text{ N (triangle)}$$

❖ Moment fléchissant :



RESISTANCE DES MATERIAUX

$$M_{fBA} = -\frac{500 \times x \times x}{2} \times \frac{x}{3} = -\frac{250}{3} x^3 \text{ Nm}$$

❖ Diagrammes : y a qu'à chercher, ils doivent bien traîner par là...

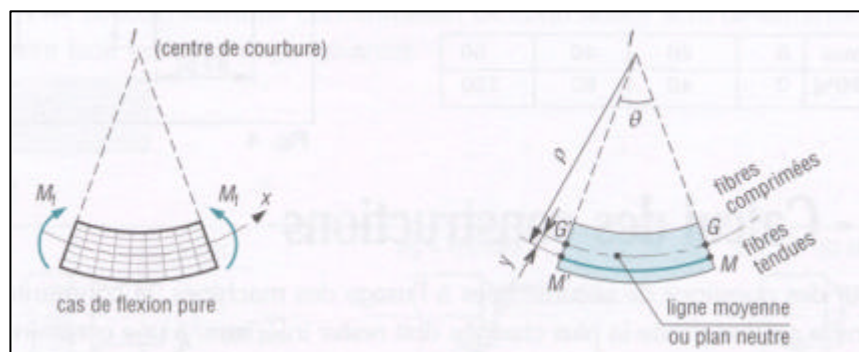
5. Contraintes de flexion

En flexion, les contraintes normales σ sont généralement prépondérantes devant les contraintes de cisaillement τ .

5.1 Contraintes normales en flexion

Les contraintes normales résultent du moment fléchissant M_f (les efforts tranchants n'ont aucun effet sur leur valeur).

Dans le cas de flexion pure ($M_f \neq 0$ et $T = 0$), les poutres se déforment suivant des arcs de cercles.



La ligne moyenne GG' ne subit ni allongement ni raccourcissement (contraintes σ nulles).

Pour la figure proposée, les fibres situées au-dessus de la ligne neutre sont comprimées et supportent des contraintes de compression ; celles situées au-dessous (MM') sont tendues et supportent des contraintes de traction.

En exprimant l'allongement de la fibre MM', en utilisant la loi de Hooke ($\sigma = E \varepsilon$) et en faisant intervenir le moment fléchissant M_f , on montre la relation suivante :

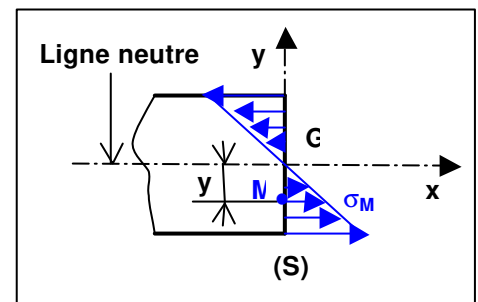
$$\sigma_M = \frac{M_f}{I_z} y$$

avec σ_M la contrainte normale en M (en MPa)

M_f le moment fléchissant dans la section droite S (en Nmm)

y la distance du point M par rapport à la ligne neutre (en mm)

I_z le moment quadratique de la section droite S par rapport à l'axe (G, z) (en mm⁴)

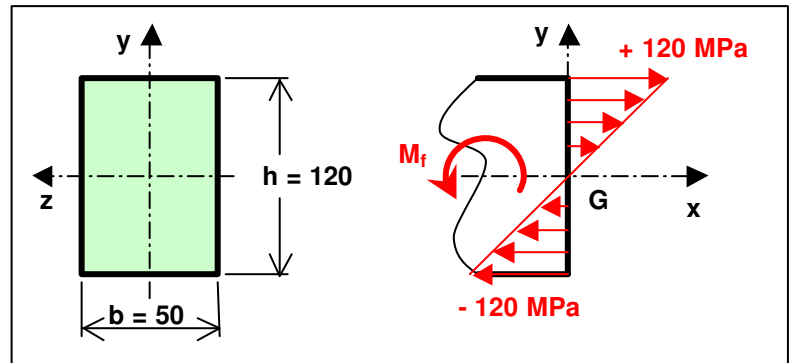


RESISTANCE DES MATERIAUX

Exemple : déterminons les contraintes normales dans une poutre rectangulaire (50 mm / 120 mm), soumise à un moment fléchissant de 14.4 kNm constant sur toute sa longueur.

Moment quadratique :

$$I_z = \frac{b h^3}{12} = \frac{50 \times 120^3}{12} = 72.10^6 \text{ mm}^4$$



Contraintes : $\sigma = \frac{M_f}{I_z} y = \frac{14\,400\,000}{72.10^6} y = 2 y \text{ MPa}$

Les contraintes augmentent donc linéairement avec la distance à la ligne neutre.

y (mm)	0	20	40	60
σ (MPa)	0	40	80	120

5.2 Calcul des constructions

Pour des questions de sécurité liées à l'usage des machines, la contrainte normale σ_{Maxi} dans la section droite la plus chargée doit rester inférieure à une contrainte limite admissible liée au matériau et fixée par le constructeur ou par des normes : R_{pe} .

Dans le cas précis de la flexion, il faut donc procéder ainsi :

- ❖ commencer par déterminer la section la plus chargée (en général celle où le moment fléchissant est maximum) ;
- ❖ puis vérifier que la contrainte maximale dans cette section est inférieure à la contrainte admissible R_{pe} imposée par le constructeur.

$$\sigma_{\text{Maxi}} = \frac{M_{f \text{ Maxi}}}{(I_z/V)} \leq R_{pe}$$

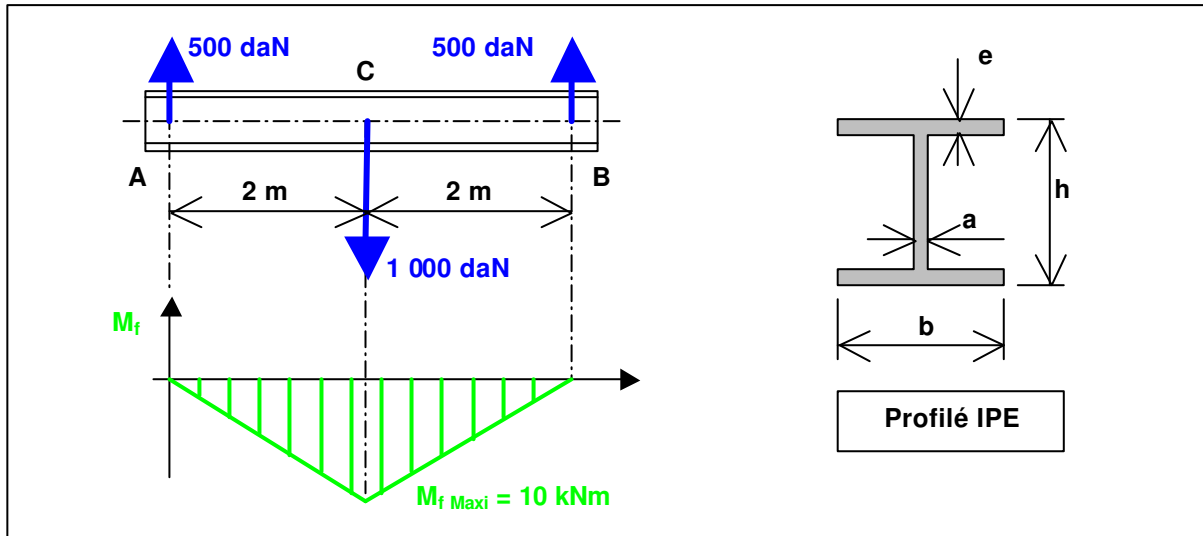
avec $V = y_{\text{Maxi}}$

I_z/V le module de flexion

R_{pe} la résistance pratique (rappel : $R_{pe} = R_e/s$ avec R_e la limite élastique et s le coefficient de sécurité adopté)

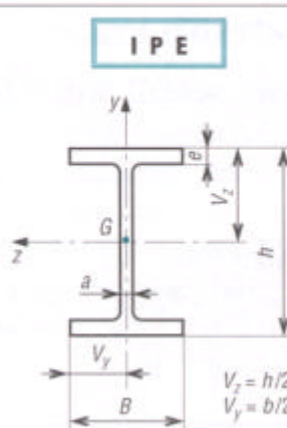
Exemple : une poutre de pont roulant (profilé I PE) est soumise aux charges indiquées sur la figure ci-dessous (cas le plus défavorable). Le moment fléchissant maximum est obtenu au milieu de la poutre et a pour valeur 110 kNm (vous auriez pu le déterminer facilement, mais là n'est pas le problème). Si on impose une contrainte admissible de 100 MPa, déterminons le profilé pouvant convenir pour construire l'appareil.

RESISTANCE DES MATERIAUX



On doit avoir $\sigma_{Maxi} = \frac{M_{f\ Maxi}}{(I_z/V)} = \frac{10\ 000\ 000}{(I_z/V)} \leq 100\ MPa$

D'où $(I_z/V) \geq 100\ 000\ mm^3 = 100\ cm^3$

	(mm)							$I_z\ (cm^4)$	$I_z/V_z\ (cm^3)$	$I_y\ (cm^4)$	$I_y/V_y\ (cm^3)$
	r	c	e	e	ξ	m					
 IPE	80	80	46	3,8	5,2	7,64	6,0	80,1	20,0	8,49	3,69
	100	100	55	4,1	5,7	10,3	8,1	171	34,2	15,9	5,79
	120	120	64	4,4	6,3	13,2	10,4	318	53,0	27,7	8,65
	140	140	73	4,7	6,9	16,4	12,9	541	77,3	44,9	12,3
	160	160	82	5,0	7,4	20,1	15,8	869	109	68,3	16,7
	180	180	91	5,3	8,0	23,9	18,8	1 317	146	101,0	22,2
	200	200	100	5,6	8,5	28,5	22,4	1 943	194	142,0	28,5
	220	220	110	5,9	9,2	33,4	26,2	2 772	252	205,0	37,5
	240	240	120	6,2	9,8	39,1	30,7	3 892	324	284,0	47,3
	270	270	135	6,6	10,2	45,9	36,1	5 790	429	420,0	62,2
	300	300	150	7,1	10,7	53,8	42,2	8 356	557	604,0	80,5
	330	330	160	7,5	11,5	62,6	48,1	11 770	713	788,0	98,5
	360	360	170	8,0	12,7	72,7	57,1	16 270	904	1 043,0	123,0
	400	400	180	8,6	13,5	84,5	66,3	23 130	1160	1 318,0	146,0
	450	450	190	9,4	14,6	98,8	77,6	33 740	1500	1 676,0	176,0
	500	500	200	10,2	16,0	116,0	90,7	48 200	1930	2 142,0	214,0
	550	550	210	11,1	17,2	134,0	106,0	67 120	2440	2 667,0	254,0
	600	600	220	12,0	19,0	156,0	122,0	92 080	3070	3 387,0	308,0

Le tableau de dimensions nous donne le profilé IPE de 160 pour lequel $(I_z/V) = 109\ cm^3$.

Avec ce profilé, la contrainte maximale sera alors de :

$$\sigma_{Maxi}' = \frac{10\ 000\ 000}{109\ 000} = 91,74\ MPa$$

RESISTANCE DES MATERIAUX

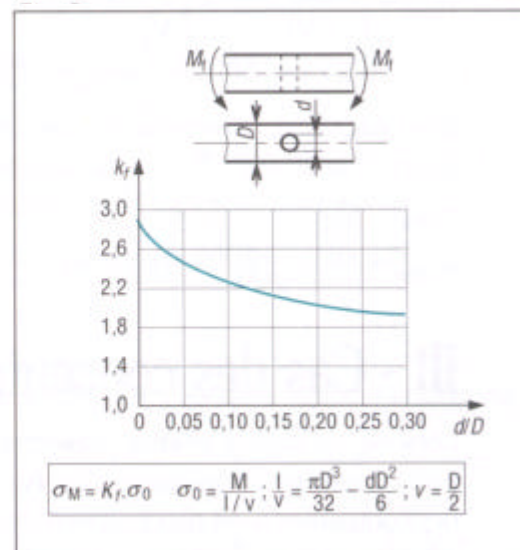
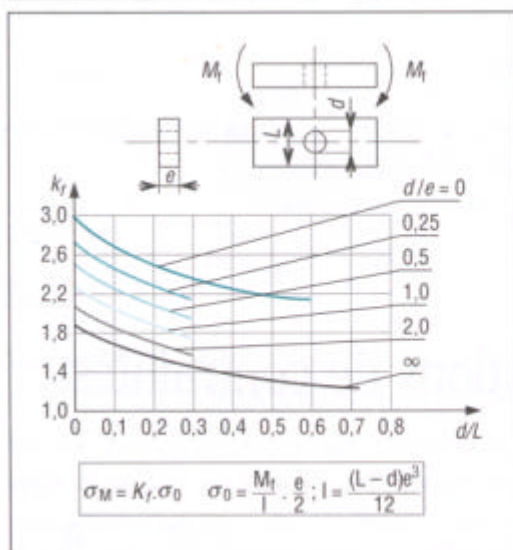
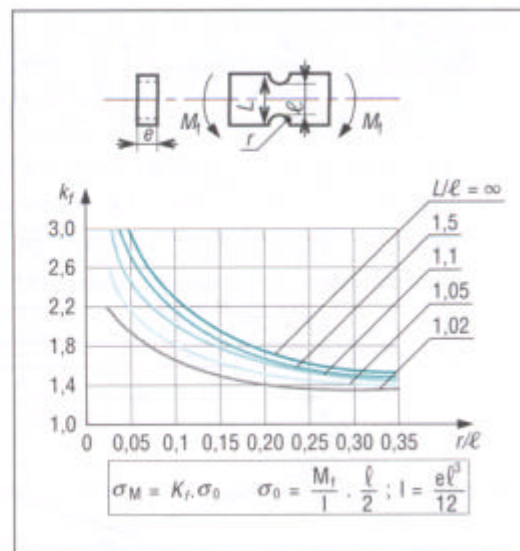
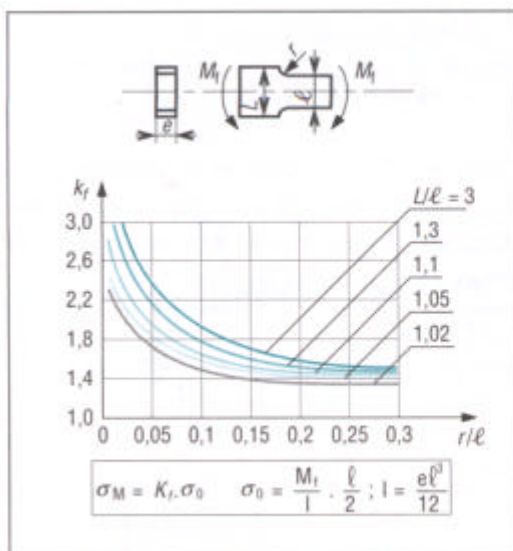
5.3 Concentration de contraintes en flexion

Lorsque les solides étudiés présentent de brusques variations de section, les relations précédentes ne s'appliquent plus. Au voisinage du changement de section, la répartition des contraintes n'est plus proportionnelle à la distance y et σ_{Maxi} est supérieure à la valeur $\frac{M_{f \text{ Maxi}}}{(I_z/V)} = \sigma_0$: on dit qu'il y a concentration de contraintes.

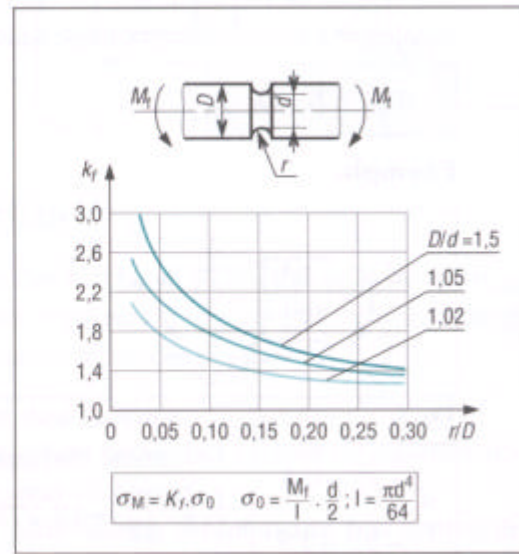
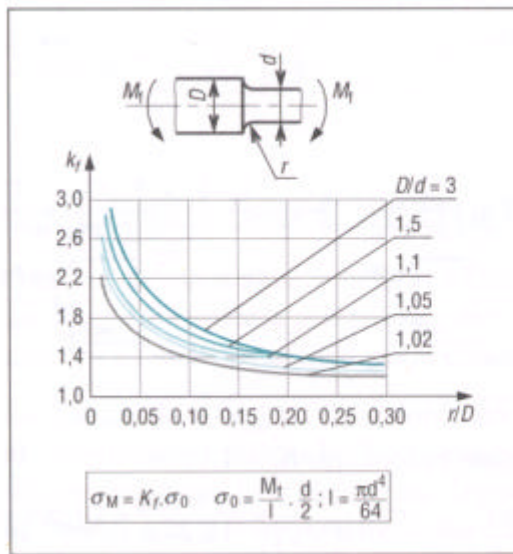
On a alors pour la contrainte maximale :

$$\sigma_{\text{Maxi}} = K_f \cdot \sigma_0$$

Les valeurs de K_f (coefficient de concentration de contraintes) étant déterminées expérimentalement (voir abaques suivants).



RESISTANCE DES MATERIAUX



Exemple trivial : déterminons la contrainte maximale dans l'arbre suivant, soumis à un moment de flexion M_f de 1227 Nm :

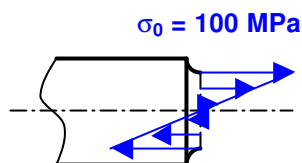
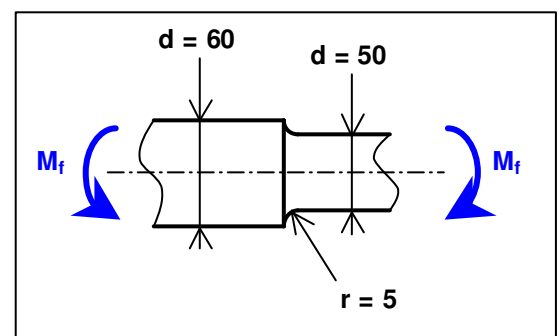
$$\frac{r}{d} = \frac{5}{50} = 0.1 \quad \text{et} \quad \frac{D}{d} = \frac{60}{50} = 1.2$$

Le tableau qui va bien indiquer $K_f = 1.65$

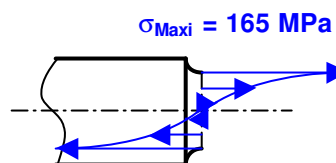
$$\text{Or } \frac{I_z}{V} = \frac{\pi d^4/64}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \times 50^3}{32} = 12272 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_0 = \frac{M_f}{(I_z/V)} = \frac{122700}{12272} = 10 \text{ daN.mm}^{-2}$$

On a donc pour la contrainte maximale $\sigma_{\text{Maxi}} = K_f \cdot \sigma_0 = 1.65 \times 10 = 16.5 \text{ daN.mm}^{-2}$



Sans concentration

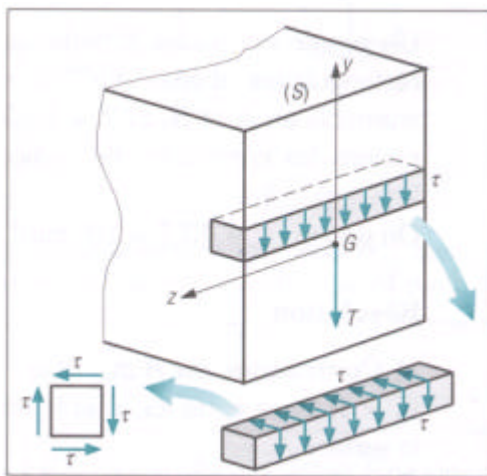
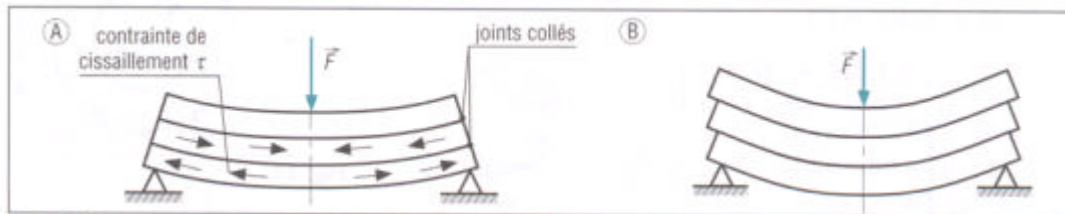


Avec concentration

RESISTANCE DES MATERIAUX

5.4 Contraintes de cisaillement en flexion

5.4.1 Mise en évidence



Pour l'exemple ci-dessus, les contraintes de cisaillement τ qui s'exercent dans les joints collés assurent le maintien (évitent le glissement) entre les poutres respectives et limitent ainsi les déformations.

La figure ci-contre donne la distribution des contraintes de cisaillement dans une section droite (S) supportant un effort tranchant T.

Si les contraintes τ conservent une valeur constante suivant l'axe z, en revanche elles varient suivant y, avec un maximum près du plan neutre (inverse des contraintes normales σ).

5.4.2 Cas des poutres rectangulaires

Dans ce cas, la contrainte de cisaillement τ , à la distance y du plan neutre, est donnée par :

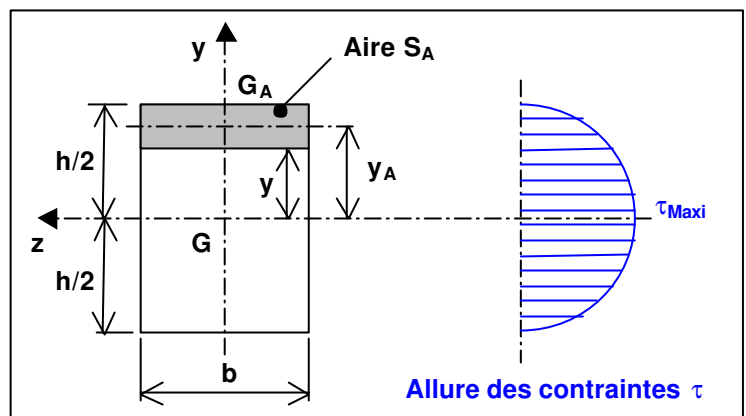
$$\tau = \frac{T Q}{I_z b} \quad \text{avec} \quad Q = y_A S_A = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

et τ la contrainte de cisaillement à la distance y (MPa)

Q le moment statique de l'aire hachurée S_A (mm^3)

T l'effort tranchant (N)

I le moment quadratique de la section S par rapport à (G, z) (mm^4)



Remarque : la contrainte est maximale au niveau du plan neutre ($y = 0$) :

$$\tau_{\text{Maxi}} = \frac{3 T}{2 S} = \frac{T h^2}{8 I_z}$$

Elle est de 50% plus grande que la contrainte moyenne de cisaillement T/S définie dans le cas du cisaillement pur.

RESISTANCE DES MATERIAUX

5.4.3 Cas des poutres circulaires

❖ Section circulaire pleine : $S = \pi r^2$

$$Q = \frac{2}{3} (r^2 - y^2)^{3/2}$$

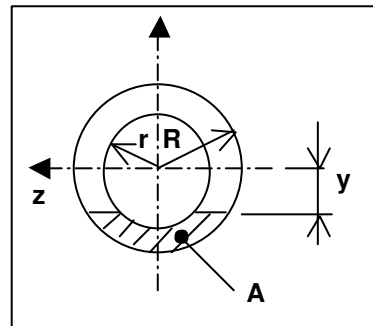
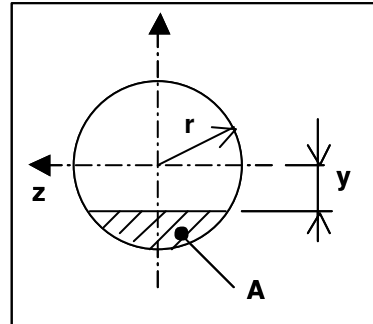
$$\tau = \left(\frac{4T}{3\pi r^2} \right) \sqrt{r^2 - y^2} ; \quad \tau_{Maxi} = \frac{4T}{3S}$$

❖ Section circulaire creuse : $S = \pi (R^2 - r^2)$

$$Q = \frac{2}{3} (R^3 - r^3)$$

$$\tau_{Maxi} = \frac{4T}{3S} \left(\frac{R^2 + Rr + r^2}{R^2 + r^2} \right)$$

Pour un tube mince : $\tau_{Maxi} \approx \frac{2T}{S}$



5.4.4 Exemple

Un profilé est réalisé à partir de trois plats rectangulaires d'épaisseur 30 mm, collés ensemble en A et B. Si l'effort tranchant est $T = 13.5 \text{ kN}$, déterminer les contraintes de cisaillement dans les joints collés. On donne $I_z = 43,7 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$.

❖ Contraintes en A :

y_A = distance entre (G, z) et le barycentre de la surface S_A .

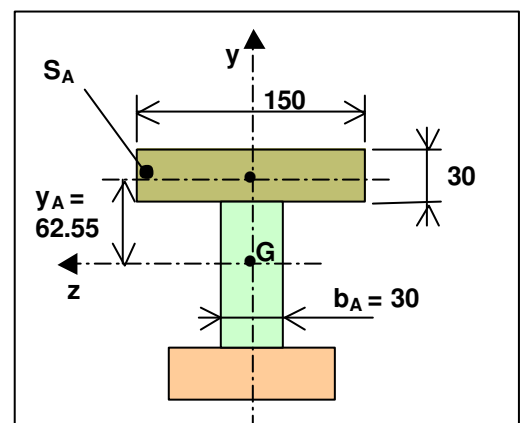
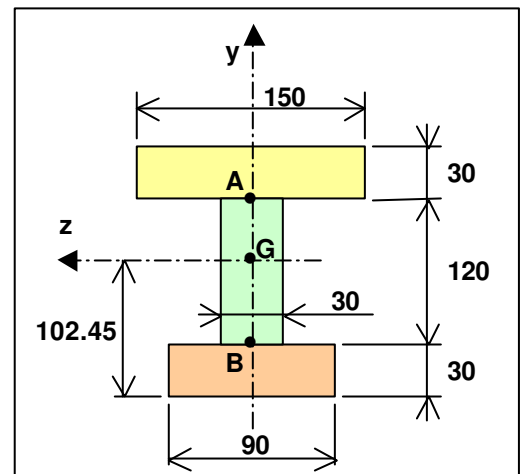
$$Q_A = S_A y_A = (150 \times 30) \times 62.55 = 281475 \text{ mm}^3$$

$$\tau_A = \frac{T Q_A}{I_z b_A} = \frac{13500 \times 281475}{43,7 \cdot 10^6 \times 30} = 2.9 \text{ MPa}$$

❖ Contraintes en B :

y_B = distance entre (G, z) et le barycentre de la surface S_B .

$$Q_B = S_B y_B = (90 \times 30) \times 87.45 = 236115 \text{ mm}^3$$



RESISTANCE DES MATERIAUX

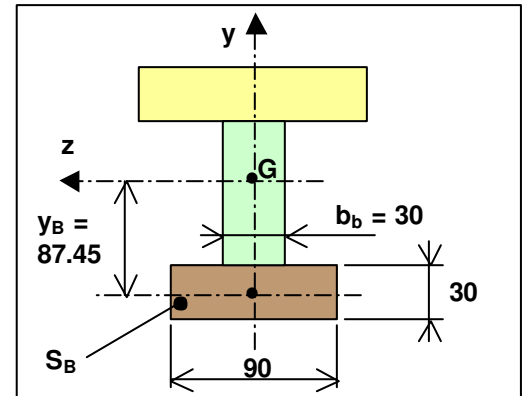
$$\tau_B = \frac{T Q_B}{I_z b_B} = \frac{13500 \times 236115}{43.7 \times 10^6 \times 30} = 2.4 \text{ MPa}$$

❖ Remarque : $I_z = I_{z1} + I_{z2} + I_{z3}$

$$I_{z1} = \frac{150 \times 30^3}{12} + (150 \times 30) \times 62.55^2 = 17,95.10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{z2} = \frac{90 \times 30^3}{12} + (90 \times 30) \times 87.45^2 = 20,85.10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{z3} = \frac{30 \times 90^3}{12} + (30 \times 90) \times 12.545^2 = 4,88.10^6 \text{ mm}^4$$



6. Déformations en flexion

Dans ce qui précède, on s'est intéressé au poutres fléchies et à leur dimensionnement d'un point de vue de résistance sous charge. Nous allons voir à présent l'aspect déformation. En particulier, la détermination de la flèche maximale (et de sa valeur admissible) est l'un des éléments fondamentaux de la conception des poutres.

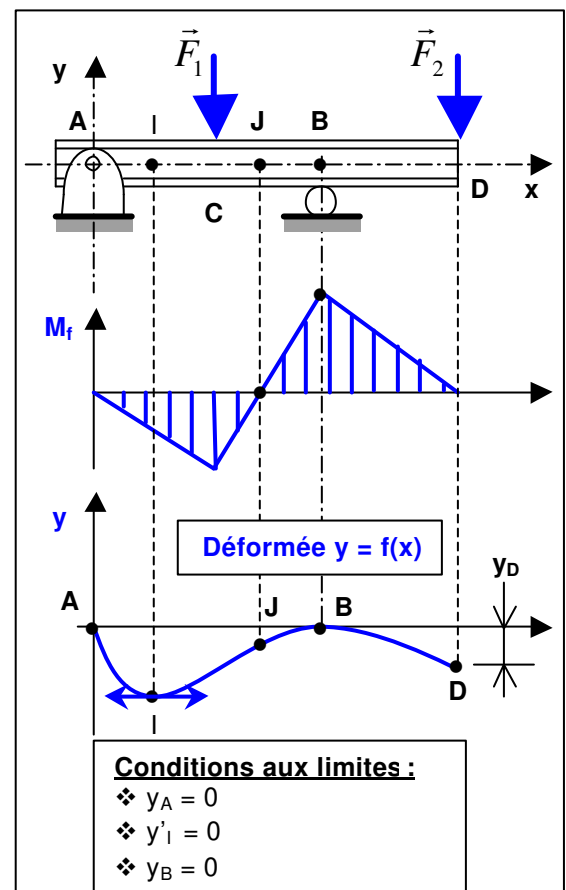
6.1 Notion de déformée

Pour la poutre ci-contre, la ligne moyenne AICJBD a pour direction l'axe des x avant déformation et la courbe $y = f(x)$ après déformation. Cette courbe est appelée déformée.

$y = f(x)$ est l'équation mathématique de la déformée dans le système d'axes (x, y) .

Conditions aux limites : les conditions $y_A = 0$, $y_B = 0$ et $y'_l = 0$, appelées conditions aux limites, sont des éléments connus de la déformée. Ces éléments sont imposés par les appuis A et B ou par la forme de la déformée.

Flèches : la déformée présente des valeurs maximales en I (entre A et B) et à l'extrémité D. Pour ces points particuliers, la déformation est souvent appelée flèche (f) : $f_I = y_I$ et $f_D = y_D$



RESISTANCE DES MATERIAUX

6.2 Méthode par intégration

6.2.1 Principe

Connaissant l'équation des moments fléchissants M_f en fonction de x (position le long de la poutre), la pente y' et la déformée y sont obtenues par intégrations successives à partir de :

$$M_f = -E I y''$$

avec M_f le moment fléchissant (équation en x)

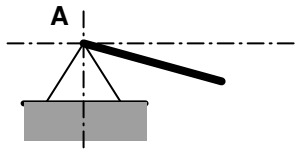
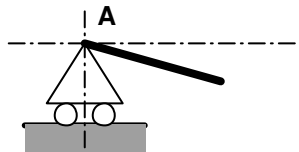
E le module d'élasticité longitudinale (MPa)

$I = I_z$ le moment quadratique de la section par rapport à l'axe (G, z) (mm^4)

y'' la dérivée seconde de la déformée y

Remarque : les constantes d'intégration successives sont calculées à partir des conditions aux limites imposées par la position et la nature des appuis, ou encore par la forme générale de la déformée.

EXEMPLES USUELS DE CONDITIONS AUX LIMITES

ENCASTREMENT	ARTICULATION	APPUI SIMPLE
		
❖ $y'_A = 0$ ❖ $y_A = 0$	❖ $y_A = 0$	❖ $y_A = 0$

6.2.2 Exemple

Considérons la poutre ci-contre, de longueur $L = 4 \text{ m}$, soumise à une charge ponctuelle en son milieu.

L'étude statique permet de déterminer les actions des appuis sur la poutre :

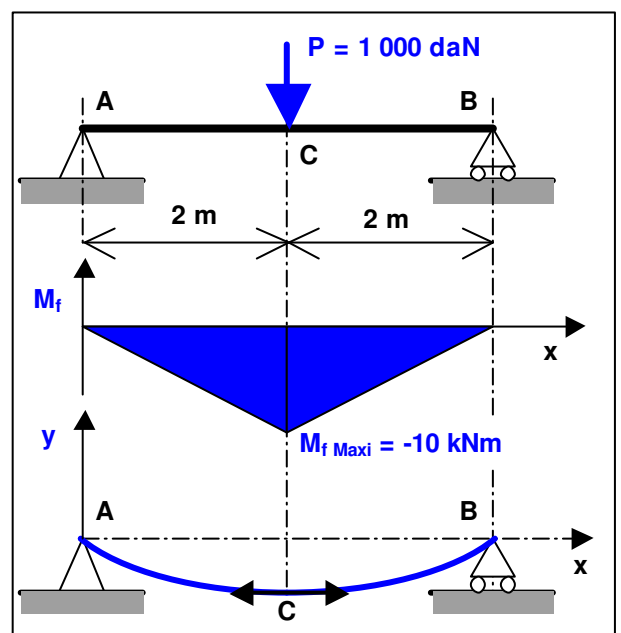
$$A = B = \frac{P}{2} = 500 \text{ daN}$$

Moments fléchissants :

❖ pour $0 \leq x \leq 2 \text{ m}$

$$M_{fAC} = -\frac{P}{2} x = -500 x$$

❖ pour $2 \leq x \leq 4 \text{ m}$



RESISTANCE DES MATERIAUX

$$M_{fBC} = -\frac{P}{2}x + P\left(x - \frac{L}{2}\right) = 500(x - 4)$$

Equation de la déformée : $M_{fAC} = -EI y_{AC}''$

On a donc $-EI y_{AC}'' = -\frac{P}{2}x$ ou encore $EI y_{AC}'' = \frac{P}{2}x$

La première intégration donne : $EI y_{AC}' = \frac{Px^2}{4} + C_1$ (1)

La seconde intégration donne : $EI y_{AC} = \frac{Px^3}{12} + C_1x + C_2$ (2)

Conditions aux limites :

❖ on a $y = 0$ au point A ($x = 0$) : l'équation (2) donne $C_2 = 0$

❖ et $y'_C = 0$ au point C ($x = L/2$) : l'équation (1) donne $C_1 = -\frac{P \times (L/2)^2}{4} = -\frac{PL^2}{16}$

Finalement : $y_{AC}' = \frac{P}{4EI} \left(x^2 - \frac{L^2}{4} \right)$ et $y_{AC} = \frac{P}{4EI} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{L^2}{4}x \right)$

Flèche : la flèche maximale est obtenue pour $x = L/2$: $f_{Maxi} = y_C = -\frac{PL^3}{48EI}$

Voilà, c'est tout pour aujourd'hui...



RESISTANCE DES MATERIAUX

RESISTANCE DES MATERIAUX



TRAVAUX DIRIGES

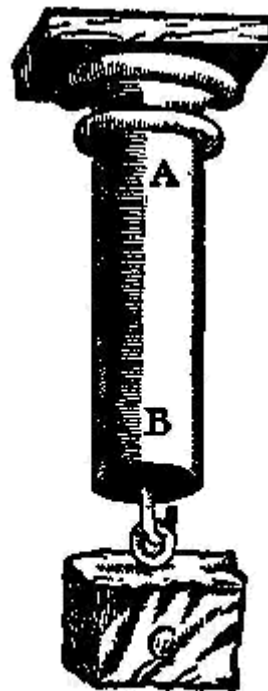


FIG. 14. Galileo's
illustration of ten-
sile test.

Gravure montrant l'essai d'une poutre en flexion

(Extrait de « *Discorsi e dimostrazioni mathematiche* » de Galilée)

RESISTANCE DES MATERIAUX

SOMMAIRE DES REJOUISSANCES

1. Résistance des matériaux - Généralités

2. Résistance des matériaux - Traction

3. Résistance des matériaux - Cisaillement

4. Résistance des matériaux - Torsion

5. Résistance des matériaux - Flexion

Bon courage...



RESISTANCE DES MATERIAUX

RESISTANCE DES MATERIAUX



GENERALITES

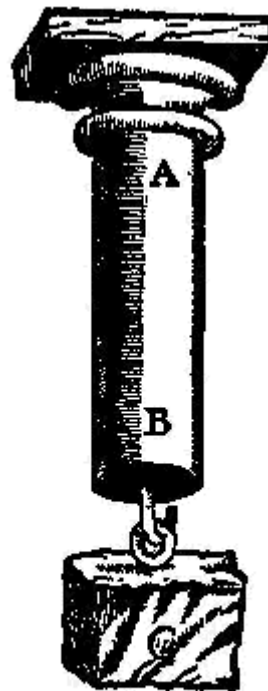


FIG. 14. Galileo's
illustration of ten-
sile test.

Gravure montrant l'essai d'une poutre en flexion
(Extrait de « *Discorsi e dimostrazioni mathematiche* » de Galilée)

RESISTANCE DES MATERIAUX

SOMMAIRE

1.	RESISTANCE DES MATERIAUX - GENERALITES	3
1.1	EXERCICE 1.1	3
1.2	EXERCICE 1.2	4
1.3	EXERCICE 1.3	5



RESISTANCE DES MATERIAUX

1. Résistance des matériaux - Généralités

Convention : on suppose toujours les inconnues comme positives.

1.1 Exercice 1.1

Une poutre sur deux appuis A et B supporte une charge concentrée $\vec{F}$ (300 daN) en C.

Question 1.1.1 Déterminer les actions exercées par les appuis ;

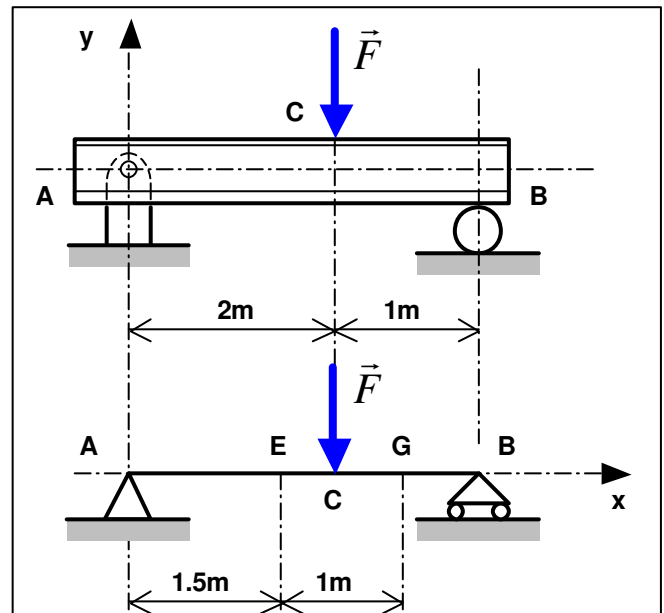
Question 1.1.2 Déterminer les efforts intérieurs dans la poutre en E et G.

Réponse Question 1.1.1

$B_y = 200 \text{ daN}$ et $A_y = 100 \text{ daN}$.

Les composantes A_x et B_x des actions des appuis sont nulles.

Réponse Question 1.1.2



$$\{\mathcal{S}_{coh}\}_E = \begin{Bmatrix} \vec{R}_E \\ \vec{M}_E \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{Bmatrix} N_E & M_{TE} \\ T_{yE} & M_{fyE} \\ T_{zE} & M_{fzE} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -1000 & 0 \\ 0 & 1500 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} \quad \text{en N et Nm}$$

$$\{\mathcal{S}_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{R}_G \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{Bmatrix} N_G & M_{TG} \\ T_{yG} & M_{fyG} \\ T_{zG} & M_{fzG} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 2000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} \quad \text{en N et Nm}$$

RESISTANCE DES MATERIAUX

1.2 Exercice 1.2

Un panneau de signalisation supporte une charge F de 100 daN en B résultant de l'action du vent. Le panneau est encastré (scellé) en O dans un trottoir. Les poids sont négligés.

Question 1.2.1 Déterminer les actions exercées par l'encastrement en O ;

Question 1.2.2 Déterminer les efforts intérieurs dans la section droite du poteau passant par G (centre d'inertie).

Réponse Question 1.2.1

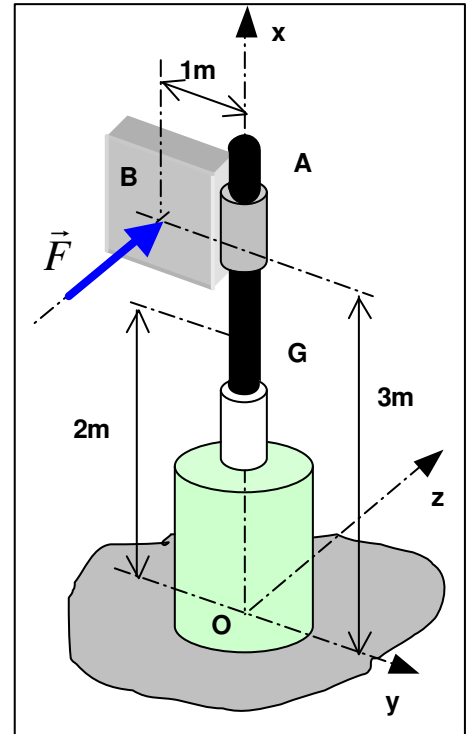
$$\{\mathcal{S}_{coh}\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{R}_O \\ \vec{M}_O \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{Bmatrix} N_O & M_{TO} \\ T_{yO} & M_{fyO} \\ T_{zO} & M_{fzO} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{Bmatrix} 0 & 1000 \\ 0 & 3000 \\ -1000 & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

en N et Nm

Réponse Question 1.2.2

$$\{\mathcal{S}_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{R}_G \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{Bmatrix} N_G & M_{TG} \\ T_{yG} & M_{fyG} \\ T_{zG} & M_{fzG} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{Bmatrix} 0 & 1000 \\ 0 & 1000 \\ -1000 & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

en N et Nm

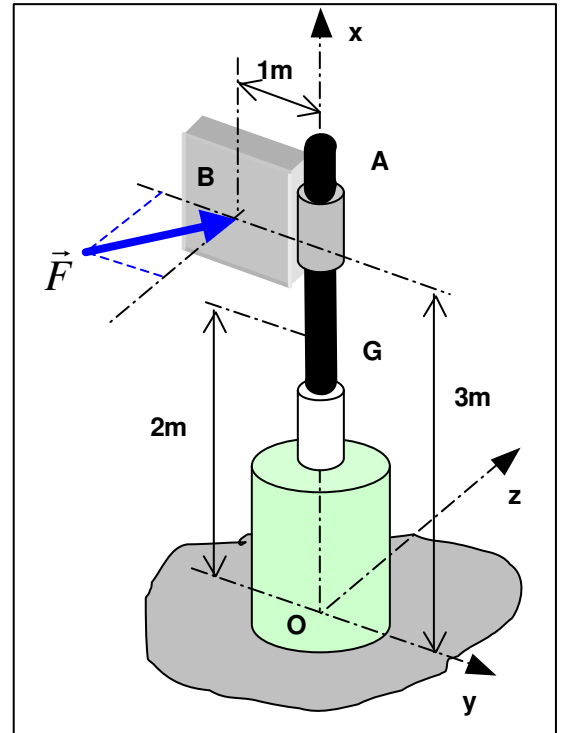


RESISTANCE DES MATERIAUX

1.3 Exercice 1.3

Reprendre l'exercice précédent avec :

$$\vec{F} = 50 \vec{j} + 80 \vec{k}$$



Voilà, c'est tout pour aujourd'hui...



RESISTANCE DES MATERIAUX

RESISTANCE DES MATERIAUX



TRACTION

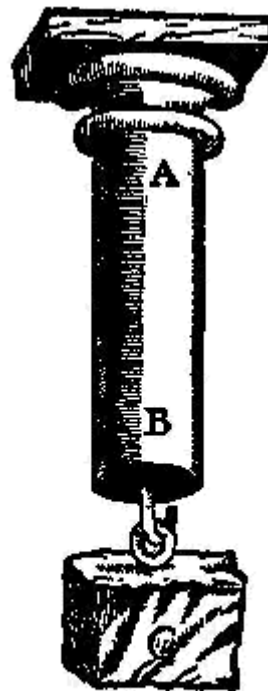


FIG. 14. Galileo's
illustration of ten-
sile test.

Gravure montrant l'essai d'une poutre en flexion
(Extrait de « *Discorsi e dimostrazioni mathematiche* » de Galilée)

RESISTANCE DES MATERIAUX

SOMMAIRE

1.	RESISTANCE DES MATERIAUX - TRACTION.....	3
1.1	EXERCICE 2.1	3
1.2	EXERCICE 2.2	3
1.3	EXERCICE 2.3	4
1.4	EXERCICE 2.4	4
1.5	EXERCICE 2.5	5
1.6	EXERCICE 2.6	5
1.7	EXERCICE 2.7	6



RESISTANCE DES MATERIAUX

1. Résistance des matériaux - Traction

Convention : on suppose toujours les inconnues comme positives.

1.1 Exercice 2.1

Le tableau ci-dessous récapitule les résultats d'un essai de traction effectué sur une éprouvette en acier à haute teneur en carbone, traité thermiquement. F est la charge appliquée à l'éprouvette et ΔL son allongement.

F (kN)	0	51.8	72	93.2	109	141.6	149.6	161	170
ΔL (mm)	0	0.0255	0.035	0.046	0.0535	0.076	0.101	0.152	0.203
F (kN)	177.2	186.8	197.6	214.4	227	235	242	246.6	rupture
ΔL (mm)	0.254	0.355	0.508	0.762	1.016	1.27	1.527	1.78	

Le diamètre initial de l'éprouvette est de 17.68 mm, le diamètre ultime de 16.41 mm, la longueur testée de 25 mm et la longueur ultime de 26.75 mm.

Question 2.1.1 Tracer le graphe contrainte σ - déformation ϵ

Question 2.1.2 En déduire R_r , R_e , E , $A\%$ et $Z\%$

Réponse Question 2.1.2

$R_e \approx 570 \text{ MPa}$; $R_r \approx 1000 \text{ MPa}$; $E \approx 190\,000 \text{ MPa}$; $A\% \approx 7$; $Z\% \approx 13.85$

1.2 Exercice 2.2

Reprendre l'exercice précédent, avec une éprouvette en alliage d'aluminium. On a toujours F la charge appliquée à l'éprouvette et ΔL son allongement.

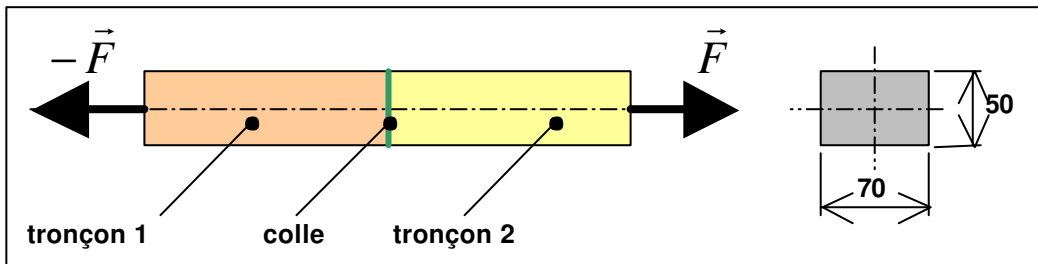
F (kN)	0	14.94	18.06	23.4	2.46	31.68	34.16	35.06	37.36
ΔL (mm)	0	0.2	0.25	0.5	1	1.5	2.05	2.55	3.8
F (kN)	38.44	42.08	45.28	49.9	56.04	58.72	60.86	63.08	65.12
ΔL (mm)	3.8	7.6	10.15	15.25	30.5	40.65	50.8	60.95	69.6

Le diamètre initial de l'éprouvette est de 17.82 mm, le diamètre ultime de 15.93 mm, la longueur testée de 250 mm et la longueur ultime de 316.5 mm.

RESISTANCE DES MATERIAUX

1.3 Exercice 2.3

Deux tronçons (1) et (2) en matière plastique sont collés comme l'indique la figure. La résistance à la rupture en traction de la colle est de 235 daN.cm^2 pour des températures variant de -60°C à 120°C .



Question 2.3.1 Déterminer l'effort de traction admissible par le joint collé.

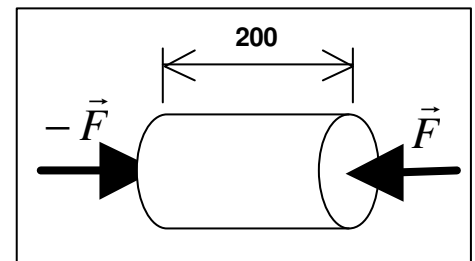
Réponse Question 2.3.1

$$F \leq 82\,250 \text{ N}$$

1.4 Exercice 2.4

Une barre de diamètre 50 en fonte ($E = 100 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$) supporte une charge de compression de 140 kN .

Question 2.4.1 Déterminer le raccourcissement de la longueur, l'augmentation du diamètre, et la diminution du volume.



Réponse Question 2.4.1

❖ Raccourcissement de la longueur : 0.1426 mm

❖ Augmentation du diamètre : 0.0107 mm .

❖ Diminution de volume : 113 mm^3 .

RESISTANCE DES MATERIAUX

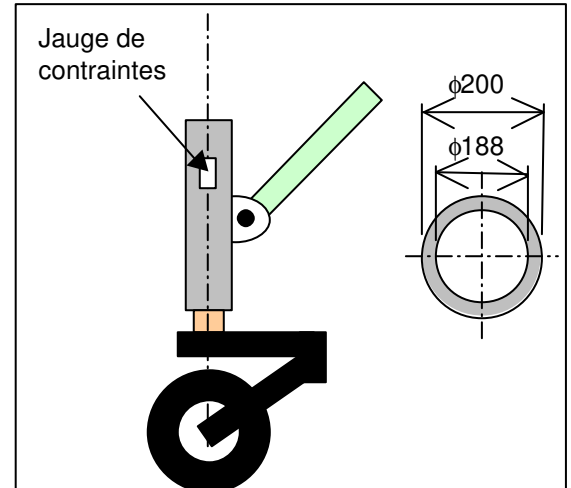
1.5 Exercice 2.5

Pour contrôler la charge d'un avion, on place des jauges de contraintes sur le train d'atterrissage. Une jauge, collée sur un pied de forme tubulaire donne les indications suivantes : $\varepsilon_1 = 0.00068$ en position déchargée et $\varepsilon_2 = 0.00136$ en charge.

Question 2.5.1 Déterminer la charge supplémentaire si $E = 75$ GPa.

Réponse Question 2.5.1

Charge supplémentaire : 186 498 N.



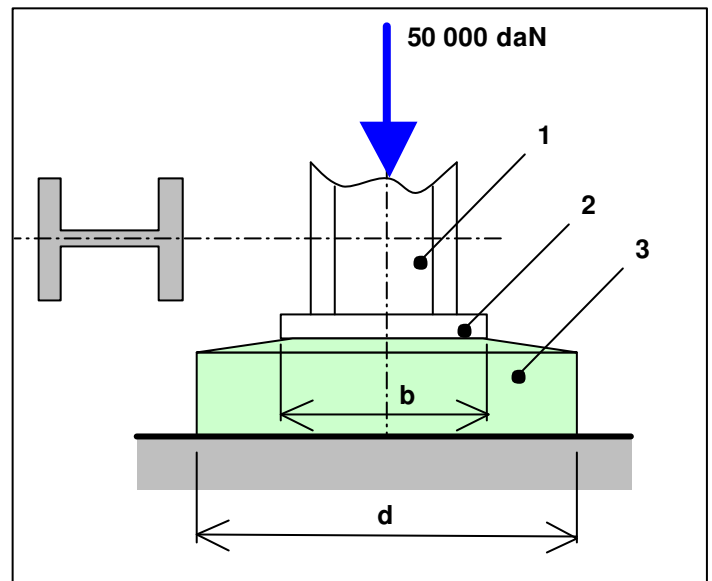
1.6 Exercice 2.6

Le fer H, repéré 1 sur la figure, supporte un effort de compression de 50 000 daN. Le fer est soudé sur un plat carré en acier de côté b repéré 2. L'ensemble repose sur un support circulaire 3 en béton de diamètre d posé à même le sol.

Question 2.6.1 Calculer la section du fer H si la contrainte admissible de l'acier est de 10 daN.mm^{-2} .

Question 2.6.2 Déterminer le côté b du carré 2 si la contrainte admissible en compression du béton est de 0.4 daN.mm^{-2} .

Question 2.6.3 Calculer le diamètre d du socle 3 si la contrainte admissible à l'écrasement du sol est de 2.5 daN.mm^{-2} .



Réponse Question 2.6.1

$$S \geq 5000 \text{ mm}^2$$

Réponse Question 2.6.2

$$b \approx 354 \text{ mm}$$

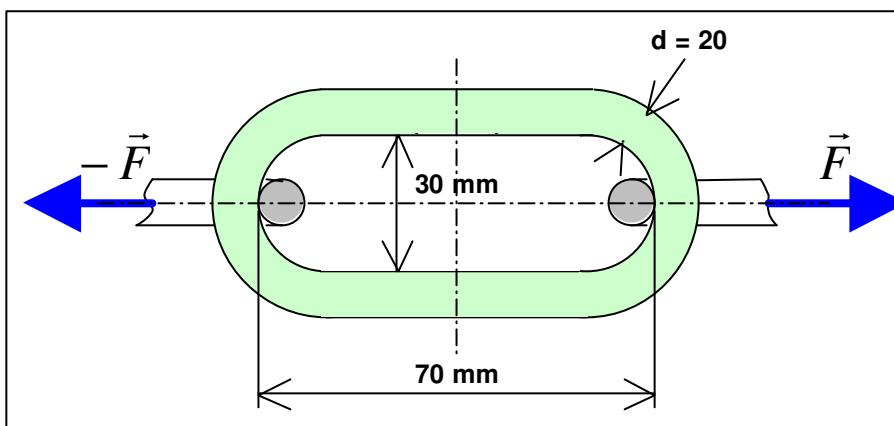
RESISTANCE DES MATERIAUX

Réponse Question 2.6.3

$$d \approx 1596 \text{ mm}$$

1.7 Exercice 2.7

Une chaîne se compose d'une suite de maillons soudés les uns derrière les autres. La limite à la rupture de l'acier utilisé est de $63 \text{ daN} \cdot \text{mm}^{-2}$.



Question 2.7.1 Déterminer la force d'extension maximale $\vec{F}$ que peut supporter la chaîne si le coefficient de sécurité adopté est de 5.

Réponse Question 2.7.1

$$F_{usu} = 79\,168 \text{ N}$$

Voilà, c'est tout pour aujourd'hui...



RESISTANCE DES MATERIAUX

RESISTANCE DES MATERIAUX



CISAILLEMENT

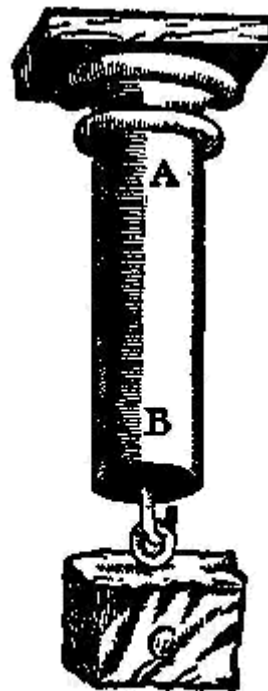


FIG. 14. Galileo's illustration of tensile test.

Gravure montrant l'essai d'une poutre en flexion
(Extrait de « *Discorsi e dimostrazioni mathematiche* » de Galilée)

RESISTANCE DES MATERIAUX

SOMMAIRE

1.	RESISTANCE DES MATERIAUX - CISAILLEMENT	3
1.1	EXERCICE 3.1	3
1.2	EXERCICE 3.2	3
1.3	EXERCICE 3.3	4



RESISTANCE DES MATERIAUX

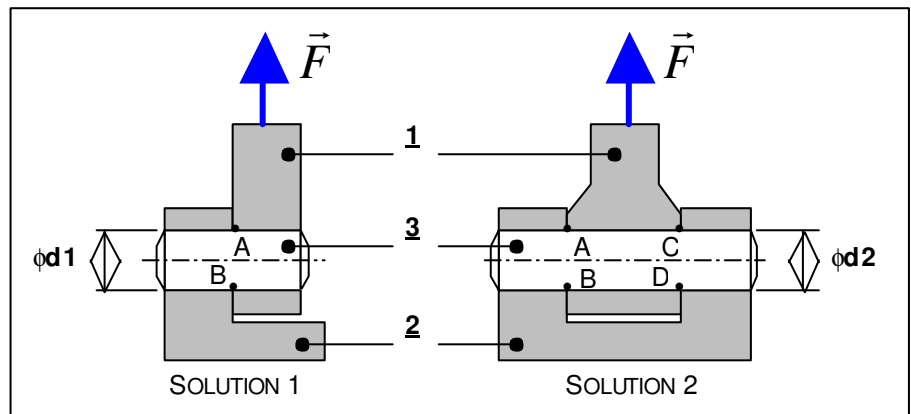
1. Résistance des matériaux - Cisaillement

Convention : on suppose toujours les inconnues comme positives.

1.1 Exercice 3.1

La liaison pivot entre le tirant 1 et la pièce 2 est réalisée par l'intermédiaire de l'axe cylindrique 3. Dans les deux cas, l'action exercée par le tirant est $F = 10\,000\text{ daN}$. Les axes 3 (des deux solutions) sont réalisés dans le même acier dont la contrainte admissible au cisaillement est de 5 daN.mm^{-2} .

Question 3.1.1 Déterminer et comparer les diamètres d_1 et d_2 des deux solutions.



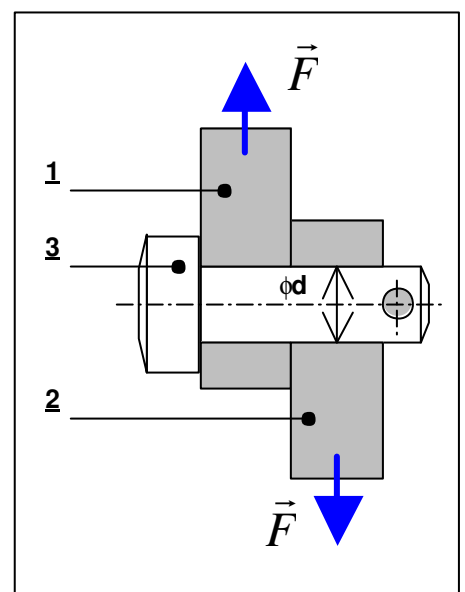
Réponse Question 3.1.1

$$d_1 \geq 50.5\text{ mm} ; d_2 \geq 35.7\text{ mm}$$

1.2 Exercice 3.2

Une articulation cylindrique entre deux barres plates 1 et 2 est réalisée comme l'indique la figure ci-contre. La liaison est assurée par un axe cylindrique 3 de diamètre d inconnu. L'effort maximal supporté par la liaison est de $5\,000\text{ daN}$. La résistance pratique (ou admissible) au cisaillement du matériau de l'axe est de 5 daN.mm^{-2} .

Question 3.2.1 Déterminer le diamètre d de l'axe 3. Indiquer la (ou les) section(s) cisillée(s).



RESISTANCE DES MATERIAUX

RESISTANCE DES MATERIAUX



TORSION

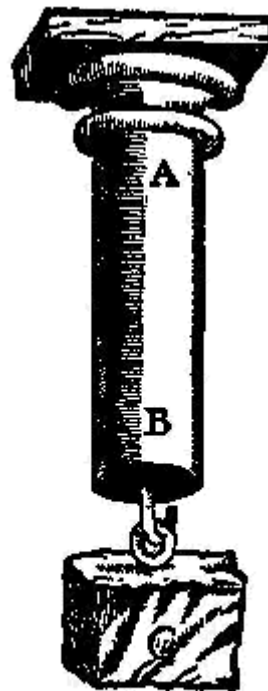


FIG. 14. Galileo's illustration of tensile test.

Gravure montrant l'essai d'une poutre en flexion
(Extrait de « *Discorsi e dimostrazioni mathematiche* » de Galilée)

RESISTANCE DES MATERIAUX

SOMMAIRE

1.	RESISTANCE DES MATERIAUX - TORSION	3
1.1	EXERCICE 4.1	3
1.2	EXERCICE 4.2	3
1.3	EXERCICE 4.3	4
1.4	EXERCICE 4.4	4



RESISTANCE DES MATERIAUX

1. Résistance des matériaux - Torsion

Convention : on suppose toujours les inconnues comme positives.

1.1 Exercice 4.1

Soient deux arbres de transmission construits à partir du même acier ($G = 8\,000 \text{ daN}\cdot\text{mm}^{-2}$). Le premier est plein (diamètre d_1) alors que le second est creux (diamètre extérieur D , diamètre intérieur $d = 0.8 D$). Le couple à transmettre est de 200 Nm. La résistance pratique au cisaillement adoptée pour les deux cas est de $10 \text{ daN}\cdot\text{mm}^{-2}$.

Question 4.1.1 Déterminer les dimensions optimales des deux arbres et comparer alors les poids respectifs des deux constructions.

Réponse Question 4.1.1

$$d_1 \geq 21.67 \text{ mm} ; \quad D \geq 25.83 \text{ mm} ; \quad r = \frac{\text{poids arbre 2}}{\text{poids arbre 1}} = 0.51$$

1.2 Exercice 4.2

Soit une éprouvette cylindrique en cuivre de 25 mm de diamètre, soumise à un couple de 210 Nm lors d'un essai de torsion. L'angle de torsion mesuré est de 4.9° pour une longueur de 1 m.

Question 4.2.1 Déterminer le module d'élasticité transversal G du cuivre testé.

Question 4.2.2 Déterminer l'angle de torsion d'une poutre du même matériau, de même diamètre et de longueur 1.8 m, si elle supporte une contrainte de cisaillement maximale de $140 \text{ N}\cdot\text{mm}^{-2}$.

Réponse Question 4.2.1

$$G = 64\,000 \text{ MPa}$$

Réponse Question 4.2.2

$$\alpha = 18^\circ$$

RESISTANCE DES MATERIAUX

1.3 Exercice 4.3

L'arbre creux proposé (diamètres intérieurs et extérieurs respectivement de 100 et 120 mm, longueur 3 m) tourne à la vitesse de 180 tr.min^{-1} . Un système de mesure stroboscopique indique un angle de torsion $\alpha = 3^\circ$ entre les deux extrémités. On donne $G = 77 \text{ GPa}$.

Question 4.3.1 Déterminer la puissance transmise et la contrainte de cisaillement maximale.

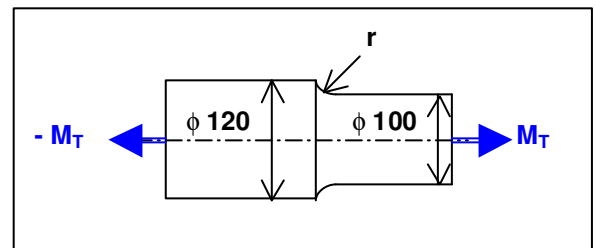
Réponse Question 4.3.1

$$P = 267 \text{ kW} ; \tau_{\text{Maxi}} = 80.6 \text{ MPa}$$

1.4 Exercice 4.4

Un arbre de transmission transmet une puissance de 300 kW à 480 tr.min^{-1} .

Question 4.4.1 Si la contrainte de cisaillement admissible est de 60 MPa, déterminer le rayon r minimum pour le raccordement entre les deux cylindres.



Réponse Question 4.4.1

$$r = 2 \text{ mm}$$

Voilà, c'est tout pour aujourd'hui...



RESISTANCE DES MATERIAUX

RESISTANCE DES MATERIAUX



FLEXION

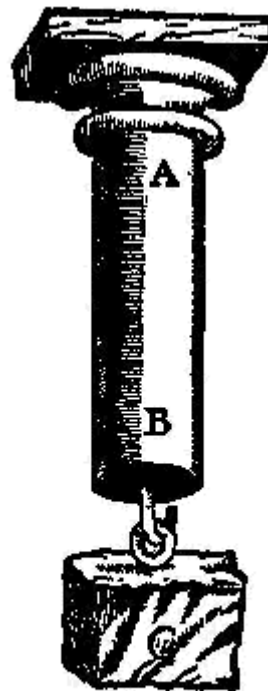


FIG. 14. Galileo's illustration of tensile test.

Gravure montrant l'essai d'une poutre en flexion
(Extrait de « *Discorsi e dimostrazioni mathematiche* » de Galilée)

RESISTANCE DES MATERIAUX

SOMMAIRE

1.	RESISTANCE DES MATERIAUX - FLEXION	3
1.1	EXERCICE 5.1	3
1.2	EXERCICE 5.2	3
1.3	EXERCICE 5.3	4
1.4	EXERCICE 5.4	5
1.5	EXERCICE 5.5	5
1.6	EXERCICE 5.6	6
1.7	EXERCICE 5.7	7
1.8	EXERCICE 5.8	8
1.9	EXERCICE 5.9	9
1.10	EXERCICE 5.10	9
1.11	EXERCICE 5.11	9
1.12	EXERCICE 5.12	10
1.13	EXERCICE 5.13	10
1.14	EXERCICE 5.14	11
1.15	EXERCICE 5.15	12
1.16	EXERCICE 5.16	12
1.17	EXERCICE 5.17	12



RESISTANCE DES MATERIAUX

1. Résistance des matériaux - Flexion

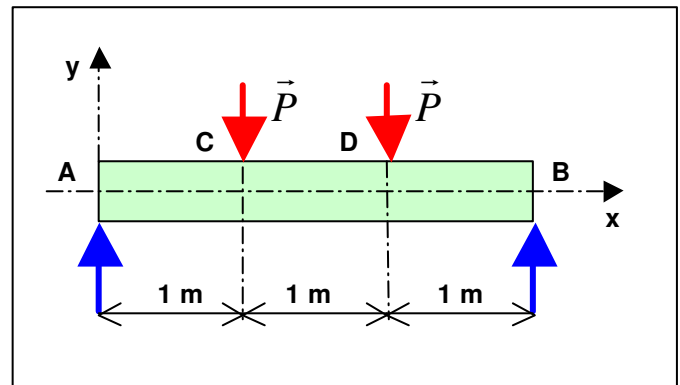
Convention : on suppose toujours les inconnues comme positives.

1.1 Exercice 5.1

Sur une machine d'essai de flexion, le dispositif de mise en charge exerce une poussée de 20 000 N qui se répartit en C et D sur la poutre, alors que le bâti de la machine supporte la poutre en A et B.

Question 5.1.1 Déterminer les actions du bâti de la machine sur la poutre aux points A et B (on néglige le poids de la poutre) ;

Question 5.1.2 Pour chaque tronçon, déterminer les expressions littérales de l'effort tranchant et du moment fléchissant. Tracer les diagrammes respectifs.



Réponse Question 5.1.1

$$A = B = C = D = P = 10\,000\text{ N}$$

Réponse Question 5.1.2

$$T_{AC} = 10\,000\text{ N} \text{ et } M_{fAC} = -10\,000 x\text{ Nm pour tout } 0 \leq x \leq 1\text{ m}$$

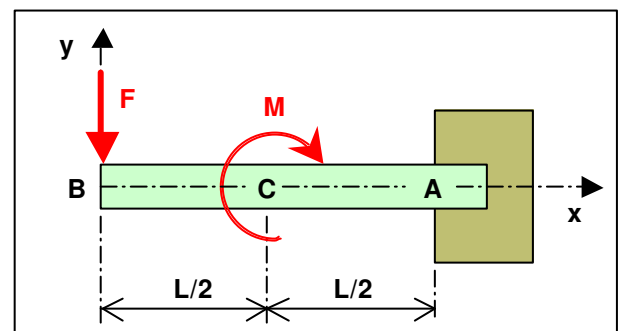
$$T_{CD} = 0\text{ N} \text{ et } M_{fCD} = -10\,000\text{ Nm pour tout } 1 \leq x \leq 2\text{ m}$$

$$T_{DB} = -10\,000\text{ N} \text{ et } M_{fDB} = 10\,000 (x - 3)\text{ Nm pour tout } 2 \leq x \leq 3\text{ m}$$

1.2 Exercice 5.2

On considère une poutre encastrée de longueur $L = 2\text{ m}$ soumise à un effort concentré $F = 1\,000\text{ N}$ (vers le bas) au point B et à un couple pur $M = 1\,000\text{ Nm}$ (sens antihorlogique) autour du point C.

Question 5.2.1 Déterminer les actions exercées par l'encastrement sur la poutre au point A (on néglige le poids de la poutre) ;



RESISTANCE DES MATERIAUX

Question 5.2.2 Pour chaque tronçon, déterminer les expressions littérales de l'effort tranchant et du moment fléchissant. Tracer les diagrammes respectifs.

Réponse Question 5.2.1

$$\begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = 1000 \text{ N} \\ M_A = -1000 \text{ Nm} \end{cases}$$

Réponse Question 5.2.2

$$T_{BC} = -1000 \text{ N} \text{ et } M_{fBC} = 1000 x \text{ Nm pour tout } 0 \leq x \leq 1 \text{ m}$$

$$T_{CA} = -1000 \text{ N} \text{ et } M_{fCA} = 1000 (x-1) \text{ Nm pour tout } 1 \leq x \leq 2 \text{ m}$$

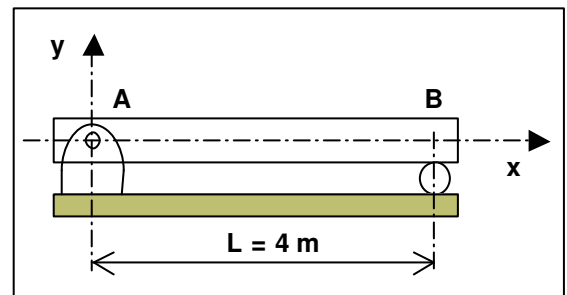
1.3 Exercice 5.3

Considérons une poutre (longueur $L = 4 \text{ m}$) réalisée à partir d'un profilé IPE dont le poids est de 40 daN par mètre ($\vec{q} = -400 \vec{y}$ ou $q = 400 \text{ N.m}^{-1}$).

Question 5.3.1 Déterminer les actions exercées par les liaisons sur la poutre aux points A et B ;

Question 5.3.2 Déterminer les expressions littérales de l'effort tranchant et du moment fléchissant le long de la poutre. Tracer les diagrammes respectifs ;

Question 5.3.3 Déterminer le moment fléchissant maxi, ainsi que l'abscisse du point correspondant.



Réponse Question 5.3.1

$$A_y = B_y = 800 \text{ N}$$

Réponse Question 5.3.2

$$T_{AB} = 400 (2 - x) \text{ et } M_{fAB} = 200 x (x - 4)$$

Réponse Question 5.3.3

$$M_{fAB \text{ Maxi}} = -800 \text{ Nm}$$

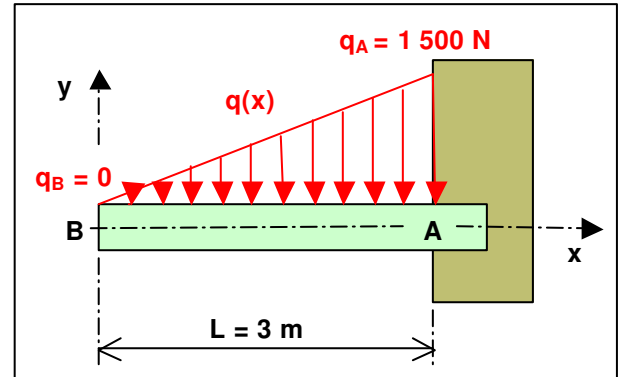
RESISTANCE DES MATERIAUX

1.4 Exercice 5.4

Etudions le cas d'une poutre (longueur $L = 3 \text{ m}$) encastrée en A, supportant la charge linéairement croissante $q(x)$ de la figure ci-contre.

Question 5.4.1 Déterminer les actions exercées par l'encastrement sur la poutre au point A ;

Question 5.4.2 Déterminer les expressions littérales de l'effort tranchant et du moment fléchissant le long de la poutre. Tracer les diagrammes respectifs.



Réponse Question 5.4.1

$$\begin{cases} A_y = 2250 \text{ N} \\ M_A = -2250 \text{ Nm} \end{cases}$$

Réponse Question 5.4.2

$$T_{BA} = -250 x^2 \text{ N} \text{ et } M_{fBA} = -\frac{250}{3} x^3 \text{ Nm}$$

1.5 Exercice 5.5

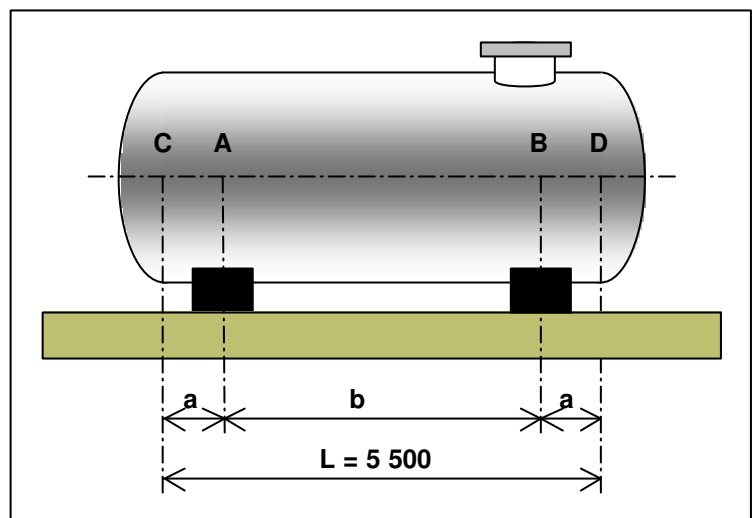
Une cuve cylindrique est en appui sur deux supports en A et B posés sur le sol. Le poids total de la cuve et du liquide qu'elle contient est schématisé par une charge répartie $q = 5000 \text{ daN.m}^{-1}$.

Question 5.5.1 Schématiser le problème (charges appliquées, actions aux appuis) ;

Question 5.5.2 Si $a = 1250$ et $b = 3000 \text{ mm}$, déterminer les actions sur les appuis en A et B ;

Question 5.5.3 Déterminer les expressions littérales de l'effort tranchant et du moment fléchissant entre C et D. Tracer les diagrammes respectifs ;

Question 5.5.4 Rechercher l'abscisse des points pour lesquels les moments fléchissants s'annulent.



RESISTANCE DES MATERIAUX

Réponse Question 5.5.2

$$A_x = B_x = 0 ; B_y = 137500 \text{ N et } A_y = 137500 \text{ N}$$

Réponse Question 5.5.3

$$T_{CA} = -50000 x \text{ N} ; M_{fCA} = 25000 x^2 \text{ Nm}$$

$$T_{AB} = (-50000 x + 137500) \text{ N} ; M_{fAB} = (25000 x^2 - 137500 x + 171875) \text{ Nm}$$

$$T_{BD} = (-50000 x + 275000) \text{ N} ; M_{fBD} = (25000 x^2 - 275000 x + 756250) \text{ Nm}$$

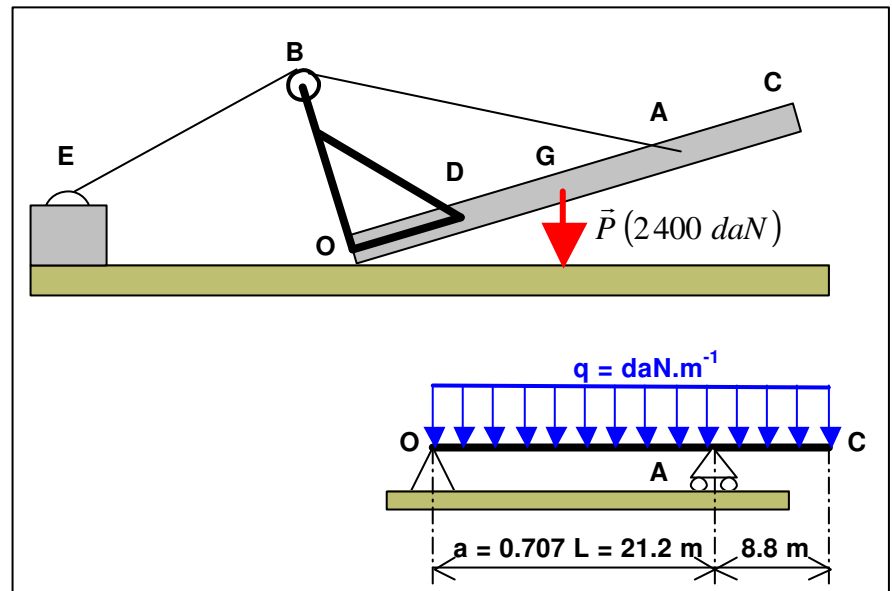
Réponse Question 5.5.4

$$x = \begin{cases} 3.58 \\ 1.92 \end{cases}$$

1.6 Exercice 5.6

Le levage d'un poteau télégraphique OC est réalisé au moyen d'un treuil situé en E, d'un câble accroché au poteau en A et d'un triangle rigide BOD solide du poteau. La longueur de ce poteau est de 30 m, et son poids est de 2 400 daN. On se place au départ du levage ; le poteau est alors schématisé par un poutre sur deux appuis en O et A. La charge répartie q schématise la poids de ce joyeux poteau.

Question 5.6.1 Déterminer la charge répartie q et les actions exercées par les appuis sur le poteau en O et A ;



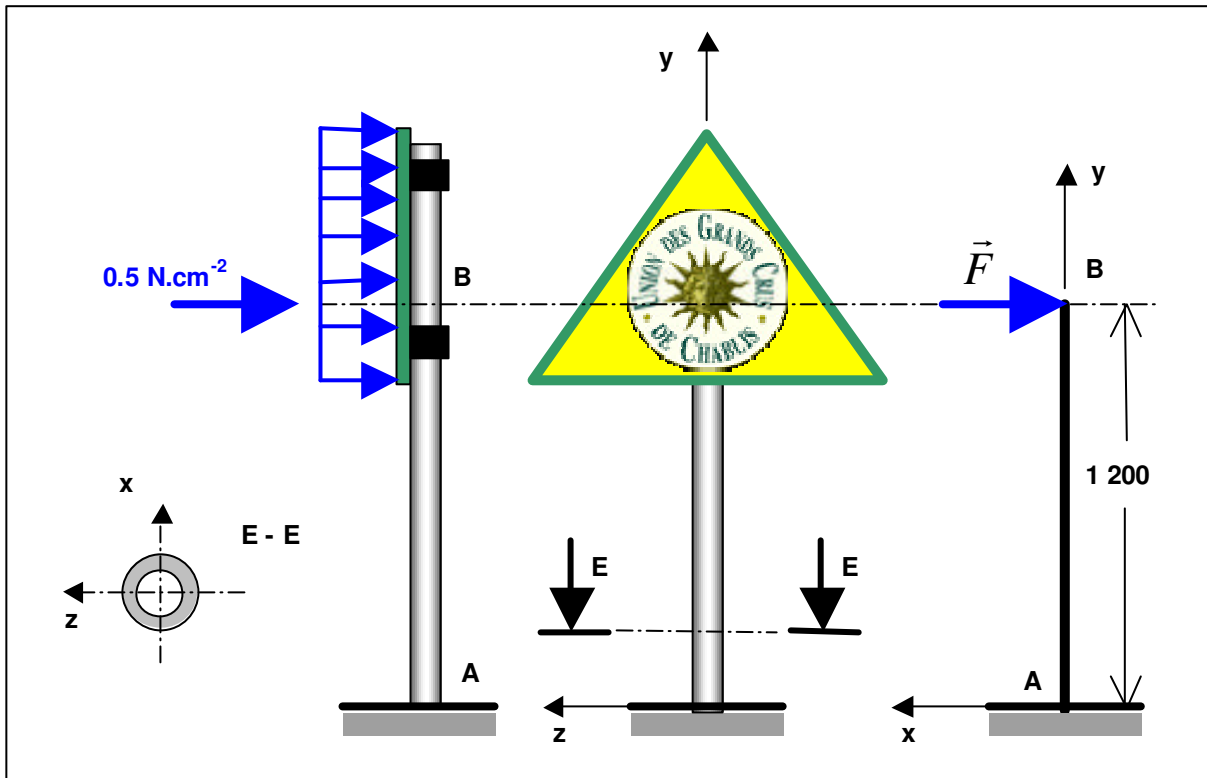
Question 5.6.2 Déterminer les expressions littérales de l'effort tranchant et du moment fléchissant le long de OC. Tracer les diagrammes respectifs ;

Question 5.6.3 Que deviennent les moments fléchissants maximaux lorsque a varie ? Quel est alors le cas le plus défavorable pour le levage ?

RESISTANCE DES MATERIAUX

1.7 Exercice 5.7

Un panneau indicateur de forme rectangulaire (triangle isocèle : base 1050, hauteur 900, barycentre B) supporte une charge $\vec{F}$ résultant de l'action exercée par le vent ($p = 0.5 \text{ N.cm}^{-2}$). Ce panneau est fixé à un poteau AB tubulaire ($D = 80, d = 74 \text{ mm}$).



Question 5.7.1 Déterminer F et les actions exercées sur le poteau par l'encastrement en A ;

Question 5.7.2 En déduire le moment fléchissant maximal dans le poteau AB et la contrainte maximale correspondante.

Réponse Question 5.7.1

$$F = 2362.5 \text{ N}$$

$$\begin{cases} A_x = 2362.5 \text{ N} \\ A_y = 0 \\ M_A = -2835 \text{ Nm} \end{cases}$$

Réponse Question 5.7.2

$$M_{f \text{ Maxi}} = 2835 \text{ Nm} \text{ et } \sigma_{\text{Maxi}} = 210.5 \text{ MPa}$$

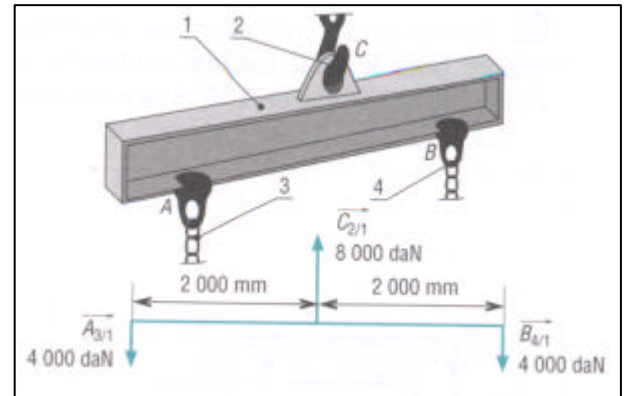
RESISTANCE DES MATERIAUX

1.8 Exercice 5.8

Un palonnier ABC est utilisé en manutention pour soulever des charges de grande longueur.

Question 5.8.1 Pour les charges indiquées, déterminer la valeur du moment fléchissant maximum entre A et B ;

Question 5.8.2 Si la contrainte admissible est de 100 MPa, déterminer un profilé IPER (voir tableau joint) pouvant convenir pour fabriquer ce palonnier.



I P E R

	h (mm)	b (mm)	a (mm)	e (mm)	S (cm ²)	kg.m ⁻¹	I_z (cm ⁴)	I_z/V_z (cm ³)	I_y (cm ⁴)	I_y/V_y (cm ³)
140	142	72	5,3	7,8	18,3	14,4	611	80	48,7	13,5
160	162	81	5,6	8,5	22,6	17,7	988	122	75,6	18,7
180	183	89	6,4	9,5	28,0	22,0	1 554	170	112	25,2
200	204	98	6,6	10,5	33,9	26,6	2 363	232	166	33,8
220	225	108	6,7	11,8	40,2	31,6	3 474	309	249	46,0
240	245	118	7,5	12,3	47,5	37,3	4 823	394	339	57,4
270	276	133	7,7	13,1	55,9	43,9	7 312	530	516	77,6
300	306	147	8,5	13,7	65,9	51,7	10 499	686	728	99,1
330	336	158	9,2	14,5	76,8	60,3	14 688	874	958	121,0
360	366	168	9,9	16,0	89,6	70,3	20 288	1 109	1 270	151,0
400	407	178	10,6	17,0	104,0	81,5	28 862	1 418	1 606	180,0
450	458	188	11,3	18,6	121,0	95,2	42 395	1 851	2 069	220,0
500	508	198	12,6	20,0	142,0	111,0	59 932	2 360	2 600	263,0
550	560	210	14,0	22,2	170,0	137,7	86 579	3 092	3 447	328,0
600	600	218	14,0	23,0	185,0	144,4	110 307	3 628	3 992	366,0

Réponse Question 5.8.1

$$M_{fACMaxi} = 80000 Nm$$

Réponse Question 5.8.2

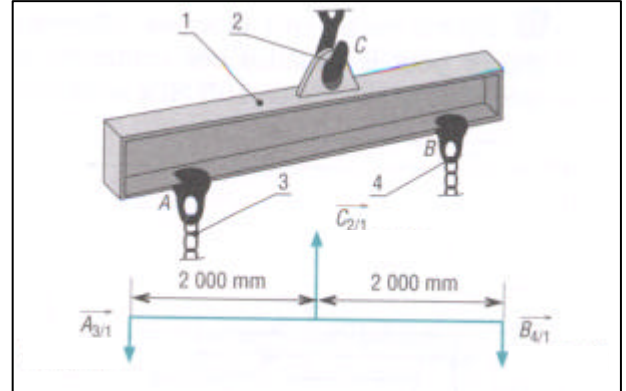
IPER de 330

RESISTANCE DES MATERIAUX

1.9 Exercice 5.9

Un palonnier ABC est utilisé en manutention pour soulever des charges de grande longueur. On utilise pour réaliser ce palonnier un profilé I PER de 270 (voir tableau dans l'exercice précédent).

Question 5.9.1 Si la contrainte admissible est de 100 MPa, quelle est la charge totale $\vec{C}_{2/1}$ admissible pour le levage ?



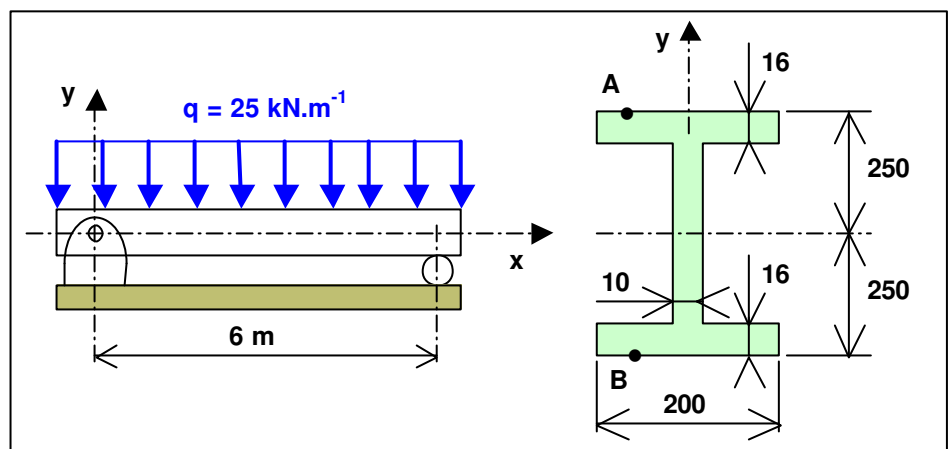
Réponse Question 5.9.1

$$C_{2/1} = 53000 \text{ N}$$

1.10 Exercice 5.10

La poutre proposée supporte une charge répartie q de 25 kN.m⁻¹.

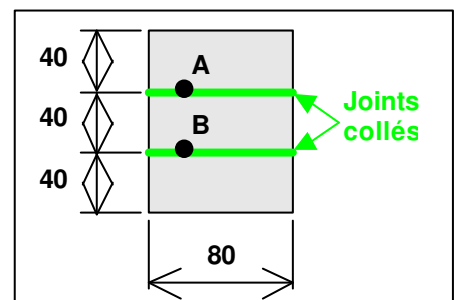
Question 5.10.1 Compte tenu des dimensions de la section, déterminer la contrainte maximale exercée.



1.11 Exercice 5.11

Une joyeuse poutre est réalisée à partir de trois poutres (non moins joyeuses mais plus on est de fous, plus on rigole) en bois collées entre elles.

Question 5.11.1 Si la contrainte de cisaillement admissible dans le joint collé est de 0.7 MPa, déterminer l'effort tranchant T maximal supportable.



RESISTANCE DES MATERIAUX

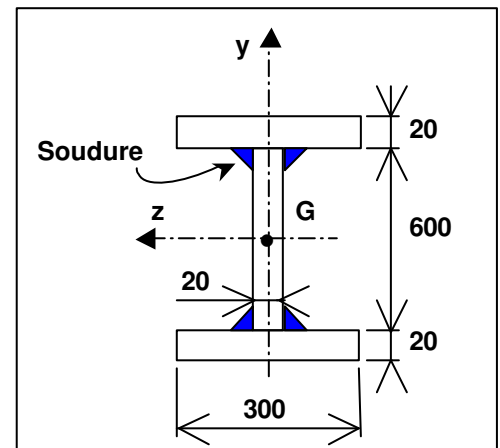
Réponse Question 5.11.1

$$T \leq 5040 \text{ N}$$

1.12 Exercice 5.12

Une poutre en I est réalisée à partir de tôles d'acier d'épaisseur 20 mm collées ensemble.

Question 5.12.1 Si l'effort tranchant T est de 500 kN, déterminer la charge supportée par chaque cordon et par unité de longueur.

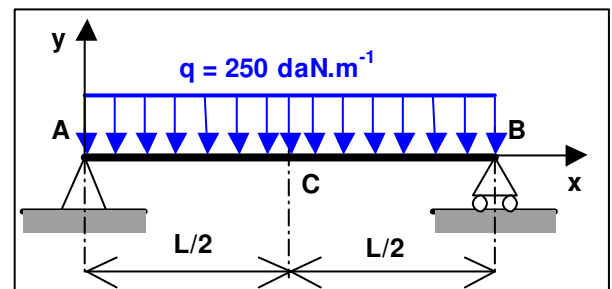


1.13 Exercice 5.13

Considérons la poutre ci-contre, de longueur $L = 4 \text{ m}$, soumise à une charge répartie q sur toute sa longueur.

Question 5.13.1 Déterminer les actions des appuis A et B sur la poutre ;

Question 5.13.2 Déterminer l'équation de la déformée, en fonction de L et x ;



Question 5.13.3 Calculer la flèche maximale. Application numérique : $q = 250 \text{ daN.m}^{-1}$, $I = 869 \text{ cm}^4$, $L = 4 \text{ m}$, $E = 20\,000 \text{ daN.mm}^2$;

Question 5.13.4 Déterminer θ_A la pente maximale en A.

Réponse Question 5.13.1

$$A = B = 500 \text{ daN}$$

Réponse Question 5.13.2

$$y_{AB} = \frac{q}{24 E I} (2 L x^3 - x^4 + L^3 x)$$

RESISTANCE DES MATERIAUX

Réponse Question 5.13.3

$$f_{Maxi} = -\frac{5 q L^4}{384 E I}$$

Réponse Question 5.13.4

$$\theta_A = -0.22^\circ$$

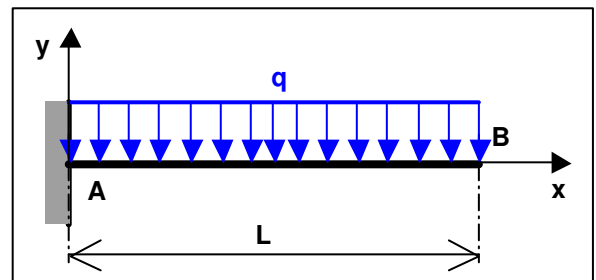
1.14 Exercice 5.14

Considérons la poutre ci-contre, de longueur L , encastree au point A et soumise à une charge répartie q sur toute sa longueur.

Question 5.14.1 Déterminer les actions de l'encastrement au point A sur la poutre ;

Question 5.14.2 Déterminer l'équation de la déformée, en fonction de L et x ;

Question 5.14.3 Exprimer la flèche maximale (au point B) ainsi que la pente maximale au point B (θ_B) ;



Réponse Question 5.14.1

$$\begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = q L \\ M_A = \frac{q L^2}{2} \end{cases}$$

Réponse Question 5.14.2

$$y_{AB} = \frac{q x^2}{24 E I} (-x^2 + 4 L x - 6 L^2)$$

Réponse Question 5.14.3

$$f_B = -\frac{q L^4}{8 E I} \text{ et } \theta_B = -\frac{q L^3}{6 E I}$$

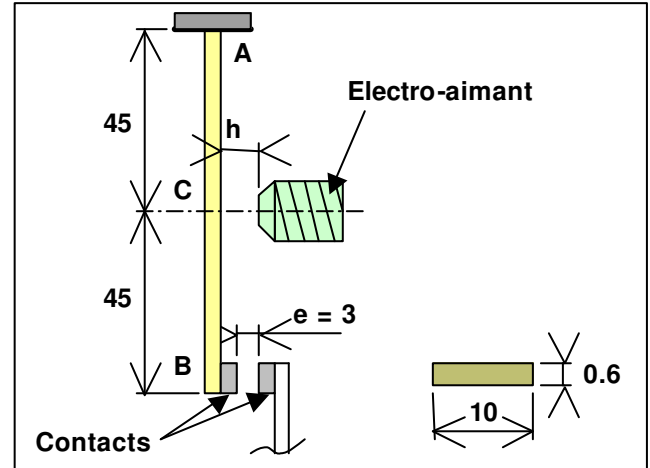
RESISTANCE DES MATERIAUX

1.15 Exercice 5.15

Un relais électrique à contacts est réalisé à partir d'une lame parallélépipédique ($90 \times 10 \times 0.6$) en laiton encastrée en A. La manœuvre est effectuée en C par un électro-aimant placé à la distance h de la lame (au repos).

Question 5.15.1 Si l'écartement des contacts en B est $e = 3$ mm, déterminer la force nécessaire que doit exercer l'électro-aimant pour établir le contact ;

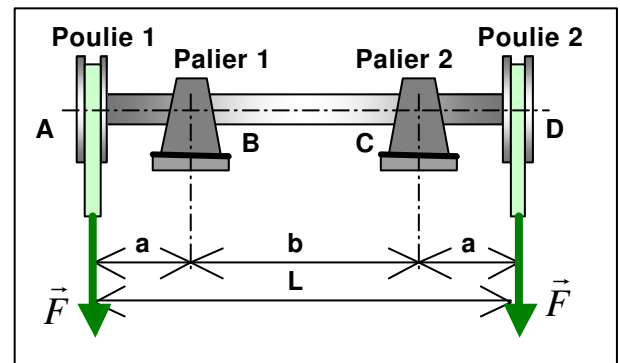
Question 5.15.2 A partir de quelles valeurs de h le contact est-il possible ? (module d'élasticité longitudinale du laiton $E = 100$ GPa).



1.16 Exercice 5.16

Un arbre est guidé en rotation par deux paliers à roulements en B et C et supporte deux poulies à ses extrémités A et D. $\vec{F}$ schématise la charge exercée par les poulies.

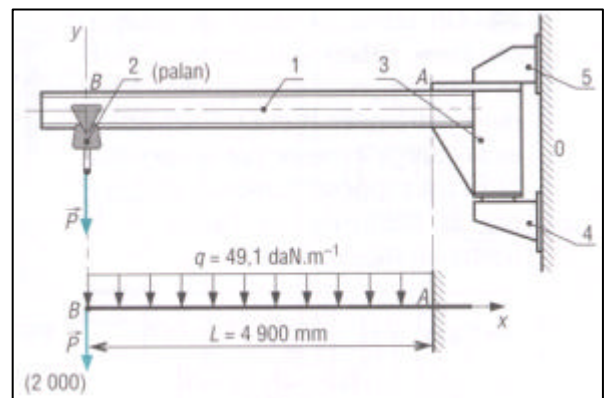
Question 5.16.1 Si EI est supposé constant, déterminer les expressions littérales de la déformée de l'arbre et la flèche au milieu de BC.



1.17 Exercice 5.17

Une poutre principale de potence de manutention est réalisée à partir d'un profilé IPE de 330 ($I_z = 11\,770$ cm⁴). La poutre supporte une charge concentrée $P = 2\,000$ N en B (action d'un palan). Son poids est schématisé par la charge répartie $q = 49.1$ daN.m⁻¹ sur toute sa longueur.

Question 5.17.1 Déterminer la déformée de la poutre et la flèche maximale ($E = 200$ GPa).



Voilà, c'est tout pour aujourd'hui...