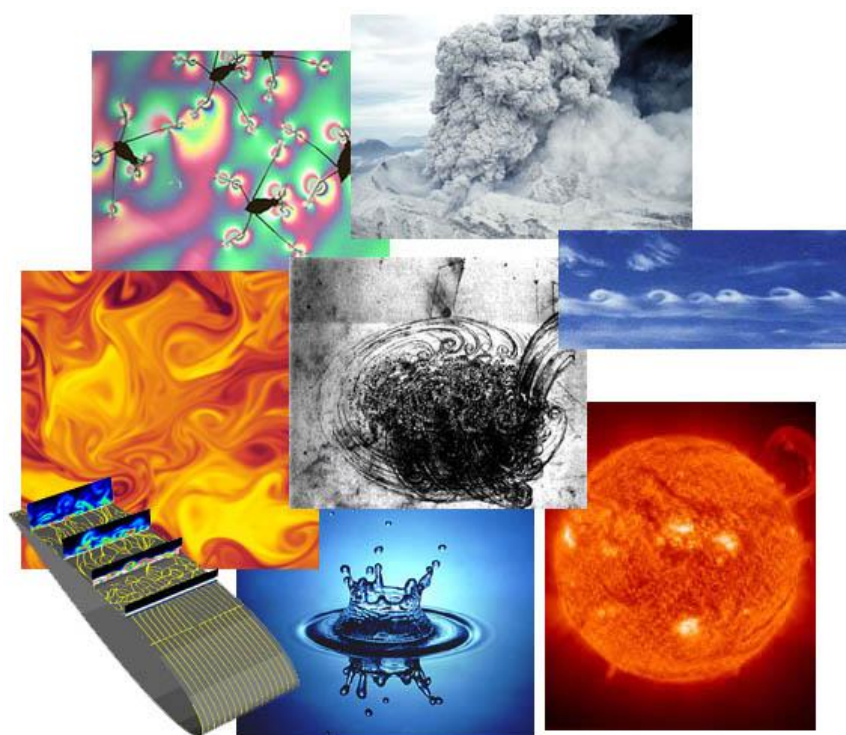

Polycopié d'exercices et examens résolus: Mécanique des Fluides



M. Bourich
Deuxième édition 2014

AVANT-PROPOS

Ce recueil d'exercices et problèmes examens résolus de mécanique du fluide est un support pédagogique destiné aux étudiants de la deuxième année de l'école National des Sciences Appliquées de Marrakech. Ces exercices couvrent les cinq chapitres du polycopié de cours de la mécanique des fluides:

-  Etude phénoménologique des fluides.
-  Cinématique des fluides.
-  Bilans dynamique et thermodynamique
-  Dynamique locale des fluides parfaits.
-  Fluides visqueux incompressible

L'ensemble des exercices et examens résolus devrait permettre aux étudiants :

-  de consolider leurs connaissances,
-  un entraînement efficace afin de s'assurer que le cours est bien assimilé,
-  d'acquérir les outils et techniques nécessaires à leur formation,
-  d'initier leurs cultures scientifique en mécanique des fluides.

Comme pour tous les exercices auto-correctifs, les solutions profitent plus aux étudiants qui fournissent l'effort nécessaire pour réfléchir et essayer de résoudre les exercices proposés. Je dois souligner que ce document ne remplace en aucun cas le TD en présentiel.

Je souhaite que ce recueil d'exercices et problèmes examens résolus de mécanique des fluides puisse aider de manière efficace l'ensemble d'étudiants.

M. Bourich

Illustration de couverture :

Simulation des Phénomènes Physiques

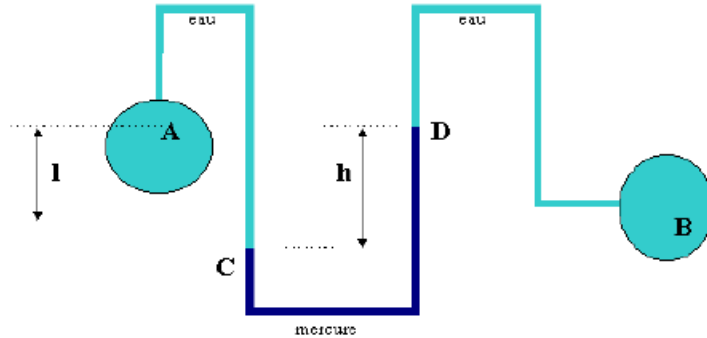
(Source <http://www.enseignement.polytechnique.fr/KSUP/mecanique/>)

L'illustration de couverture présente quelques images de la modélisation et la simulation des phénomènes physiques de toutes échelles régissant in fine les réponses des structures et systèmes mécaniques "naturels" ou "industriels". Le programme de Master proposé L'École Polytechnique forme pour cela à l'usage d'outils et méthodes de modélisation et de simulation adaptées aux comportements des matériaux comme des structures, aux problématiques de durabilité, de météorologie et d'environnement, ainsi qu'aux instabilités et interactions en Mécanique des fluides.

Exercice 1

On considère deux récipients A et B reliés par un tube $ACDB$. Les récipients A et B ainsi que les portions AC et DB du tube contiennent de l'eau. La portion CD contient du mercure. On connaît : $P_A = 28 \text{ bars}$, $P_B = 14 \text{ bars}$, $l = 2 \text{ m}$.

Déterminer la dénivellation $h = z_C - z_D$ du mercure.



Corrigé :

Appliquons la loi de l'hydrostatique entre A et C , C et D puis D et B :

$$P_A + \rho_{\text{eau}} g z_A = P_C + \rho_{\text{eau}} g z_C$$

$$P_C + \rho_{\text{Hg}} g z_C = P_D + \rho_{\text{Hg}} g z_D$$

$$P_D + \rho_{\text{eau}} g z_D = P_B + \rho_{\text{eau}} g z_B$$

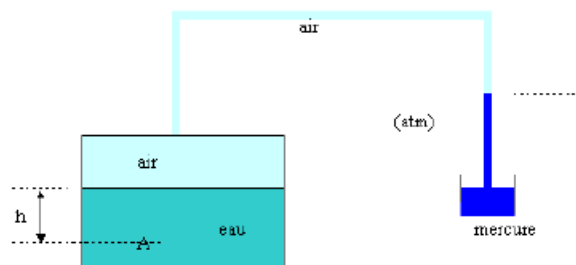
Effectuons ensuite la somme de ces trois équations membre à membre. Les pressions en C et D s'annulent et en remplaçant $z_A - z_B$ par l et $z_D - z_C$ par h , on en déduit le résultat suivant :

$$h = (P_B - P_A - \rho_{\text{eau}} g l) / g(\rho_{\text{eau}} - \rho_{\text{Hg}})$$

Application numérique : $h = 11,51 \text{ m}$

Exercice 2

Dans le circuit ci-dessous, calculer la pression en A .



Données : $H = 34,3 \text{ cm}$, $h = 53 \text{ cm}$, $\rho_{\text{eau}} = 1,05 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et $\rho_{\text{mercure}} = 13,57 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

Corrigé :

Pour appliquer la loi de l'hydrostatique, la règle d'or est de choisir correctement les points entre lesquels la loi sera appliquée. Il suffit de prendre ces points dès qu'il y a une interface (liquide-liquide, liquide-gaz ou liquide-solide).

Dans l'exemple qui nous intéresse, appelons :

- B un point situé à l'interface eau-air dans la cuve de gauche,
 - C un point situé à l'interface air-mercure dans la conduite reliant la cuve au réservoir de mercure,
 - D un point situé à l'interface mercure-air sur la surface libre du réservoir de mercure.
- D'après l'énoncé, on connaît :

$$\begin{aligned} P_D &= P_{\text{atm}} \\ z_B - z_A &= h \\ z_C - z_D &= H \end{aligned}$$

Appliquons la loi de l'hydrostatique entre A et B , B et C , C et D :

$$\begin{aligned} P_A + \rho_{\text{eau}} g z_A &= P_B + \rho_{\text{eau}} g z_B \\ P_B + \rho_{\text{air}} g z_B &= P_C + \rho_{\text{air}} g z_C \\ P_C + \rho_{\text{Hg}} g z_C &= P_D + \rho_{\text{Hg}} g z_D \end{aligned}$$

En effectuant la somme de ces trois équations et en considérant que $\rho_{\text{air}} = 0$, on en déduit le résultat :

$$P_A = P_{\text{atm}} + g(h\rho_{\text{eau}} - H\rho_{\text{Hg}})$$

Application numérique : $P_A = 6.104 \text{ Pa}$.

Exercice 3

Que vaut la pression atmosphérique quand le baromètre à mercure indique 742 mm ?

Corrigé :

On définit le point A à l'interface entre le vide et le mercure et le point B entre le mercure et l'atmosphère. On a donc $P_A = 0$ et $P_B = P_{\text{atm}}$. Par ailleurs, $z_A - z_B = H$. La loi de l'hydrostatique appliquée entre A et B :

$$P_A + \rho_{\text{Hg}} g z_A = P_B + \rho_{\text{Hg}} g z_B$$

conduit au résultat :

$$P_{\text{atm}} = \rho_{\text{Hg}} g H$$

Application numérique : $P_{\text{atm}} = 0.99 \text{ bar}$.

Exercice 4

Quelle est la pression dans l'océan à une profondeur $H = 1500 \text{ m}$?

On prendra $\rho = 1005 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (eau salée).

Corrigé :

Appliquons la loi de l'hydrostatique entre le point A situé à la surface de la mer et le point

B situé à une profondeur H :

$$P_A + \rho g z_A = P_B + \rho g z_B$$

avec $P_A = P_{atm}$ et $z_A - z_B = H$.

On en déduit que : $P_B = P_{atm} + \rho g H$

Application numérique : $P_B = 148,9$ bars.

Exercice 5

On considère un réservoir circulaire (diamètre $d = 1\text{ m}$). Un piston repose sur la surface libre de l'huile (densité $d_H = 0,86$) qui remplit le réservoir et le tube (pas de frottement et étanchéité parfaite entre le piston et le réservoir). Le manomètre donne la pression absolue à l'extrémité du tube : 2 bars.

On connaît : $h = 10\text{ m}$.

Déterminer la masse du piston

Corrigé :

Détermination des points entre lesquels nous allons appliquer la loi de l'hydrostatique (dans le cas d'un fluide) ou loi de la mécanique (dans le cas d'un solide) :

Nom du point

Location du point

Point A

Interface air / piston

Point B

Interface piston / huile

Point C

Extrémité du tube (pression donnée par le manomètre)

Entre A et B : La pression en B résulte de la pression en A plus de celle due au poids du piston.

Entre B et C : On applique la loi de l'hydrostatique :

$$P_B + \rho_{\text{huile}} g z_B = P_C + \rho_{\text{huile}} g z_C$$

On connaît P_C , $P_A = P_{atm}$ et $z_C - z_B = h$. On en déduit la valeur de M :

$$M = \frac{\pi d^2}{4g} (P_C + \rho_{\text{huile}} g h - P_{atm})$$

avec : $\rho_{\text{huile}} = \rho_{\text{eau}} d_H$.

Application numérique : $M = 14,76$ tonnes.

Exercice 6

Le tube en U contient du mercure (densité 13,57). Densité de l'huile : 0,75. Quelle est la pression au manomètre ?

Corrigé :

Détermination des points entre lesquels nous allons appliquer la loi de l'hydrostatique :

Nom du point

Point A

Point B

Point C

Point D

Location du point

Dans l'huile au niveau du manomètre

Interface huile / air

Interface air / mercure

Interface mercure / atmosphère

$$P_A + \rho_{eau} g z_A = P_B + \rho_{eau} g z_B$$

$$P_B + \rho_{air} g z_B = P_C + \rho_{air} g z_C$$

$$P_C + \rho_{Hg} g z_C = P_D + \rho_{Hg} g z_D$$

Application de la loi de l'hydrostatique :

$$P_A + \rho_{huile} g z_A = P_B + \rho_{huile} g z_B$$

$$P_B + \rho_{air} g z_B = P_C + \rho_{air} g z_C$$

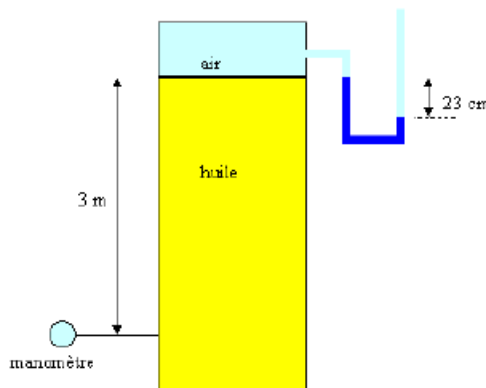
$$P_C + \rho_{Hg} g z_C = P_D + \rho_{Hg} g z_D$$

On connaît P_A , $P_C = P_{atm}$, $z_B - z_A = H$, $z_C - z_D = h$ et $\rho_{air} = 0$. En effectuant la somme des trois équations ci-dessus, on en déduit la valeur de la pression en A :

$$P_A = P_{atm} - \rho_{Hg} g h + \rho_{huile} g H$$

Application numérique : ($H = 3$ m, $h = 23$ cm, $P_{atm} = 105$ Pa, $g = 9,81$ m/s²)

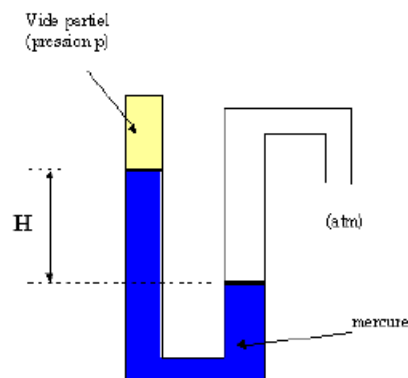
$$P_A = 6,96104 \text{ Pa.}$$



Exercice 7

Dans le baromètre schématisé ci-dessous, déterminer la relation entre la pression absolue P du vide partiel et la hauteur H . Quelle est la valeur maximale de H ?

Corrigé :



Détermination des points entre lesquels nous allons appliquer la loi de l'hydrostatique :

<i>Nom du point</i>	<i>Location du point</i>
Point A	Interface vide / mercure
Point B	Interface mercure / atmosphère

Application de la loi de l'hydrostatique :

$$P_A + \rho_{Hg}gz_A = P_B + \rho_{Hg}gz_B$$

On connaît $P_A = P$, $z_A - z_B = H$ et $P_B = P_{atm}$. On en déduit le résultat :

$$H = P_{atm} - P / \rho_{Hg}g$$

La valeur maximale de H est obtenue pour $P = 0$:

$$A.N : (\rho_{Hg} = 13600 \text{ kg.m}^{-3}, P_{atm} = 105 \text{ Pa}, g = 9,81 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}) H_{max} = 0,75 \text{ m}.$$

Exercice 8

On considère le manomètre constitué d'un réservoir de section $S_1 = 80 \text{ cm}^2$ et d'un tube de section $S_2 = 0,8 \text{ cm}^2$. Quand on applique la pression effective p , le niveau monte dans le tube : $h = 20 \text{ cm}$.

Quelle est l'erreur commise sur la détermination de la pression effective p en négligeant l'abaissement du niveau du réservoir ?

Corrigé :

Détermination des points entre lesquels nous allons appliquer la loi de l'hydrostatique :

<i>Nom du point</i>	<i>Location du point</i>
Point A	Interface air à la pression P / mercure
Point B	Interface mercure / atmosphère

Application de la loi de l'hydrostatique :

$$P_A + \rho_{Hg}gz_A = P_B + \rho_{Hg}gz_B$$

On connaît $P_A = P + P_{atm}$, $z_A - z_B = h + h'$ où h' est l'abaissement de la surface de mercure dans la section S_1 et $P_B = P_{atm}$. On en déduit le résultat :

$$P = \rho_{Hg}g(h + h')$$

Le volume de mercure qui manque dans la section S_1 est égal à celui apparu dans la section S_2 .

Cela se traduit par : $h'S_1 = hS_2$. On en déduit que :

$$P = \rho_{Hg}gh(1 + S_2/S_1)$$

Si on néglige l'abaissement du niveau du réservoir ($h' = 0$), on trouve $P_{approx} = \rho_{Hg}gh$.

L'erreur commise est :

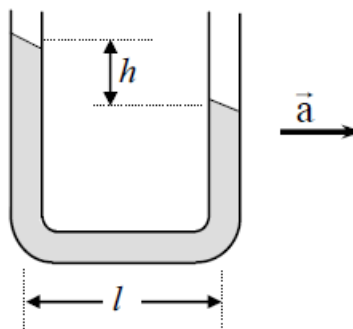
$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{P - P_{approx}}{P_{approx}} = \frac{S_2}{S_1}$$

Application numérique :

$$\frac{\Delta P}{P} = 1\%$$

Exercice 9

Formuler l'équation fondamentale de la statique des fluides dans le cas où le fluide est uniformément accéléré. Appliquer ce résultat au cas d'un tube en U partiellement rempli d'un liquide et subissant une accélération uniforme $\vec{a}$ horizontale (voir figure 1.1). Les deux branches du U étant distantes de l , trouver ainsi la différence de niveau h due à cette accélération.



Corrigé :

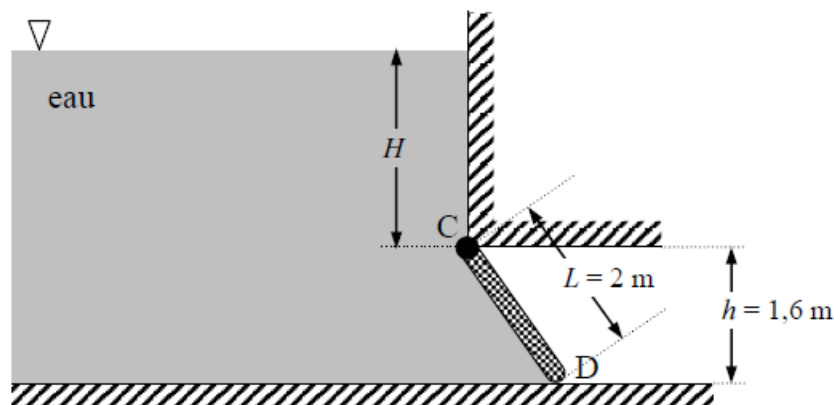
L'équation fondamentale de la statique des fluides dans le cas où le fluide est uniformément accéléré :

$$\vec{\nabla}p = \rho(\vec{g} - \vec{a}) \text{ et } h = al/g$$

Exercice 10

La porte rectangulaire CD de la figure suivante a pour longueur $L = 2$ m et largeur $l = 1,8$ m (suivant la perpendiculaire au plan de la figure). Son épaisseur étant négligeable, on donne la masse surfacique du matériau homogène la constituant : $\sigma = 5110 \text{ kg.m}^{-2}$. Cette porte a la possibilité de pivoter autour de l'axe C. On se propose de déterminer la hauteur d'eau H à partir de laquelle la porte s'ouvre pour laisser l'eau s'écouler.

1. Déterminer la force de pression hydrostatique s'exerçant sur la porte.
2. Déterminer la position du point d'application de cette force.
3. Calculer, d'une part le moment de la force hydrostatique par rapport à l'axe de rotation, et d'autre part le moment du poids de la porte par rapport à l'axe de rotation. En déduire la hauteur d'eau H nécessaire pour qu'il y ait ouverture automatique de la porte.



Corrigé :

1. La force de pression hydrostatique s'exerçant sur la porte est donnée par :

$$F = \rho g L(h/2 + H)$$

2. La position du point d'application de cette la force de pression hydrostatique s'exerçant sur la porte :

$$CA = L(H + 2/3 h)/(2H + h)$$

3. La hauteur d'eau H nécessaire pour qu'il y ait ouverture automatique de la porte:

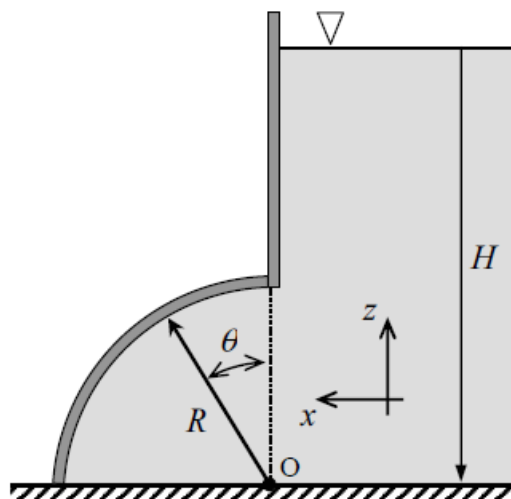
$$H > \frac{\sigma}{\rho} \sqrt{1 - (h/L)^2} - 2/3 h$$

AN : soit $H > 2m$

Exercice II

On cherche à caractériser la force de pression hydrostatique s'exerçant sur l'arc circulaire de la figure suivante. On raisonnera sur une largeur unité.

1. Exprimer la pression hydrostatique en tout point de l'arc en fonction de H, R, ρ , g et θ .
2. En déduire les deux composantes dF_x et dF_z de la force de pression élémentaire en chaque point de l'arc.
3. Exprimer les deux résultantes F_x et F_z en fonction de H, R, ρ , g et θ .
4. Si on note A le point de l'arc où s'applique la force, montrer que le moment de cette force par rapport au point O est nul. En déduire, en fonction de H et R, l'expression de l'angle θ_A repérant la position de A.
5. Quelles valeurs limites peut prendre l'angle θ_A en fonction des variations de H ?



Corrigé :

1. La pression hydrostatique en tout point de l'arc est donnée par :

$$p(\theta) = \rho g(H - R \cos \theta)$$

2. Les deux composantes dF_x et dF_z de la force de pression élémentaire en chaque point de l'arc sont données par :

$$\begin{cases} dF_x = \rho g(H - R \cos \theta) R \sin \theta d\theta \\ dF_z = \rho g(H - R \cos \theta) R \cos \theta d\theta \end{cases}$$

3. Les expressions des deux résultantes F_x et F_z sont données par :

$$\begin{cases} F_x = \rho g(H - R/2) \\ F_z = \rho g(H - \pi R/4) \end{cases}$$

4. Le moment de cette force par rapport au point O est nul puisque : $\vec{OA} \parallel \vec{F}$ car $\vec{F} \perp$ paroi.

L'expression de l'angle θ_A repérant la position de A est donnée par : $\tan(\theta_A) = \frac{F_x}{F_z} = \frac{H - R/2}{H - \pi R/4}$

5. Les limites de l'angle θ_A sont obtenus pour :

$$\begin{cases} H = R \Rightarrow \theta_{Amax} = 66.78^\circ \\ H \rightarrow \infty \Rightarrow \theta_{Amax} = 45^\circ \end{cases}$$

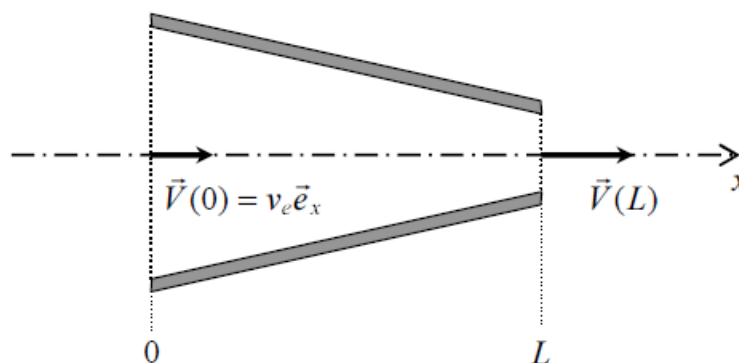
Exercice 12

On considère l'écoulement stationnaire et unidimensionnel d'un fluide incompressible à l'intérieur de la buse représentée sur figure suivante. La vitesse du fluide le long de l'axe est donnée par :

$$\vec{V} = v_e \left(1 + x/L\right) \vec{e}_x$$

ou v_e est la vitesse à l'entrée de la buse et L sa longueur.

1. Déterminer l'accélération d'une particule fluide traversant la buse le long de l'axe.
2. Déterminer, en fonction du temps, la position d'une particule initialement située à l'entrée de la buse. En déduire son accélération.
3. Les deux accélérations calculées sont-elles différentes ? Pourquoi



Corrigé :

1. L'accélération d'une particule fluide traversant la buse le long de l'axe est donnée par :

$$\vec{\gamma} = \frac{v_e^2}{L} \left(1 + \frac{x}{L}\right) \vec{e}_x$$

2. La position d'une particule initialement située à l'entrée de la buse est :

$$x(t) = L(e^{\frac{v_e t}{L}} - 1)$$

et son accélération est donnée par :

$$\gamma = \frac{v_e^2}{L} e^{\frac{v_e t}{L}}$$

3. Les deux accélérations calculées sont identiques puisque :

$$\gamma(x(t)) = \gamma(t)$$

Exercice 13

On peut modéliser l'écoulement plan d'un tourbillon par superposition des deux écoulements plans suivants: un puits de débit $-q_v < 0$ situé à l'origine, et un vortex de circulation $-\Gamma < 0$ centré sur l'origine.

- Déterminer le potentiel complexe de l'écoulement résultant. En déduire le potentiel des vitesses et la fonction de courant.
- Déterminer l'équation d'une ligne de courant. En déduire l'allure des lignes de courant et des équipotentielles.
- Déterminer le champ de vitesse et vérifier que l'écoulement est irrotationnel. Calculer la circulation du vecteur vitesse sur un cercle centré sur l'origine. Calculer le débit volumique à travers le même cercle. Que peut-on remarquer ? Quelle propriété remarquable présente l'angle $(\vec{v}, \vec{e}_r)$?
- Donner les coordonnées $r(t)$ et $\theta(t)$ d'une particule se trouvant à $r = r_0$ et $\theta = 0$ à l'instant $t = 0$. Quel temps met-elle pour atteindre l'origine ?
- L'écoulement étant irrotationnel, la dynamique des fluides permet de montrer que dans ce cas la pression totale $P_t = P + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2$ est constante en tout point de l'écoulement, c'est-à-dire $\forall r, \theta, z, P$ étant la pression hydrostatique, et z repérant un plan horizontal dans lequel s'observe l'écoulement plan étudié précédemment. On considère alors un réservoir d'eau d'étendue infinie et de profondeur h (selon l'axe z) qui serait le siège d'un tel tourbillon. Déterminer la pression totale P_t en un point de la surface libre, loin du tourbillon dont l'axe est confondu avec l'axe z . En déduire l'équation de la surface libre en fonction des coordonnées de l'espace (r, θ, z) . Schématiser l'allure de cette surface libre.

Corrigé :

1. Le potentiel complexe de l'écoulement résultant :

$$f(z) = -\frac{q_v}{2\pi} \ln z + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$$

Les potentiels des vitesses et la fonction de courant sont déterminés à partir du potentiel complexe de l'écoulement résultant :

$$\begin{cases} \varphi(r, \theta) = -\frac{q_v}{2\pi} \ln z + i \frac{\Gamma}{2\pi} \theta : \text{potentiel de vitesse} \\ \psi(r, \theta) = -\frac{q_v}{2\pi} \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + cte : \text{fonction de courant} \end{cases}$$

2. L'équation d'une ligne de courant est donnée par :

$$r(\theta) = r_0 e^{\frac{q_v}{\Gamma} \theta}$$

l'allure des lignes de courant et des équipotentiels : spirales partant de l'origine.

3. Le champ de vitesse :

$$\begin{cases} v_r = -\frac{q_v}{2\pi} \frac{1}{r} \\ v_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} \end{cases}$$

On $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow$ l'écoulement est irrotationnel.

La circulation du vecteur vitesse sur un cercle centré sur l'origine est donnée par : $\Gamma_R = -\Gamma$

Le débit volumique à travers le même cercle : $Q_r = -q_v$.

On a $(\vec{v}, \vec{e}_r) = \alpha$ avec $\cos \alpha = -q_v / \sqrt{q_v^2 + \Gamma^2}$

4. les coordonnées $r(t)$ et $\theta(t)$ d'une particule se trouvant à $r = r_0$ et $\theta = 0$ à l'instant $t = 0$:

$$\begin{cases} r(t) = \sqrt{r_0^2 - \frac{q_v}{\pi} t} \\ \theta(t) = \frac{\Gamma}{2q_v} \ln \left(1 - \frac{q_v}{\pi} \frac{t}{r_0^2} \right) \end{cases}$$

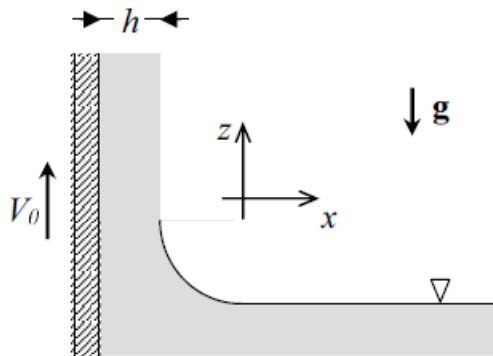
Le temps met par la particule pour atteindre l'origine : $\Delta t = \frac{\pi}{q_v} r_0^2$.

5. L'équation de la surface libre est donnée par :

$$z(r) = h - \left(\frac{q_v^2 + \Gamma^2}{8\pi^2 g} \right) \frac{1}{r^2}$$

Exercice 14

Une lame de verre partiellement immergée dans un liquide visqueux est tirée verticalement vers le haut avec une vitesse constante V_0 , comme l'illustre la figure suivante. Grâce aux forces de viscosité, la lame entraîne dans son mouvement ascendant un film de liquide d'épaisseur h . A l'opposé, les forces de pesanteur vont agir de façon à entraîner le film fluide vers le bas. En supposant l'écoulement laminaire, permanent et uniforme, déterminer l'expression de la vitesse moyenne du film fluide lorsque son mouvement est globalement ascendant (on négligera la tension superficielle).



Corrigé :

Avec les hypothèses de l'écoulement laminaire, permanent et uniforme, l'expression de la vitesse moyenne du film fluide lorsque son mouvement est globalement ascendant est donnée par :

$$V = V_0 + \frac{\rho g}{\mu} \left(\frac{x^2}{2} - hx \right) \Rightarrow \langle V \rangle = V_0 - \frac{\rho g h^2}{3\mu}$$

Exercice 15

On considère le système constitué d'un fluide visqueux, incompressible, remplissant l'espace compris entre deux cylindres infiniment longs de même axe. Le cylindre intérieur, de rayon r_0 , tourne à la vitesse angulaire constante ω_0 , alors que le cylindre extérieur, de rayon r_l , est maintenu fixe. On considérera l'écoulement du fluide permanent et on négligera les forces de pesanteur.

1. Etablir les équations différentielles qui régissent l'écoulement du fluide.
2. Montrer que l'expression de la vitesse $v_\theta = ar + b/r$ est solution. Déterminer les constantes a et b .
3. Déterminer les contraintes et en déduire l'expression du couple nécessaire pour assurer une rotation du cylindre intérieur à vitesse angulaire constante. Quelle peut être l'utilité d'un tel dispositif ?

Corrigé :

1. Les équations différentielles qui régissent l'écoulement du fluide sont données par les équations de Navier-Stokes comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dp}{dr} = \rho \frac{v_\theta^2}{r} \\ \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_\theta}{dr} \right) = \frac{v_\theta}{r} \end{cases}$$

2. L'expression de la vitesse est donnée par :

$$v_\theta(r) = -\frac{\omega_0 r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} \left(r - \frac{r_1^2}{r} \right)$$

3. L'expression du couple nécessaire pour assurer une rotation du cylindre intérieur à vitesse angulaire constante :

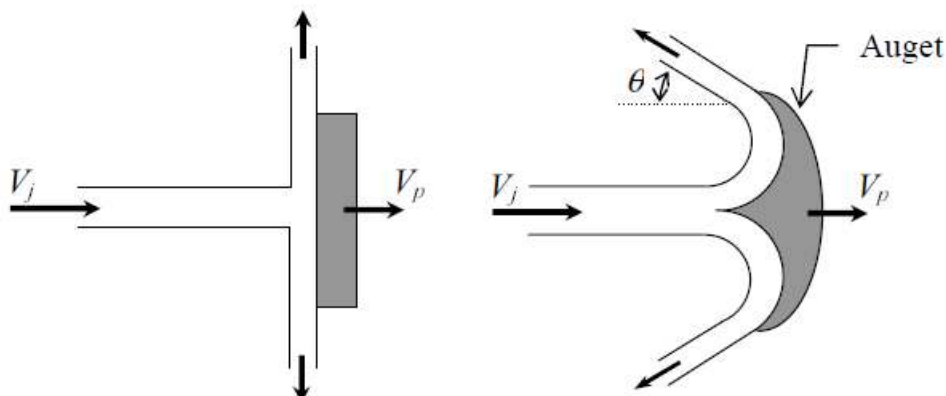
$$\vec{C} = 4\pi\omega_0 \frac{r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} \mu \vec{e}_z$$

L'utilité d'un tel dispositif est de mesurer μ : c'est un viscosimètre.

Exercice 16

Un jet d'eau de vitesse $\vec{V}_j$ heurte normalement une plaque plane qui se déplace à la vitesse $\vec{V}_p$ dans le même sens que le jet comme indiqué sur la figure suivante. L'eau sera supposée incompressible et son écoulement uniforme et stationnaire.

1. La section du jet incident est S_j . On négligera les poids du jet et de la plaque et on supposera que le jet se divise en deux demi-jets égaux de sections $S_j/2$, l'un dirigé vers le haut et l'autre vers le bas. En se plaçant dans le référentiel de la plaque, appliquer le théorème d'Euler pour déterminer la force exercée par le jet sur la plaque.
2. La plaque n'est plus plane mais en forme d'auget et dévie le jet dans une direction θ par rapport à l'horizontale. En supposant que le jet se divise toujours en deux demi-jets égaux, déterminer la force exercée sur la plaque.
3. Si l'auget précédent fait partie intégrante d'une turbine et est situé à la distance R de l'axe de cette turbine, le déplacement à la vitesse V_p est la vitesse tangentielle correspondant à une vitesse angulaire ω . Dans ces conditions, quelle est l'expression du couple développé ? En déduire la puissance fournie par le jet à la turbine.



Corrigé :

1. En appliquer le théorème d'Euler, la force exercée par le jet sur la plaque est donnée par :

$$\vec{F}_{j/p} = \rho S_j (V_j - V_p)^2 \vec{e}_x$$

2. la force exercée sur la plaque :

$$\vec{F}_{j/p} = \rho S_j (V_j - V_p)^2 (1 + \cos\theta) \vec{e}_x$$

3. l'expression du couple développé est donnée par :

$$C = R F_{j/p} = \rho S_j (V_j - \omega R)^2 (1 + \cos\theta) R$$

La puissance fournie par le jet à la turbine : $\wp = \omega C = \rho S_j (V_j - \omega R)^2 (1 + \cos\theta) \omega R$

Exercice 17

On envisage l'écoulement bidimensionnel suivant tel que le vecteur vitesse d'une particule fluide soit :

$$\vec{V} = (A + \alpha t) \vec{x}_1 + B \vec{x}_2$$

Déterminer les lignes de courant à un instant t_0 et la trajectoire.

Corrigé :

✚ Les lignes de courant sont données par l'équation :

$$\frac{dx}{U_1(x, y, z, t)} = \frac{dx_2}{U_2(x, y, z, t)}$$

qui à l'instant t_0 donne ici :

$$\frac{dx_1}{(A + \alpha t_0)} = \frac{dx_2}{B}$$

Une intégration directe donne l'équation suivante:

$$\frac{x_1}{(A + \alpha t_0)} = \frac{x_2}{B} + C$$

Il s'agit de l'équation d'une famille de droites. Les lignes de courant sont donc, à l'instant t_0 , des droites.

✚ Trajectoire :

$$\begin{cases} dx_1 = U_1 dt = (A + \alpha t) dt \\ dx_2 = U_2 dt = B dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = At + \frac{\alpha}{2} t^2 + x_{10} \\ x_2 = Bt + x_{20} \end{cases}$$

En éliminant le temps entre x_1 et x_2 , on trouve :

$$x_1 = A \frac{x_2 - x_{20}}{B} + \frac{\alpha}{2B^2} (x_2 - x_{20})^2 + x_{10}$$

Les trajectoires sont ainsi des paraboles.

Exercice 18

Un liquide homogène, de masse volumique uniforme ρ , est surmonté d'une atmosphère à la pression uniforme P_0 , et soumis au champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. L'écoulement du liquide (analogue à celui de la tornade) est stationnaire et à symétrie de révolution autour de l'axe (OZ). Son champ des vitesses, en coordonnées cylindriques, est de la forme :

 pour $r < a$: $\vec{v} = r w \vec{e}_\theta$

 pour $r > a$: $\vec{v} = \frac{a^2}{r} w \vec{e}_\theta$

L'origine de l'axe (OZ) étant choisie sur la surface libre du liquide (très loin de l'axe de révolution).

Déterminer le champ de pression $P(r, z)$ au sein du liquide et en déduire la forme de la surface libre.

Corrigé :

L'équation d'Euler, en régime stationnaire, s'écrit ici :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -g\vec{e}_z - \frac{\overrightarrow{\text{grad}} p}{\rho(p)}$$

deux cas doivent être distingués :

 $r < a$: on a

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = w \vec{e}_z$$

En projection sur $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_z$, l'équation d'Euler donne :

$$\text{selon } \vec{e}_r : \quad \rho r w^2 - 2\rho r w^2 = -\frac{\partial P(r, z)}{\partial r} \quad (1)$$

$$\text{selon } \vec{e}_z : \quad 0 = -\rho g - \frac{\partial P(r, z)}{\partial z} \quad (2)$$

En résolvant les équations (1) et (2), on obtient l'expression de $P(r, z)$:

$$P(r, z) = \frac{1}{2} \rho w^2 r^2 - \rho g z + C_1$$

✚ $r > a$: on a

$$\vec{\Omega} = \vec{0}$$

la projection de l'équation d'Euler sur $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_z$, donne :

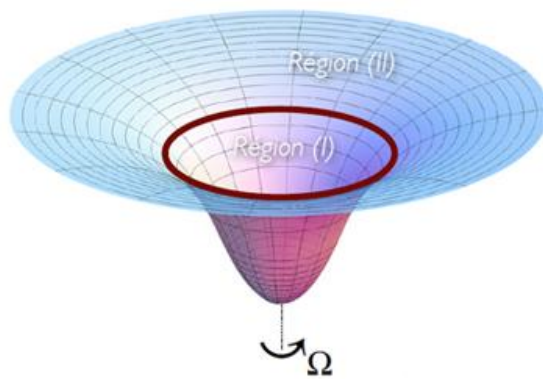
$$\text{selon } \vec{e}_r : \quad -\frac{\rho a^4 w^2}{r^3} = -\frac{\partial P(r, z)}{\partial r} \quad (3)$$

$$\text{selon } \vec{e}_z : \quad 0 = -\rho g - \frac{\partial P(r, z)}{\partial z} \quad (2)$$

En résolvant les équations (3) et (4), on obtient l'expression de $P(r, z)$:

$$P(r, z) = P_0 - \rho g z + \frac{1}{2} \rho w^2 (r^2 - 2a^2)$$

Dans le plan $(\vec{e}_r, \vec{e}_z)$ la trace de cette surface a la forme indiquée sur la figure suivante :



Forme de la surface libre du vortex de RANKINE

Exercice 19

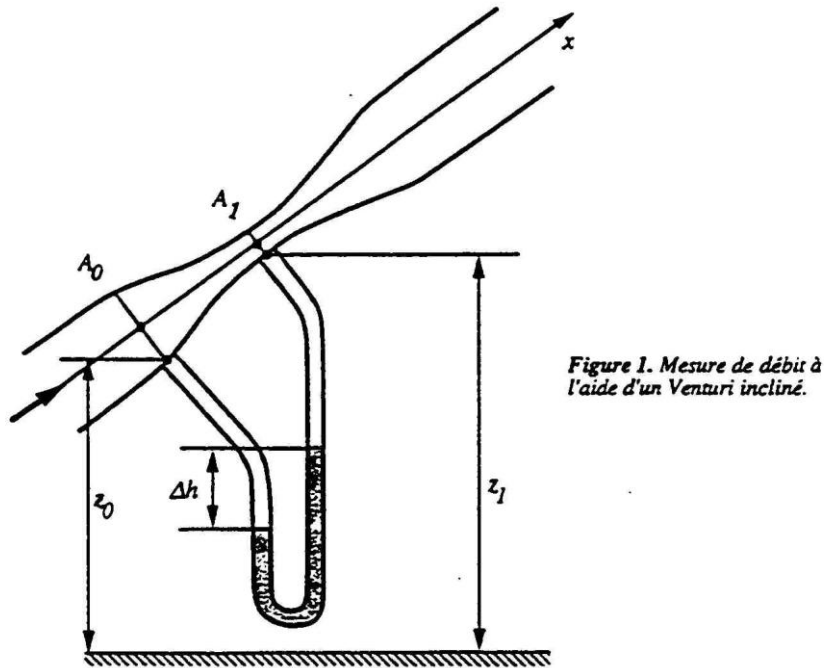
Une des méthodes peu coûteuses employées pour la mesure du débit dans une canalisation est l'utilisation d'un tube de Venturi (figure 1). Il est proposé ici de démontrer qu'avec cet instrument il est possible, en supposant que l'écoulement est turbulent et stationnaire, de calculer le débit de ce fluide, et ceci sans qu'intervienne l'inclinaison éventuelle de l'appareil. Le fluide en écoulement est de l'eau, considérée comme incompressible.

A.N. :

- | | |
|---|--|
| - masse volumique de l'eau : | $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$. |
| - viscosité dynamique de l'eau : | $\mu = 1.10^{-3} \text{ Pa.s}$ |
| - diamètre de la section d'entrée A_0 dans le Venturi : | $D_0 = 125 \text{ mm}$. |
| - diamètre de la section A_1 : | $D_1 = 50 \text{ mm}$. |
| - le tube en U contient du mercure : | $\rho_m = 13\,600 \text{ kg m}^{-3}$. |

Calculer la valeur du débit volumique d'eau q_v lorsque la dénivellation observée dans le tube en U est $\Delta h = 200 \text{ mm}$. On prendra $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.

On vérifiera que la valeur du nombre de Reynolds confirme la nature turbulente de l'écoulement, et qu'il ne le serait pas pour une huile (glycérol) de viscosité $\mu = 1 \text{ Pa.s}$.



Corrigé :

L'objectif est de relier une différence de pression hydrostatique à un débit et à une orientation (qui se traduit par des différences d'altitude). Les lois dont nous disposons sont :

- hydrostatique dans les branches du U, ce qui revient à relier Δh à $P_0 - P_1$,
- conservation de la matière (du débit masse), qui permet de relier débit et vitesses en 0 et en 1,
- conservation approximative de l'énergie mécanique.

Dans un écoulement turbulent, les valeurs moyennes (de P , de v ...) se comportent, en première approximation, comme celles d'un écoulement parfait. Pour cet écoulement stationnaire parfait, il est possible d'utiliser le théorème de Bernoulli :

$$P_0 + \rho g z_0 + \rho \frac{v_0^2}{2} = P_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} \quad (1)$$

où P_0 , v_0 , P_1 et v_1 sont les pressions et vitesses aux lieux considérés.

Les prises de pression étant montées perpendiculairement à l'écoulement, les lois de l'hydrostatique s'appliquent dans le tube en U et ses liaisons. Ainsi, en utilisant les notations de la figure 2 :

$$p_{ref} = P_0 + \rho g (z_0 - z_2)$$

$$p_{ref} = P_1 + \rho g (z_1 - z_3) + \rho_m g (z_3 - z_2)$$

où p_{ref} est la pression sur la ligne indiquée comme référence des pressions. En combinant ces deux expressions on obtient :

$$(P_0 + \rho g z_0) - (P_1 + \rho g z_1) = (\rho_m - \rho) g \Delta h$$

Cette relation peut être reportée dans (1) :

$$v_1^2 - v_0^2 = 2 \frac{\rho_m - \rho}{\rho} g \Delta h \quad (2)$$

La conservation du débit entre les sections A_0 et A_1 s'exprime par : $q_v = A_0 v_0 = A_1 v_1$

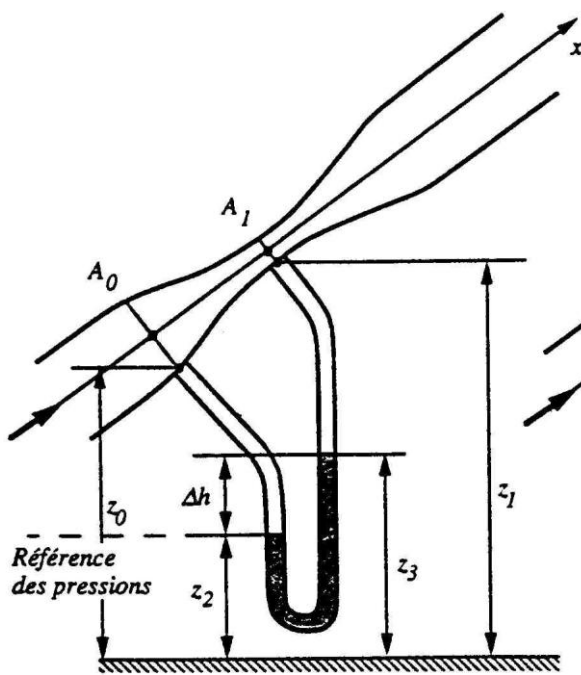


Figure 2.

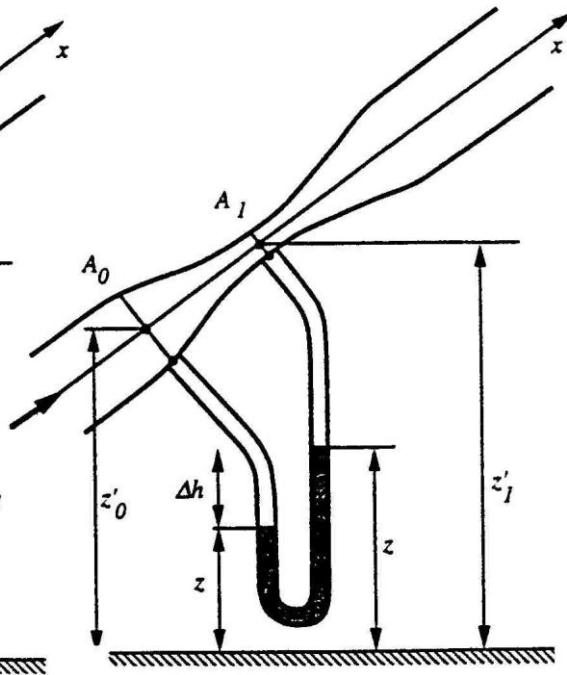


Figure 3.

D'où l'écriture de (2), où l'on introduit le débit volumique :

$$q_v = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_0^2}} \cdot \frac{\rho_m - \rho}{\rho} g \Delta h}$$

Cette relation, où n'intervient aucune cote, est donc indépendante d'une éventuelle inclinaison du Venturi. L'application numérique de cette expression donne le débit volume :

$$q_v = \frac{\pi}{4} \sqrt{2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{(0,05)^4} - \frac{1}{(0,125)^4}} \cdot \frac{13,6 - 1}{1} (9,81)(0,2)}$$

$$q_v \approx 0,0140 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} ; A_0 \approx 0,0123 \text{ m}^2 ; v_0 \approx 1,14 \text{ m/s}$$

Et, dans la section A_0 , $Re_0 = 160\,000$ (Remarque : Re encore plus élevé dans la section A_1).

Un tel Re correspond bien à un écoulement turbulent (ce qui nous a autorisés à approcher l'écoulement réel par l'écoulement d'un fluide parfait).

Pour une huile avec $\mu = 1 \text{ Pa.s}$, on aurait $Re_0 = 160$. D'où un écoulement laminaire. Ce qui nous interdirait l'approximation ci-dessus.

Remarque complémentaire :

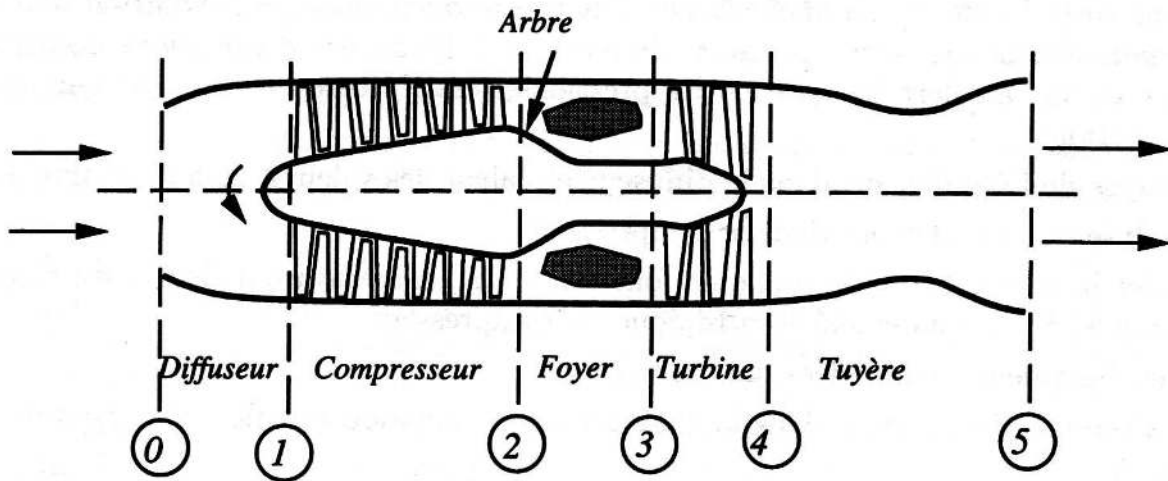
Si le fluide en écoulement est un gaz, le fluide de mesure étant obligatoirement un liquide, la relation démontrée se simplifie car $\rho \ll \rho_m$.

Dans la pratique, un écoulement, même turbulent, n'est jamais absolument parfait, aussi faut-il étalonner le tube de Venturi et le débit est donné par une relation du type :

$$q_v = K \sqrt{\Delta h} \text{ où } K \text{ est obtenu par étalonnage.}$$

Exercice 20

Ce problème donne un aperçu du fonctionnement du moteur (turboréacteur) d'un avion à réaction. Le qualificatif « simple flux » signifie que le flux d'air initial capté par le moteur parcourt, dans son intégralité, tous les éléments du turboréacteur. Il n'y a pas de scission du flux initial en deux flux aux trajets différents.



L'air capté par l'avion ($P_0 = P_a$, $T_0 = T_a$) est ralenti dans le **diffuseur** jusqu'à ce que son énergie cinétique par rapport à l'avion (en sortie de diffuseur) devienne négligeable.

Il est alors admis dans le **compresseur** qui multiplie sa pression statique par 10 (on dit que le taux de compression P_2/P_1 du compresseur est de 10).

L'air est ensuite mélangé avec du carburant et le mélange est brûlé à pression constante dans une **chambre de combustion** (foyer). En sortie de chambre, le mélange a une température $T_3 = 1200$ K.

Ce gaz est ensuite détendu dans les aubages d'une **turbine** qui ne sert qu'à entraîner le compresseur. Turbine et compresseur ont même axe de rotation.

Puis il est éjecté dans l'atmosphère par l'intermédiaire d'une **tuyère** ; la section de sortie de la tuyère, section 5, est appelée section d'éjection ($P_5 = P_a$).

En régime de croisière, l'avion vole à une vitesse v_0 de 900 km/h, à une altitude de 9000 m, où $P_a = 0.307$ bar et $T_a = 232$ K.

Hypothèses :

(H₁) Etant donné la grande dilution du combustible et des gaz brûlés dans l'air en excès, on assimile constamment le fluide à de l'air pur :

$$r = R / M = 287 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad ; \quad \gamma = 1,4$$

(H₂) On suppose que l'air se comporte comme un gaz parfait :

$$h = C_p T \text{ et } C_p = \gamma r / (\gamma - 1), \text{ soit } C_p \approx 1000 \text{ J/kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Analyse :

Pour gagner du temps, on ne s'intéressera qu'au *compresseur*, à la *turbine* et à la *tuyère*. Les 2 premières questions permettront de compléter le tableau suivant :

Section	0	1	2	3	4	5
Pression (bar)	0,307	0,476	4,76	4,76	1,70	0,307
Température (K)	232	263	541	1 200		
Vitesse (m s ⁻¹)	250	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0	

1. Ecoulement dans la turbine

Calculer la température T_4 . Pour cela, on négligera l'énergie cinétique du fluide (on pourra chercher à justifier cette approximation).

2. Ecoulement dans la tuyère : calcul de la température, et de la vitesse dans la section 5.

3. Déterminer le débit d'air nécessaire pour que la résultante des forces subies par le réacteur (fluide + pression atmosphérique) soit de 20 000 N.

4. Calculer l'aire A_5 de sortie

5. Etablir le bilan d'énergie du turboréacteur (Puissances P_c fournie par la combustion, P_u utile pour la propulsion, P_p perdue). Donner la nature de P_p .

Corrigé :

Le bilan d'énergie par unité de masse s'écrit :

$$\dot{m} \cdot \left[\left(h + \frac{v^2}{2} \right)_2 - \left(h + \frac{v^2}{2} \right)_1 \right] = \dot{w} + \dot{q} \quad (1)$$

avec : $h = c_p T$

$\dot{w}$: puissance mécanique fournie par l'extérieur entre 1 et 2, pression exceptée

$\dot{q}$: puissance thermique fournie par l'extérieur entre 1 et 2

1. Ecoulement dans la turbine : On suppose que les transformations du fluide dans le compresseur et la turbine sont adiabatiques. Les bilans d'énergie du fluide par unité de masse entre les sections d'entrée et de sortie de chacun de ces éléments sont les suivants.

 Pour l'évolution dans le compresseur :

$$\text{colorful plus icon} \quad \left(c_p T + \frac{v^2}{2} \right)_2 - \left(c_p T + \frac{v^2}{2} \right)_1 = \frac{\dot{w}_c}{\dot{m}_c}$$

✚ Pour l'évolution dans la turbine :

$$\left(c_p T + \frac{v^2}{2} \right)_4 - \left(c_p T + \frac{v^2}{2} \right)_3 = \frac{\dot{w}_t}{\dot{m}_t}$$

Les grandeurs $\dot{w}_c$ et $\dot{w}_t$ désignent respectivement la puissance totale reçue par le fluide dans chacun des éléments considérés du moteur, $\dot{m}_c$ et $\dot{m}_t$ désignent les débits dans le compresseur et la turbine.

La fonction du compresseur est de fournir de la puissance au fluide ($\dot{w}_c > 0$) et celle de la turbine est de recevoir de la puissance du fluide ($\dot{w}_t < 0$). Si les deux machines sont sur le même arbre et en l'absence de perte mécanique, toute la puissance recueillie par la turbine est transmise au fluide dans le compresseur (l'arbre n'accumule aucune énergie) :

$$\dot{w}_c + \dot{w}_t = 0$$

Comme le débit de kérosène est négligé, on a $\dot{m}_c = \dot{m}_t$ et par conséquent $\dot{w}_c / \dot{m}_c = -\dot{w}_t / \dot{m}_t$

Comme d'autre part les énergies cinétiques sont négligées, on en déduit (l'enthalpie d'un gaz parfait ne dépend que de T) :

$$c_p T_4 - c_p T_3 = - (c_p T_2 - c_p T_1)$$

c'est-à-dire :

$$T_3 - T_4 = - (T_2 - T_1)$$

La valeur numérique est :

$$T_4 = 1200 - (541 - 263) = 922 \text{ K}$$

Remarque : Pourquoi négliger l'énergie cinétique ?

Nous utilisons ici essentiellement le bilan d'énergie totale pour chaque section du moteur. Dans ce bilan, les variations d'enthalpie massique sont importantes : ($\Delta h = c_p (T_2 - T_1) = 278000 \text{ J/kg}$ dans le compresseur, 659000 J/kg dans le foyer...). En amont de la tuyère, la vitesse de l'air est plus faible que la vitesse de l'avion (l'air est à pression plus élevée que Pa). Au maximum, la variation d'énergie cinétique atteint :

$0 - \frac{v_0^2}{2} = -31\,250 \text{ J/kg}$, soit un ordre de grandeur en dessous des variations d'enthalpie. En première approximation, on pourra donc négliger les variations d'énergie cinétique dans le bilan d'énergie totale.

2. Ecoulement dans la tuyère : L'entrée de la tuyère est la section 4. Dans cette section la vitesse du fluide est considérée comme nulle, on a donc dans cette section les conditions génératrices de l'écoulement de la tuyère. Par hypothèse, cet écoulement subit une transformation isentropique tout au long de son trajet jusqu'à son éjection dans l'atmosphère. Les conditions de la section 5 se déduisent donc de celles de la section 4 par la relation isentropique :

$$\frac{T_5}{T_4} = \left(\frac{p_5}{p_4} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}$$

La pression p_5 est égale à la pression ambiante p_a . On en déduit :

$$T_5 = (922) (0,307/1,702)^{(0,4/1,4)} = 565 \text{ K}$$

Utilisons de nouveau le bilan d'énergie pour un système ouvert (équation (1)). Il n'y a échange « latéral » (c'est-à-dire autrement que par les entrées et sorties de fluide) ni de travail ni de chaleur entre le système et l'extérieur : $\dot{w} + \dot{q} = 0$. L'énergie cinétique de l'air dans la section 4 est négligeable : il y est en conditions de réservoir. On obtient v_5 grâce à :

$$h_5 + \frac{v_5^2}{2} - h_4 = 0$$

On calcule ensuite la vitesse du son dans cette section et le nombre de *Mach*.

$$c_5 = (\gamma r T_5)^{1/2} \text{ et } M_5 v_5 = v_5 / c_5$$

Application numérique :

$$v_5 = 2 \cdot C_p (T_4 - T_5) = 845 \text{ m s}^{-1}$$

$$c_5 = [(1,4) (287) (565)]^{1/2} = 476 \text{ m s}^{-1}$$

$$M_5 = 1,78$$

Section	0	1	2	3	4	5
Pression (bar)	0,307	0,476	4,76	4,76	1,702	0,307
Température (K)	232	263	541	1 200	922	565
Vitesse (m s ⁻¹)	250	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0	845

3. Il s'agit maintenant de calculer le débit d'air nécessaire pour que la résultante des forces subies par le réacteur soit de 20 000 N.

Bilan de quantité de mouvement macroscopique (Théorème d'Euler) :

$$\dot{m}(v_5 - v_0) = P_0 A_0 - P_5 A_5 + F_{\text{Moteur/Fluide}}$$

Pression atmosphérique sur un volume fermé (théorème du gradient) :

$$P_a A_0 - P_5 A_5 + F_{\text{atmosphère/Moteur}} = 0$$

d'où force totale subie par le moteur : $F_{(\text{Fluide} + \text{atmosphère})/\text{Moteur}} = -\dot{m}(v_5 - v_0)$

On en déduit le débit d'air $\dot{m}$: $\dot{m} = \frac{|F|}{v_5 - v_0}$

Application numérique : $\dot{m} = \frac{20\,000}{846 - 250} \text{ kg s}^{-1} = 33,56 \text{ kg s}^{-1}$

4. Calcul de l'aire d'éjection : L'écoulement dans la tuyère étant considéré quasi unidimensionnel, le débit $\dot{m}$ se calcule par : $\dot{m} = \rho_5 A_5 v_5$ où $\rho_5 = P_5 / (rT_5)$ est la masse volumique du fluide. Le débit, la vitesse sont connus et la masse volumique peut être calculée.

On en déduit l'aire de la section d'éjection : $A_5 = \dot{m} \frac{rT_5}{P_5 v_5}$

Application numérique : $A_5 = 0,2095 \text{ m}^2$

5. Bilan d'énergie du turboréacteur : Etablir le bilan d'énergie du propulseur consiste à déterminer la puissance fournie au moteur, celle qui a réellement servi à la propulsion de l'avion et à voir où va la puissance perdue.

La puissance P_c fournie par la combustion est :

$$P_c = \dot{m} c_p (T_3 - T_2) = (33,56)(1004,5)(1200 - 541) = 22,2110^6 \text{ W}$$

La puissance utile pour la propulsion est celle de la poussée :

$$P_u = F v_{\text{avion}} = (210^4)(250) = 510^6 \text{ W}$$

On constate que 22,5 % de la puissance fournie est effectivement utilisée. Le reste est perdu. Il est intéressant de voir où cette puissance a disparu.

Comparons l'état de l'air capté par l'avion à celui de l'air éjecté par l'avion. La vitesse de l'air éjecté par rapport à l'avion est de 846 m s^{-1} alors qu'à l'entrée cette vitesse était de 250 m s^{-1} . L'air a donc acquis de l'énergie cinétique. La température de l'air à l'entrée est de 232 K alors qu'elle est de 565 K à la sortie. L'air a donc acquis de l'enthalpie. Pour aller plus loin, nous sommes amenés à écrire un bilan d'énergie. Comme la puissance utile a été calculée dans un repère lié au sol, nous sommes amenés à écrire le reste du bilan dans le même repère. Attention : dans ce repère, il n'y a pas régime permanent. A l'intérieur d'un volume de contrôle fixe qui englobe de l'air avant et après l'avion, de l'air froid et immobile est remplacé par de l'air chaud et mobile avec un débit $\rho_5 A_5 v_0$. Il y a donc accumulation d'énergie à l'intérieur du volume de contrôle. Il faut donc écrire le bilan sous sa forme complète:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(e + e_p + \frac{v^2}{2} \right) dV = \dot{m}_e \left(h_e + e_{pe} + \frac{v_e^2}{2} \right) - \dot{m}_s \left(h_s + e_{ps} + \frac{v_s^2}{2} \right) + \dot{W} + \dot{Q}$$

Accumulation d'énergie totale = Débit net d'enthalpie totale (entrante - sortante)
 + Puissance fournie au système par les forces autres que pression et pesanteur + Puissance calorifique reçue par le système.

En l'occurrence :

$$\rho_5 A_5 v_0 \left\{ C_p (T_5 - T_0) + (1/2)(v_5 - v_0)^2 \right\} = P_c - \rho_5 A_5 (v_5 - v_0) \left\{ C_p (T_5 - T_0) + (1/2)(v_5 - v_0)^2 \right\} - F \cdot v_0$$

$$\text{D'où : } P_c = F \cdot v_0 + \dot{m} \left\{ C_p (T_5 - T_0) + (1/2)(v_5 - v_0)^2 \right\}$$

Le terme entre accolades correspond à une puissance P_p que l'on peut qualifier de perdue (pour la propulsion) puisqu'elle est rejetée à l'atmosphère. On a :

$$P_p = \dot{m} \left\{ C_p (T_5 - T_0) + (1/2)(v_5 - v_0)^2 \right\}$$

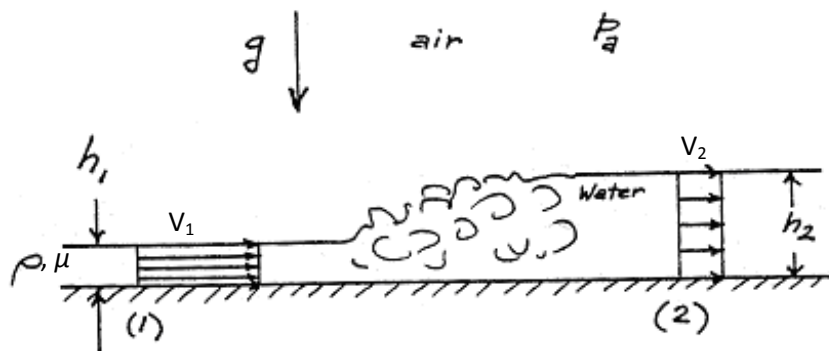
$$= (33,56) \left\{ (1004,5)(565 - 232) + (846 - 250)^2 / 2 \right\} = 17,19 10^6 \text{ W}$$

Exercice 21

On peut vérifier que le bilan d'énergie « boucle » bien (aux erreurs d'arrondi près). Ainsi, la puissance fournie par la combustion se décompose en une partie utile à la propulsion et une partie emportée par l'air qui est rejeté dans l'atmosphère (pour 2/3 sous forme d'enthalpie, pour 1/3 sous forme d'énergie cinétique).

La figure ci-après représente un « saut hydraulique » dans un écoulement stationnaire bidimensionnel à surface libre (c'est à dire en contact avec l'atmosphère). En suivant le sens de l'écoulement (de la gauche vers la droite), le « saut » consiste en une augmentation relativement brutale de la hauteur de liquide associée à une diminution de la vitesse. Cette hauteur plus importante est due à un « blocage » de l'écoulement en aval.

Dans un tel saut, le fluide situé près du fond a tendance à s'écouler vers l'aval sous l'influence de son inertie (de sa quantité de mouvement). Au contraire, celui qui est près du sommet dans la partie droite a tendance à « remonter le courant » pour perdre de l'altitude (de l'énergie potentielle). Ces deux tendances inverses conduisent à la formation de tourbillons fortement dissipatifs qui rendent le profil de vitesse aval relativement uniforme et constituent le « saut » proprement dit. Cette dissipation locale ne peut pas être négligée par rapport à la variation d'inertie entre les sections (1) et (2). Sous cet angle, il y a une certaine analogie avec l'élargissement brusque traité en cours.



Remarques :

- en réalité, s'il y a écoulement stationnaire, c'est que le fond est incliné en direction de l'aval. Nous négligerons cette inclinaison.
- les contraintes entre l'eau et le fond du canal interviennent peu dans ce problème. Nous les négligerons aussi.
- on peut observer des « sauts hydrauliques » sur les plages où une vague vient déferler sur la précédente en train de refluer. Cependant, contrairement à ceux qui nous intéressent ici, ces « sauts » ne correspondent pas à un écoulement stationnaire.

Questions :

- Effectuer l'analyse dimensionnelle du problème (les variables du problème initial apparaissent sur la figure). Combien de nombres adimensionnels, et lesquels proposez vous pour décrire le problème ?
- Les conditions pour écrire le théorème de Bernoulli entre les sections (1) et (2) sont elles réunies ? Justifier.
- Montrer qu'un bilan (lequel ?) permet d'écrire :
$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8V_1^2}{gh_1}} - 1 \right)$$
- Montrer que l'énergie mécanique totale (de pression, cinétique et potentielle) par unité de volume dans une section donnée est indépendante de la profondeur.

Corrigé :

a) 8 variables : $h_1, h_2, V_1, V_2, Pa, \rho, \mu, g$, ou plutôt (mais équivalent) : $h_1, h_2, V_1, V_2, Pa, \rho V_1^2, \mu, g$.

$h_1, V_1, \rho V_1^2$ dimensionnellement indépendantes. Elles nous serviront d'échelles caractéristiques. Seules grandeurs de base : L, M, T, d'où rang ne peut dépasser 3.

8-3 = 5 nombres adimensionnels obtenus grâce aux échelles caractéristiques :

$$h_2/h_1 = f(V_2/V_1, Pa/\rho V_1^2, \mu/(\rho V_1 h_1), gh_1/V_1^2)$$

Remarque: on reconnaît l'inverse du nombre de Reynolds et du nombre de Froude. Ce dernier correspond parfaitement à la contradiction entre énergie potentielle et énergie cinétique signalée par l'énoncé.

b) dissipation importante d'où Bernoulli non applicable.

d) L'expression proposée compare une variation d'énergie potentielle à une variation d'énergie cinétique. Quand il y a dissipation, un bilan de quantité de mouvement peut encore être utilisé. C'est lui qui a permis d'évaluer la perte d'énergie mécanique dans le cas d'un écoulement dans un élargissement brusque pendant le cours. Pas de raison qu'il ne donne pas une information analogue ici.

Bilan macroscopique de quantité de mouvement sous la forme du théorème d'Euler (applicable car pas d'accumulation dans le volume de contrôle). En projection sur un axe horizontal orienté vers l'aval, par unité de largeur (3^{ème} dimension), et en négligeant les contraintes au fond :

$$F_{Pa/surfacelibre} + \int_0^{h_1} (Pa + \rho g(h_1 - z)) dz - \int_0^{h_2} (Pa + \rho g(h_2 - z)) dz = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

où : z = altitude depuis le fond

Théorème du gradient écrit sur un volume identique, mais empli et entouré d'air (toujours selon la même projection) : $F_{Pa/surfacelibre} + Pa h_1 - Pa h_2 = 0$

En utilisant la conservation de la matière ($V_1 h_1 = V_2 h_2$), on arrive à : $\frac{h_2}{h_1} \left(1 + \frac{h_2}{h_1} \right) = \frac{2V_1^2}{gh_1}$, dont la

solution positive est : $\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8V_1^2}{gh_1}} - 1 \right)$

Remarque : l'expression obtenue est bien de la forme prévue par l'analyse dimensionnelle. Si le rapport V_2/V_1 n'apparaît pas explicitement, c'est parce que le bilan matière a permis de l'exprimer en fonction de h_2/h_1 . $Pa/\rho V_1^2$ n'apparaît pas parce que la solution du problème est indépendante de la pression atmosphérique (si cette dernière change, toutes les pressions sont translatées, mais le bilan des forces correspondantes reste inchangé). La raison pour laquelle le Reynolds n'apparaît pas est plus subtile : la perte d'énergie mécanique est surtout due au fait que les tourbillons conduisent à une vitesse relativement uniforme et faible en aval. Cette perte est réalisée plus ou moins rapidement selon la valeur du Reynolds (les tourbillons sont plus ou moins longs), mais le résultat final (la dissipation totale) en est indépendant.

e) $P(z) + \rho g z + \rho V^2 / 2 = Pa + \rho g(h-z) + \rho g z + \rho V^2 / 2 = Pa + \rho g h + \rho V^2 / 2$ est bien indépendant de la profondeur. Ce que le fluide perd en énergie potentielle quand on va vers le fond, il le gagne en pression et réciproquement.

f) La première raison est claire physiquement : l'énoncé nous a expliqué que le saut résulte de deux tendances opposées : l'inertie du fluide qui arrive de l'amont et la tendance du fluide le plus élevé à descendre vers des altitudes plus basses. Si les vitesses changent de sens, cette contradiction disparaît et le fluide élevé peut s'étaler jusqu'à ce que le saut ait disparu.

Une autre raison est moins immédiate : tous les calculs réalisés précédemment restent valables et donnent les mêmes expressions si l'on change le sens de l'écoulement. Y compris l'expression donnée par l'énoncé, dont la valeur numérique (y compris le signe) est indépendante du sens de l'écoulement.

Si, avec le sens initial, la quantité proposée correspond à l'énergie mécanique perdue par dissipation en traversant le saut, elle devrait correspondre à l'inverse (de l'« anti-dissipation » !) si le sens change. Ce qui heurte le 2^{ème} principe de la thermo !

Exercice 22

L'eau d'un barrage sert à entraîner une turbine. On s'intéresse ici à la tuyère placée au bout de la conduite forcée et à l'aube de la turbine sur laquelle le jet est envoyé.

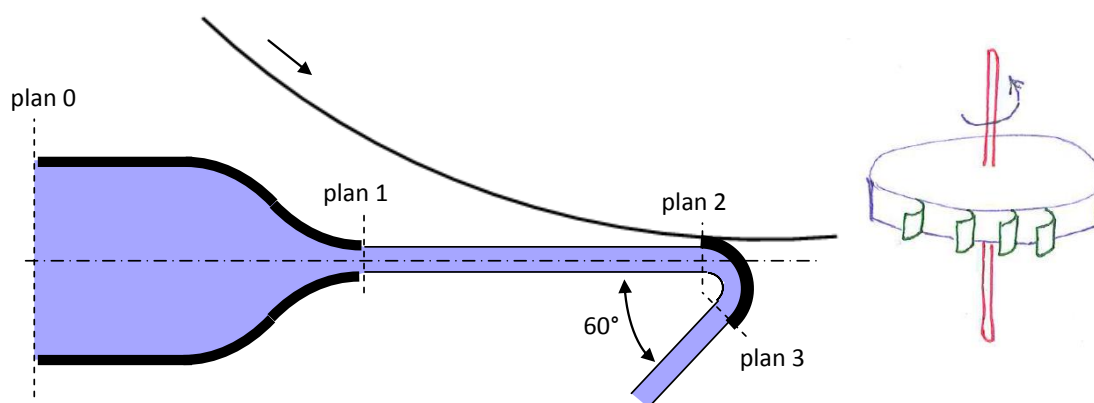
Une conduite cylindrique horizontale (section A_0 , diamètre D_0) se termine par une tuyère convergente, de diamètre final D_1 , qui débouche à l'atmosphère (P_a). Le jet qui s'échappe frappe une aube dont la coupe dans un plan horizontal a la forme d'un arc de cercle. L'aube dévie l'écoulement de 120° par rapport à sa direction initiale. L'écoulement dévié est encore dans un plan horizontal.

Données : $q_v = 0,2 \text{ m}^3/\text{s};$ $D_0 = 0,2 \text{ m};$ $D_1 = 0,05 \text{ m};$ $P_a = 10^5 \text{ Pa};$

$$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3 \text{ (eau);}$$

$$\mu = 10^{-3} \text{ Pa.s}$$

- a) Exprimer la force exercée sur la tuyère par le fluide en écoulement stationnaire ($\vec{F}_{f/t}$). Puis calculer la force totale (pression atmosphérique comprise) subie par la tuyère. Quelle est la contribution principale ?
- b) On suppose que l'aube s'éloigne de la tuyère de manière rectiligne (en restant sur l'axe de la tuyère) à une vitesse $u_a = 10 \text{ m/s}$. Donner l'expression de la force que l'aube exerce sur la roue $\vec{F}_{r}$. Celle-ci comporte deux contributions : la force exercée par le jet sur l'aube $\vec{F}_{j/A}$, et une force due à la pression atmosphérique sur l'extérieur de l'aube $\vec{F}_{Pa/A}$. Déterminer la direction et l'intensité de la force totale $\vec{F}_r$.
- c) Calculer la puissance reçue par la roue à aube, celle qui peut être récupérée sur son axe. Comparer cette puissance à la puissance cinétique du jet (son débit d'énergie cinétique).
- d) On suppose maintenant que le fluide est visqueux. La vitesse de l'eau quittant l'aube vaut 80 % de sa vitesse initiale (dans le repère lié à l'aube). Calculer $\vec{F}'_A$. Comparer, dans le repère mobile, le débit d'énergie cinétique en amont et en aval de l'aube. Que représente la différence ? Calculer le ΔT associé.



Corrigé :

Dans cet exercice, on s'intéresse essentiellement aux forces qui s'exercent sur une paroi dont un côté est soumis à l'action d'un fluide en écoulement. Pour évaluer la force exercée par le fluide en contact, on fait appel au théorème d'Euler (qui est l'expression du bilan macroscopique de la quantité de mouvement) parce que ce théorème fait intervenir explicitement la force à déterminer.

Ce théorème s'exprime ainsi d'une manière générale (cf poly) : $\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho \vec{v} dV = \vec{F}$ (loi

fondamentale de la dynamique où F est ici la résultante des forces qui s'exercent sur le volume de fluide considéré). En régime stationnaire, on obtient :

$$\vec{F} = - \int_A \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA$$

(1) (2)

L'intégrale (2) s'exprime $-\left[\rho_e v_e^2 A_e \vec{n}_e + \rho_s A_s v_s^2 \vec{n}_s\right] = -\dot{m} (\|\vec{v}_e\| \vec{n}_e + \|\vec{v}_s\| \vec{n}_s) = \vec{F}$

(1) contient la somme des forces qui s'exercent sur le fluide soit :

$$\vec{F} = m\vec{g} - \vec{F}_R + P_e A_e \vec{n}_e + P_s A_s \vec{n}_s$$

On voit apparaître F_R la force que le fluide exerce sur l'ensemble des frontières (parois et frontières libres, mais ni sections d'entrée, ni sections de sortie).

Par conséquent, on l'explicite ainsi :

$$\vec{F}_R = m\vec{g} + P_e A_e \vec{n}_e + P_s A_s \vec{n}_s + \dot{m}(\|\vec{v}_e\| \vec{n}_e + \|\vec{v}_s\| \vec{n}_s)$$

On voit que F_R contient trois contributions :

- le poids (qui ne sera pas pertinent ici) (ex : un sac plastique plein d'eau peut fuir aux coutures !)
- l'action de la pression (ex : dans un tuyau cylindrique horizontal ouvert aux deux bouts (même pression) pas de force sur les parois ; si on crée une surpression d'un côté (tuyau d'arrosage) force sur les parois ; idem dans le cas d'un changement de section)
- l'action dynamique du fluide : (ex : nulle pour le tuyau cylindrique, mais intervient quand il y a changement de vitesse et/ou de direction de l'écoulement).

Dans cet exercice, deux exemples dans lesquels l'une ou l'autre contribution sera prépondérante.

Souvent, on s'intéresse à la résultante des forces subies par l'appareil (la tuyère, l'aube...). Cette résultante comporte $-F_R$. Elle comporte aussi la résultante de la pression atmosphérique qui s'exerce sur la paroi du côté « non mouillé ». Pour exprimer cette dernière, on écrit que la résultante de la pression atmosphérique sur un nouveau volume fermé (ici : le volume de contrôle + sa « coquille ») s'oppose au poids du volume d'air déplacé (Archimède) ou, ce qui revient au même, on utilise le théorème du gradient (cf. annexe du poly) pour montrer que cette résultante est (quasi-)nulle.

a) Force exercée par le fluide sur la tuyère :

- La force exercée par le fluide sur la tuyère (F_{ft}) est opposée à la force exercée par la tuyère sur le fluide (F_{tf}). Cette dernière nous est donnée par le théorème d'Euler. En dehors du poids, les forces sont axisymétriques et leur résultante F_{ft} est portée par l'axe.

$$F_{tf} = -\dot{m}(v_0 - v_1) = F_{t/f} + P_0 A_0 - P_1 A_1$$

$$F_{f/t} = -F_{t/f} = \dot{m}(v_0 - v_1) + P_0 A_0 - P_1 A_1$$

- Si le problème est d'ancrer la conduite et la tuyère, F_{ft} n'est pas la force pertinente. Il faut tenir compte de l'effet de la pression atmosphérique sur l'extérieur de notre installation ($F_{Pa/t}$). Pour évaluer cette dernière, appliquons le théorème d'Archimède à un volume qui

comporte non seulement le fluide de la tuyère (notre volume de contrôle antérieur), mais aussi les parois de la tuyère :

$$F_{Pa/t} + Pa (A_0 - A_1) \approx 0$$

D'où : $F_{It} = F_{f/t} + F_{Pa/t} = \dot{m} (v_0 - v_1) + (P_0 - P_1) A_0$

- Le nombre de Reynolds de l'écoulement est partout supérieur à 10^6 . L'écoulement est donc turbulent. C'est ce qui nous a permis de considérer que la vitesse est uniforme sur chaque section.

En effet :
$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{\rho q_v 4 D}{\mu \pi D^2} = \frac{10^3 \cdot 0,2 \cdot 4}{\pi \cdot 10^{-3} \cdot D(\text{en m})} \approx \frac{200000}{D(\text{en m})}$$

D est égal au maximum à 0,2 m donc Re est au minimum égal à 10^6 .

La tuyère a été profilée pour éviter la dissipation turbulente autant que faire se peut. Nous assimilerons l'écoulement réel à un écoulement parfait. Cela nous permettra d'employer le théorème de Bernoulli entre les sections A_0 et A_1 :

$$P_0 + \rho \frac{v_0^2}{2} = P_1 + \rho \frac{v_1^2}{2}$$

A la sortie de la tuyère, le jet est à la pression atmosphérique : $P_1 = P_a$

- La conservation de la matière s'écrit : $q_v = v_0 A_0 = v_1 A_1$

A. N. : $v_0 = 6,37 \text{ m/s} \quad v_1 = 101,9 \text{ m/s}$

$$P_0 = 52,7 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$F_{f/t} = 10^5 \pi [52,7 \times (0,1)^2 - 1 (0,025)^2]$$

$$= 1,46 \cdot 10^5 \text{ N}$$

La force exercée par le fluide sur la tuyère est considérable. Elle est principalement due à l'écart de pression induit par l'effet Venturi dans la tuyère. L'effet de la variation du débit de quantité de mouvement lui aussi dû à la variation de la section dans la tuyère est mineur.

b) Force exercée sur l'aube en mouvement :

Pour que le problème corresponde à un régime permanent (condition nécessaire pour appliquer le théorème d'Euler), nous choisissons un volume de contrôle et un repère liés à l'aube.

Remarque : il faut aussi se placer dans un repère lié à l'aube pour utiliser $\vec{F} \cdot d\vec{t} = d(m\vec{v})$ (sinon, le volume de contrôle considéré se déformerait).

La force que l'on veut déterminer comprend deux contributions, l'une côté fluide, l'autre côté air :

$$\vec{F}_{\text{total}} = \vec{F}_{j/A} + \vec{F}_{P/A}$$

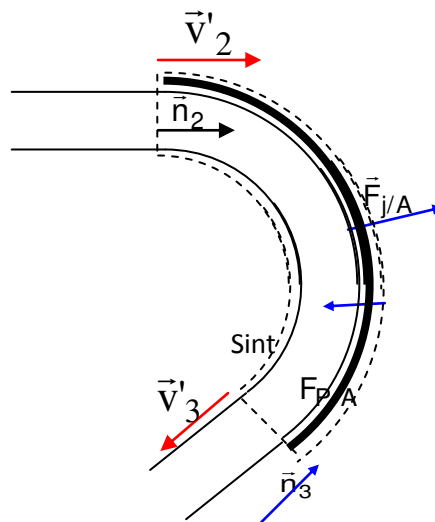
Si on reprend le formalisme précédent que l'on applique d'abord au volume de contrôle constitué par le fluide qui coule sur l'aube et lié à elle

$$\vec{F}_R = m\vec{g} + P_e A_e \vec{n}_e + P_s A_s \vec{n}_s + \dot{m}(\|\vec{v}_e\| \vec{n}_e + \|\vec{v}_s\| \vec{n}_s)$$

F_R contient elle-même deux contributions :

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{j/A} - \vec{F}_{P/Sint}$$

$$\vec{F}_{\text{total}} = m\vec{g} + P_e A_e \vec{n}_e + P_s A_s \vec{n}_s + \dot{m}(\|\vec{v}_e\| \vec{n}_e + \|\vec{v}_s\| \vec{n}_s) + \vec{F}_{P/Sint} + \vec{F}_{P/A}$$



Il faut maintenant déterminer les différentes variables intervenant dans cette relation.

- pas d'intervention du poids

- $P_e = P_s = P_a$

- v_e et v_s (notés v'_2 et v'_3 sur la figure)

Dans ce repère, on a :

$$v_e = v'_2 = v_2 - u_a$$

Dans ce repère où il n'y a pas d'accumulation, la conservation de la matière impose encore :

$$\dot{m} = \rho V'_3 A_3 = \rho v'_2 A_2.$$

Si l'on admet (comme ce serait le cas pour un écoulement parfait) que le jet est simplement dévié, sans que sa forme soit changée ($A_3 = A_2$), alors on a : $v'_3 = v'_2$. ($v_e = v_s$)

Remarque : du fait que l'aube s'éloigne, on ne peut pas écrire $v_3 = v_2$ (en module). On le visualise bien si on considère une aube qui s'éloigne presque à la vitesse du jet.

- Restent à déterminer : $F_{P/Sint}$ et $F_{P/A}$. En fait il s'agit des forces que l'atmosphère ambiante exerce sur une partie d'un volume qu'il va être astucieux de compléter. On définit un nouveau volume virtuel qui enveloppe complètement l'aube et le fluide. On peut vérifier que ce volume est soumis à la pression atmosphérique sur l'ensemble de sa surface externe. Si on place un volume identique (même forme et mêmes dimensions) dans de l'air immobile à la pression atmosphérique, il subit les mêmes forces et donc la même résultante. Or, dans le deuxième cas, cette résultante est nulle (théorème d'Archimède ou théorème du gradient) :

$$\vec{0} = P_e A_e \vec{n}_e + P_s A_s \vec{n}_s + \vec{F}_{P/Sint} + \vec{F}_{P/A}$$

Remarque : ici $P_e = P_s = P_a$

D'où l'expression cherchée pour F_{total} :

$$\vec{F}_{total} = \dot{m} (\|\vec{v}_e\| \vec{n}_e + \|\vec{v}_s\| \vec{n}_s)$$

On raisonne dans le repère Ox, Oy :

Où x est la direction de l'écoulement incident



Alors : $F'_{Ax} = \rho q'_v (v_2 - u_a)(1 + \cos(60^\circ)) = \rho S (v_2 - u_a)^2 (1 + \cos(60^\circ)) = 24\,600 \text{ N}$

$$\vec{F}'_{Ay} = \rho q'_v v'_3 \sin(60^\circ) = 14\,200 \text{ N}$$

Le rendement du transfert d'énergie entre fluide et roue à aube est donc de 25% environ. On pourrait optimiser ce transfert en jouant sur la vitesse de l'aube :

$$P'_A = F'_A \cdot u_a = \rho S_2 (v_2 - u_a)^2 (1 + \cos(60^\circ)). u_a = \rho S (1 + \cos(60^\circ)). v_2^3 \cdot (1 - \lambda)^2 \cdot \lambda$$

si on pose $u_a = \lambda \cdot v_2$.

Le rendement vaut donc :

$$\eta = \frac{2 \rho S_2 (1 + \cos(60^\circ)) v_2^3 \lambda (1 - \lambda)^2}{\rho v_2^3 S_2} = 2 (1 + \cos(60^\circ)) \lambda (1 - \lambda)^2$$

$$\eta_{\max} = \frac{4}{9} \approx 45 \% \text{ pour } \lambda = 1/3$$

Pour préciser la notion de rendement :

Pour comparer les différents termes énergétiques, nous sommes tentés d'écrire un bilan d'énergie totale dans le repère fixe. Il faudrait alors utiliser la forme instationnaire. Sans l'écrire explicitement, on sait qu'il relie des puissances échangées avec l'extérieur (mécanique et thermique) à l'écart entre les débits d'enthalpie totale en entrée et en sortie et à une accumulation d'énergie totale. Parmi les composantes du débit d'enthalpie totale (énergie interne, énergie de pression, énergie potentielle et énergie cinétique), la seule qui est susceptible de varier en passant par l'aube, la seule que l'on puisse transformer au moins partiellement en énergie mécanique utile est l'énergie cinétique. Qualitativement, on peut se demander quelle est la fraction du débit d'énergie cinétique entrante (la ressource disponible) qui peut être transformée en puissance mécanique utile.

d) Force exercée sur l'aube quand le fluide est visqueux :

$$\begin{aligned} \vec{F}'_A &= m\vec{g} + \rho q'_v (v'_2 \vec{n}_2 + v'_3 \vec{n}_3) \\ &= m\vec{g} + \rho q'_v v'_2 (\vec{n}_2 + 0,8\vec{n}_3) \end{aligned}$$

Pour faciliter les calculs, on va comparer le débit d'énergie cinétique en amont et en aval dans le repère mobile qui suit l'aube :

$$P'_{Ec2} = \rho \frac{v_2^2}{2} \times v_2' S_2 = \rho q_v' \frac{v_2^2}{2}$$

$$P_{Ec3} = \rho \frac{v_3^2}{2} \times v_3'' S_3 = \rho q_v'' \frac{v_3^2}{2} = (0,8)^2 P'_{Ec2}$$

C'est le bilan énergétique dans le repère lié à l'aube qui permet d'expliquer cette variation. Pour un écoulement en régime permanent qui n'échange ni chaleur ni travail avec les parois (la force exercée sur l'aube ne travaille pas dans ce repère), on a conservation de l'enthalpie totale :

$$h_2 + \frac{v_2^2}{2} + g z_2 = h_3 + \frac{v_3^2}{2} + g z_3$$

où h_2 et h_3 représentent l'enthalpie spécifique (c'est-à-dire massique) en entrée et en sortie. Une partie de l'énergie cinétique amont se dissipe en énergie thermique que l'on retrouve dans l'enthalpie h_3 . A cause de la viscosité, la déviation du jet a engendré des turbulences, des mouvements tourbillonnaires du fluide, qui se sont eux-mêmes transformés en tourbillons plus petits, jusqu'à l'échelle moléculaire, où l'énergie associée est transformée en chaleur. Nous sommes typiquement dans un cas où la dissipation est marquée et où on ne peut pas considérer que l'énergie mécanique se conserve. Il n'est donc pas possible d'employer l'équation de Bernoulli.

La dissipation visqueuse transforme 36 % ($1 - (0,8)^2$) de l'énergie cinétique en chaleur :

$$\dot{m} C_p \Delta T = 36 \% q_{Ec2}, \quad \text{d'où } \Delta T \cong 0,5 \text{ } ^\circ\text{C}$$

La puissance mécanique perdue a beau être élevée ($\cong 350 \text{ kW}$), cela ne se traduit que par un échauffement peu perceptible.

Exercice 23

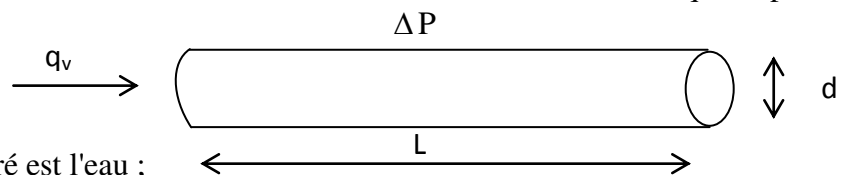
Une conduite en fonte de diamètre $d_1 = 20 \text{ cm}$ doit assurer un débit liquide permanent $q_{v1} = 5 \text{ l s}^{-1}$.

Données :

Le fluide considéré est l'eau ;

$$\rho_1 = 10^3 \text{ kg/m}^3 ;$$

$$\mu_1 = 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$$



$$L_1 = 100 \text{ m} ;$$

$$\varepsilon_1 = 0,25 \text{ mm (rugosité de la conduite)}$$

Les trois premières questions sont très numériques, mais rapides à résoudre. Leur intérêt apparaîtra avec la quatrième question.

1. Que vaut le nombre de Reynolds ? L'écoulement est-il laminaire ou turbulent ?
2. Quelle différence de pression entre amont et aval faut-il imposer pour obtenir ce débit, sachant que la chute de pression obéit à :

$$\Delta P = \lambda(Re, \varepsilon/d) \cdot L/d \cdot \rho v^2/2$$

3. Mêmes questions pour une conduite en acier de diamètre $d_2 = 40 \text{ mm}$ qui doit transporter un sirop avec un débit $q_{v2} = 10 \text{ l s}^{-1}$.

Données :

Le sirop est à base d'eau ;

$$\rho_2 = 10^3 \text{ kg.m}^{-3} ;$$

$$\mu_2 = 10.10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

$$L_2 = 1 \text{ m} ;$$

$$\varepsilon_2 = 50 \mu\text{m}$$

4. Etablir l'expression (1) à partir des principes de l'analyse dimensionnelle. Pour ce faire, on se demandera :
 - a) quelles sont les grandeurs qui interviennent dans le problème ?
 - b) combien sont dimensionnellement indépendantes, et combien de nombres adimensionnels vont en résulter ?
 - c) quelles échelles caractéristiques choisir et quels nombres adimensionnels elles induisent ?

On se demandera ensuite ce que devient ΔP si on double la longueur de la conduite, toutes choses égales par ailleurs ? Conséquence sur la relation entre les nombres adimensionnels précédents ?

5. Comparer l'écoulement dans les deux conduites. Réfléchir à la possibilité d'utiliser la 2^{ème} comme maquette de la première.

Corrigé :

$$1) \quad Re_1 = \frac{\rho v d}{\mu}, \quad \text{avec : } q_{v1} = \pi \frac{d^2}{4} v, \quad \text{d'où : } Re_1 = \frac{\rho}{\mu} \frac{4 q_v}{\pi d}$$

A.N. : $v = 0,16 \text{ m/s}$; $Re_1 = \frac{10^5}{\pi} \approx 3,2 \cdot 10^4$. Conduite cylindrique avec $Re \gg 5000$ écoulement pleinement turbulent.

$$2) \quad \frac{\rho v^2}{2} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{4q_v}{\pi d^2} \right)^2$$

A.N. : $\frac{\rho v^2}{2} \approx 12,7 \text{ J/m}^3$ (ou Pa). C'est l'énergie cinétique avec laquelle le fluide circule.

$\varepsilon/d = 0,25/200 = 1,25 \cdot 10^{-3}$; Graphe $\lambda = \lambda(\text{Re}, \varepsilon/d)$ (poly p. 81) donne : $\lambda \approx 0,027$

$$l_1/d_1 = 100/0,2 = 500, \quad \Delta P = 0,027 \frac{100}{0,2} \times 12,7 \text{ Pa} \approx 171 \text{ Pa} \text{ (1,7 mbar)}$$

A chaque fois que le fluide parcourt une longueur égale au diamètre ($l/d = 1$), la pression chute de 2,7 % de l'énergie cinétique. Comme $P/\rho + e + gz + v^2/2$ se conserve (bilan énergie totale), et qu'il en est de même de gz et $v^2/2$, cela signifie que $P/\rho + gz + v^2/2$ diminue de $0,34 \text{ J/m}^3$ à chaque fois que le fluide parcourt une longueur égale au diamètre (il le fait ici $100/0,2 = 500$ fois). Cette énergie mécanique perdue se transforme, se dissipe, en chaleur.

$$3) \quad \text{Re}_2 = \frac{\rho}{\mu} \frac{4q_v}{\pi d}$$

A.N. : $\text{Re}_2 = \frac{10^5}{\pi} \approx 3,2 \cdot 10^4$: même Re que précédemment, et donc toujours turbulent.

$\varepsilon/d = \frac{0,05}{40} = 1,25 \cdot 10^{-3}$, d'où le même coeff. linéique de frottement : $\lambda \approx 0,027$

$$\ell_2/d_2 = 1/(40 \cdot 10^{-3}) = 25$$

Bien que les deux écoulements n'aient pas grand-chose à voir l'un avec l'autre, leur tendance à dissiper l'énergie mécanique, à la transformer en énergie thermique, est la même.

A.N. : $v \sim 8 \text{ m/s}$; $\rho \frac{v^2}{2} \approx 31\,700 \text{ J/m}^3$ (ou Pa)

$$\Delta P \approx 0,027 \times \frac{1}{0,04} \times 31\,700 \text{ Pa} \approx 21\,000 \text{ Pa} \text{ (0,21 bar)}$$

4) ΔP est fonction de q_v (lui-même fonction de v' et d), de d , de ρ , de μ , de ε et de L . On peut donc l'écrire sous la forme : $f(d, v, \rho v^2, \Delta P, L, \varepsilon, \mu) = 0$

Le rang de la matrice dimensionnelle est 3 (d , v et ρv^2 sont dimensionnellement indépendants). On pourrait choisir plusieurs jeux d'échelles caractéristiques et appliquer une méthode systématique pour établir des nombres adimensionnels. Comme il est d'usage pour les problèmes de pure mécanique des fluides, on choisit d , v , et ρv^2 comme échelles caractéristiques, et le problème s'exprimera avec $7 - 3 = 4$ nombres adimensionnels :

$$Eu = \frac{\Delta P}{\rho v^2 / 2}, \quad \frac{\ell}{d}, \quad \frac{\varepsilon}{d} \quad \text{et} \quad Re, \text{ soit encore : } \frac{\Delta P}{\rho v^2 / 2} = f_1\left(\frac{L}{d}, \frac{\varepsilon}{d}, Re\right)$$

Si le fluide est incompressible, la chute de pression est proportionnelle à la longueur parcourue (pour un écoulement établi les champs de vitesse et de contrainte sont indépendants de $z \Rightarrow dP/dz = \text{cnste}$). Cela n'est compatible avec la forme précédente que si elle peut s'écrire:

$$\frac{\Delta P}{\rho v^2 / 2} = \frac{L}{d} f_2\left(\frac{\varepsilon}{d}, Re\right)^1$$

La fonction f_2 a été déterminée expérimentalement. Elle porte le nom de *coefficient linéique de frottement* λ . Elle est approchée par la corrélation de Colebrook. Cette fonction est indépendante de la nature du fluide et des dimensions L , d et ε de la canalisation.

5) Bien que très différents dans la pratique, les deux écoulements sont similaires au sens de l'analyse dimensionnelle :

- ils se déroulent dans deux conduites géométriquement similaires : mêmes valeurs de ε/d
- ils possèdent le même nombre de Reynolds, c'est-à-dire qu'ils donnent lieu au même rapport entre contraintes visqueuses et énergie cinétique.

L'analyse dimensionnelle (relation (1), graphe p.81 du poly) nous dit alors que le rapport entre énergie mécanique dissipée et énergie cinétique ($\Delta P/(\rho v^2/2)$) pour un parcours égal au diamètre ($L/d = 1$) est le même dans les deux cas. Un résultat obtenu pour une installation (valeur de $\Delta P/(\rho v^2/2)$) avec une valeur de Re et de ε/d peut être transposé à l'autre installation du moment que c'est avec la même valeur de Re et de ε/d . Une installation peut être utilisée comme maquette pour étudier les autres.

Exercice 24

Reprendre le même problème (exercice 23), établir ΔP_1 pour la grande conduite sans se servir du graphe $\lambda = \lambda(Re, \varepsilon/d)$.

Corrigé :

- 1) On calcule Re_1 et $(\varepsilon/d)_1$ que l'on veut avoir dans la grande conduite.
- 2) On choisit la petite conduite pour qu'elle présente la même valeur de ε/d . On choisit le fluide et le débit (ou la vitesse) pour que le nombre de Reynolds soit le même qu'à grande échelle (similitude complète).

3) On mesure ΔP_2 sur la maquette et on calcule la valeur correspondante de $\frac{\Delta P_2}{\rho v_2^2 / 2} / (\ell/d)_2$.

4) L'analyse dimensionnelle (relation (1)) nous dit que $\frac{\Delta P_1}{\rho v_1^2 / 2} / (\ell/d)_1$ a nécessairement la même valeur. On obtient donc ΔP_1 en multipliant cette valeur par $(\rho v_1^2 / 2) \cdot (\ell/d)_1$.

Exercice 25

I. Ce problème a pour objet la détermination de la résistance à l'avancement d'un navire.

1) De quelles grandeurs dépend la résistance à l'avancement R d'un bateau dont la géométrie de la coque est donnée ?

2) En prenant comme grandeurs fondamentales (échelles caractéristiques) L , v et ρv^2 former les groupements sans dimensions du problème.

En déduire les paramètres dont est fonction la quantité $\frac{R}{\rho L^2 v^2}$.

3) Pour établir la loi qui gouverne la résistance à l'avancement du navire, on veut se servir d'une maquette à l'échelle 1/10. Ecrire les conditions de similitude correspondantes. En déduire la vitesse à laquelle la maquette doit se déplacer.

4) Dans l'expérience sur maquette réalisée au bassin des carènes, le fluide utilisé est nécessairement de l'eau. La similitude dynamique peut-elle être complète ?

De ce fait, on se rabat sur l'hypothèse simplificatrice suivante :

En première approximation, la résistance à l'avancement R peut se décomposer en deux forces indépendantes :

- ✚ une force R_f liée à la viscosité du fluide et traduisant l'effet du frottement de l'eau le long de la coque ;
- ✚ une force R_o représentant la résistance d'onde, c'est-à-dire la résistance opposée par le système de vagues créées par le bateau à la surface de l'eau.

Chacune de ces deux forces, adimensionnées par le produit $\rho L^2 V^2$, ne dépend alors que d'un seul nombre sans dimensions. Quel est le nombre sans dimensions dont dépend $\frac{R_f}{\rho L^2 V^2}$?

Quel est celui dont dépend $\frac{R_0}{\rho L^2 V^2}$? Comment s'exprime la quantité $\frac{R}{\rho L^2 V^2}$?

5) En tenant compte du fait qu'il existe de nombreuses formules permettant de calculer la résistance de frottement, quelle sera alors la marche à suivre pour déterminer la résistance totale qui s'exerce sur un navire à partir d'une expérience sur maquette ?

II. On considère maintenant l'application au cas d'un transbordeur rapide. Ce bateau a les caractéristiques suivantes :

-  longueur à la flottaison $L=155$ m
-  surface mouillée $S= 4214$ m²

Une maquette au 1/21 de ce transbordeur a été réalisée et a fait l'objet d'essais au bassin des carènes. Les résultats expérimentaux obtenus pour la résistance totale R' en fonction de la vitesse V' sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

$V' \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$	0.298	0.404	1.123	1.796	2.245	2.694	2.919
$R' \text{ (N)}$	1.86	3.24	27.28	65.70	103.47	165.14	209.37

On donne l'expression suivante pour la résistance de frottement d'un corps immergé de surface mouillée S :

$$R_f = \frac{1}{2} C_f \rho S V^2$$

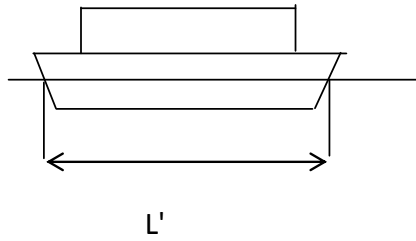
avec $C_f = \frac{0.074}{(Re)^{0.2}}$ pour $Re < 10^7$ (formule de Prandtl)

$$C_f = \frac{0.455}{(\log_{10} Re)^{2.584}} \text{ pour } Re > 10^7 \text{ (formule de Prandtl-Schlichting)}$$

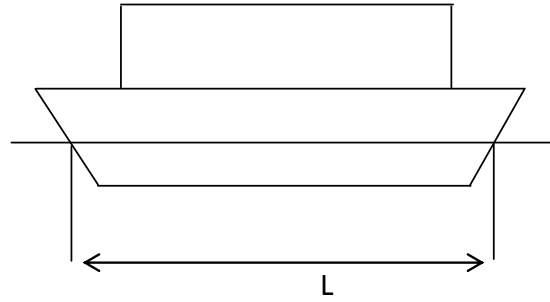
Le coefficient de viscosité μ de l'eau sera pris égal à 10^{-3} Pa . s

1) En suivant la démarche définie en I.3, calculer la résistance à l'avancement R du transbordeur réel à la vitesse de service V de 24 nœuds (c'est-à-dire 12.35 m s⁻¹).

2) Quelle est la puissance développée pour propulser le bateau à cette vitesse ?



Maquette



Bateau réel

Corrigé :

1) Le nombre n de paramètres considérés (R, ρ, μ, L, V, g) est égal à 6.

Interprétation :

- a) g figure dans la liste parce qu'il faut retenir toutes les grandeurs, mêmes constantes, qui interviennent dans le problème. g intervient en l'occurrence dans des phénomènes tels que les vagues, le sillage, et en général la déformation de la surface du fluide induits par le mouvement du bateau.
- b) On suppose que l'enfoncement du bateau dans l'eau ne varie pas avec sa vitesse (pas de déjaugage).

2) Tous ces paramètres s'expriment en fonction de 3 dimensions fondamentales M, L et T :

$$[R] = MLT^{-2}, [\rho] = ML^{-3}, [\mu] = ML^{-1}T^{-1}, [L] = L, [V] = LT^{-1}, [g] = LT^{-2}$$

Pour $[R]$, on se sert du principe fondamental de la dynamique : $[R] = [m.a]$. Pour μ , on se sert de la loi de Newton qui définit cette grandeur : $\tau = \mu \text{ grad}(v)$ où τ est une contrainte (force par unité de surface), d'où $[\mu] = [F/S] / (L/T)$.

Le théorème de Vaschy-Buckingham indique alors qu'il est possible de former $6 - 3 = 3$ nombres sans dimension.

En prenant L, V et ρV^2 comme échelles fondamentales, on peut adimensionner R, μ et g . Pour cela, on cherche fait d'abord disparaître la masse grâce à ρV^2 , puis le temps grâce à V , puis la longueur, grâce à L .

3) Pour obtenir une similitude complète, il faudrait, outre la similitude géométrique, conserver les valeurs des nombres de Reynolds et de Froude, soit en notant à l'aide d'un prime, les grandeurs associées à l'expérience sur maquette :

$$\begin{cases} Re = Re' \\ Fr = Fr' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{\rho' V' L'}{\mu'} \\ \frac{V^2}{gL} = \frac{V'^2}{gL'} \end{cases}$$

avec $L'/L = 1/10$, cela impose $V'/V = 1/\sqrt{10}$ et $\rho'/\rho \mu/\mu' = 10 \cdot \sqrt{10}$. Il faudrait donc que la maquette se déplace 3 fois moins vite que le navire réel, mais il faudrait aussi trouver un

fluide à la fois beaucoup plus dense et beaucoup moins visqueux que l'eau. Un tel fluide n'existe pas ! Il n'est donc pas possible de réaliser une similitude complète.

4) La force de frottement R_f étant liée à la viscosité du fluide, la quantité $\frac{R_f}{\rho L^2 V^2}$ ne dépend que du nombre de Reynolds. En revanche, la résistance d'onde R_0 provenant de l'action de la pesanteur, la quantité $\frac{R_0}{\rho L^2 V^2}$ ne dépend que du nombre de Froude. Ainsi, il est possible d'écrire la résistance à l'avancement R sous la forme :

$$\frac{R}{\rho L^2 V^2} = f_1(Re) + f_2(Fr)$$

5) Comme il existe de nombreuses formules pour évaluer la résistance de frottement R_f , on se contentera de conserver le nombre de Froude, ce qui permettra de déterminer par l'expérience la résistance d'onde R_0 . Pour évaluer la résistance totale autour d'un bateau à partir d'une expérience sur maquette, la démarche est la suivante : l'expérience fournit la valeur de résistance totale autour de la maquette. En retranchant de la valeur de la résistance de frottement donnée par le calcul, on obtient la valeur de la résistance d'onde autour de la maquette.

Exercice 26

Une éolienne fonctionne en régime permanent. On considère que l'influence de la pesanteur est négligeable. On n'entrera pas dans le détail de ce qui se passe au voisinage de l'hélice. On admettra que la vitesse est conservée entre l'amont immédiat et l'aval immédiat. Par contre, la pression passe de P_A à P_B , $P_B \neq P_A$.

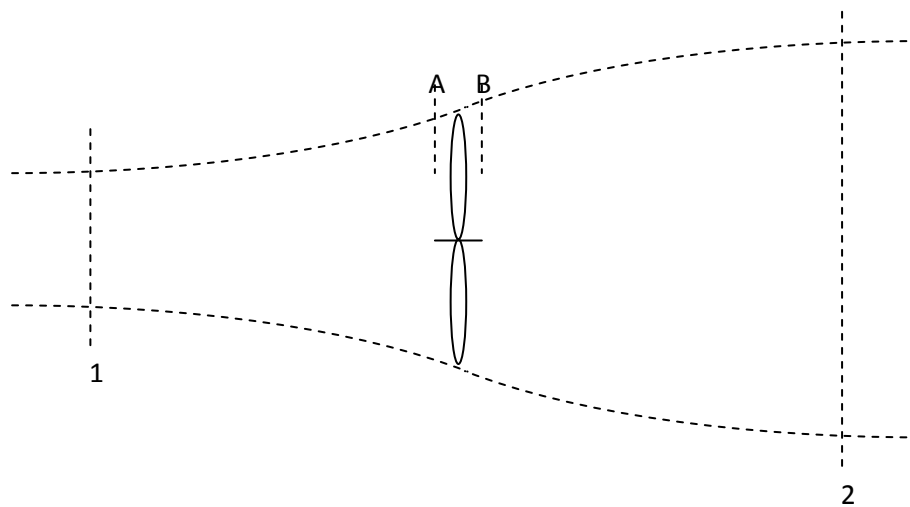
- 1) Faut-il tenir compte de la compressibilité de l'air ? et de sa viscosité ?
- 2) Dessiner le tube de courant qui passe par la circonférence extrême balayée par l'hélice. On indexe par 1 et 2 l'amont lointain et l'aval lointain de ce tube de courant. On suppose qu'en dehors de ce tube de courant, la pression est uniformément égale à P_a .
- 3) Donner l'expression de la force $\vec{F}_{f/h}$ exercée par le fluide sur l'hélice, d'abord en fonction de u_1 et u_2 , puis en fonction de u_1 et de la vitesse médiane $u = (u_1 + u_2) / 2$, que l'on suppose réalisée à la traversée de l'hélice.
- 4) Calculer la puissance reçue par l'hélice. On pose $u = \lambda u_1$. Déterminer la valeur de λ pour laquelle cette puissance est maximale. Quel est le rendement de cette éolienne (N.B. : rendement = fraction du débit d'énergie cinétique qui est récupérée par l'éolienne) ?

Corrigé :

- 1) Compressibilité et viscosité :

Le cours sur les écoulements compressibles montrera que le critère pour savoir si la compressibilité doit être prise en compte est le nombre de Mach (rapport entre la vitesse du fluide et la vitesse locale du son) : son carré est-il négligeable ou pas devant l'unité ? Ici, sauf cas de tempête, la vitesse du vent est inférieure à 30 m/s, et donc le nombre de Mach inférieur à 0,1. L'approximation écoulement incompressible est donc légitime.

Le nombre de Reynolds est typiquement supérieur à $1,3 \cdot 10^5$. Ce qui correspond à un écoulement largement turbulent. En première approximation, cet écoulement est voisin de celui d'un fluide parfait (ie sans viscosité). C'est le comportement de ce fluide parfait que nous étudions.



2) Tube de courant :

L'éolienne a pour fonction d'extraire une fraction de l'énergie cinétique de l'air qui la traverse. La vitesse de ce dernier est donc réduite au cours de la traversée du tube de courant. La conservation de la matière impose alors que la section du tube de courant augmente.

Remarque : les notions de ligne et de tube de courant sont légitimes parce que nous nous référons à l'écoulement d'un fluide parfait

b) Calcul de $\vec{F}_{f/h}$

- Ecrivons le bilan de quantité de mouvement sur l'ensemble du tube de courant entre 1 et 2,

sous la forme :

$$\vec{F} = - \int_A \rho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA$$

$\vec{u} \cdot \vec{n}$ est nul sur l'ensemble des parois latérales (tube de courant), sauf en S_1 et S_2 .

$$F = \dot{m}(u_2 - u_1)$$

où $\vec{F}$ désigne l'ensemble des forces qui s'exercent sur le fluide contenu dans le volume de contrôle. La résultante des forces de pression est opposée au poids de l'air contenu dans le tube de courant et donc négligeable (poussée d'Archimède). La pesanteur étant négligée, la seule force qui s'exerce sur le fluide provient de l'hélice : $\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_{h/f} \approx -\vec{F}_{fh}$

$\vec{F}_p$ représente la résultante des forces de pression sur tout le pourtour du tube de courant.

D'où :
$$\vec{F}_{f/h} = -\dot{m}(\vec{u}_2 - \vec{u}_1)$$

$$\vec{F}_{fh} = \dot{m}(\vec{u}_1 - (2u - u_1))\vec{n}_B = 2\rho S u (u_1 - u)\vec{n}_B$$

c) Puissance récupérée :

$$P = \vec{F}_{fh} \cdot \vec{u} = 2\rho S u^2 (u_1 - u) = 2\rho S u_1^3 \lambda^2 (1 - \lambda)$$

Remarque : $P = \vec{F}_{fh} \cdot \vec{u}$ pas forcément facile à justifier...

✚ La puissance est maximale pour $\lambda = \lambda_{\max} = 2/3$, On remarquera que cela ne correspond pas au maximum de la force ($\lambda = 1/2$).

✚ En l'absence de l'éolienne, le débit d'énergie cinétique à travers S serait : $\rho u_1^3 S/2$

✚ Le rendement vaut donc :
$$\eta = \frac{2\rho S u_1^3 \lambda^2 (1 - \lambda)}{\rho u_1^3 S/2} = 4\lambda^2 (1 - \lambda)$$

$$\eta_{\max} = \frac{16}{27} \approx 60\% \text{ pour } \lambda = 2/3 \quad (\text{limite de Betz})$$

Exercice 27

Un agitateur de diamètre D tourne à la vitesse angulaire ω (unité : rad.s^{-1}) dans un liquide de masse volumique ρ . Cet agitateur transmet au liquide une puissance P . Pour un réacteur donné, l'expérience montre que le problème ne dépend que des variables évoquées ci-dessus.

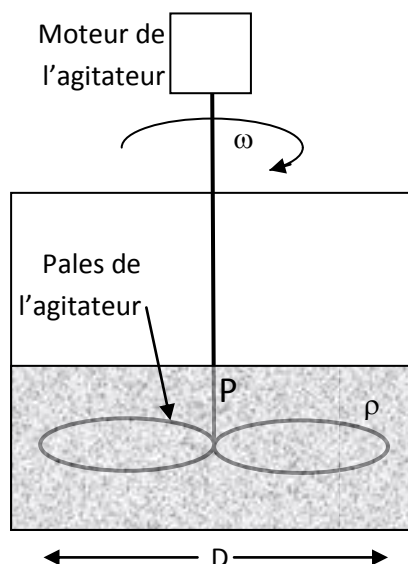
L'objectif est d'utiliser l'analyse dimensionnelle pour déterminer comment P varie en fonction de ω . Pour cela :

On rappellera la liste des variables du problème.

a) On construira la matrice dimensionnelle, en précisant comment on obtient la dimension de P .

b) On déterminera combien il y a de variables dimensionnellement indépendantes entre elles.

- c) On en déduira combien de nombres adimensionnels caractérisent le problème.
 d) On choisira des échelles caractéristiques. On respectera de préférence, mais sans obligation, la « tradition », ce qui pourra conduire à modifier la liste des variables en en combinant certaines et à écrire une nouvelle matrice dimensionnelle.
 e) On proposera un ou des nombres adimensionnels.
 f) De la relation entre ces nombres, on déduira la forme de la relation entre P et ω .



Corrigé :

- a) et b)
 4 variables :

	D	ω	ρ	P
M	0	0	1	1
L	1	0	-3	2
T	0	-1	0	-3

$$[P] = [F].L/T = [m.a].L/T$$

$$= (M.L/T^2).L/T = M.L^2.T^{-3}$$

- c) les « vecteurs » D et ω sont dans un « plan (L,T) », ρ n'est pas dans ce plan, puisqu'il fait intervenir la masse. Il ne peut pas y avoir plus de 3 variables dimensionnellement indépendantes, puisque le problème ne fait intervenir que trois grandeurs du système SI. On a donc $r = 3$.

- d) $m = n - r = 4 - 3 = 1$

- e) échelles caractéristiques : D , ωD , $\rho.(\omega D)^2$

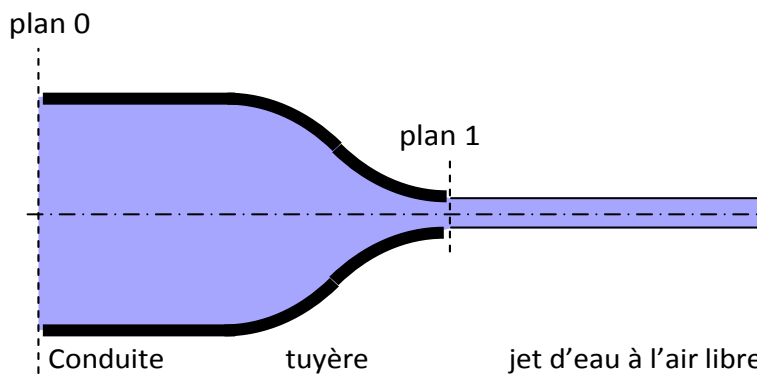
	D	ωD	$\rho.(\omega D)^2$	P
M	0	0	1	1
L	1	1	-1	2
T	0	-1	-2	-3

- f) π_1 ou P^* obtenu en adimensionnant P grâce à D , ωD et $\rho.(\omega D)^2$. Nécessité de diviser par $\rho.(\omega D)^2$ pour faire disparaître M, puis par ωD pour faire disparaître T, puis par D^2 pour faire disparaître L. D'où : $P^* = P/(\rho.\omega^3.D^5)$ ou $P = P^*. \rho.\omega^3.D^5$.
- g) Comme il n'y a qu'un seul nombre adimensionnel pour caractériser le problème, il n'est fonction d'aucun autre, il est nécessairement constant : la puissance P à fournir pour agiter le liquide augmente comme le cube de la vitesse de rotation.

Exercice 28

On s'intéresse à une tuyère placée au bout d'une conduite forcée. L'eau s'écoule de la gauche vers la droite. La tuyère est la partie où le diamètre de la conduite diminue. La conduite cylindrique est horizontale, elle a un diamètre D_0 et une section A_0 . La tuyère convergente a un diamètre final D_1 . L'eau débouche de la tuyère à l'atmosphère (pression P_a).

Données : $q_v = 0,2 \text{ m}^3/\text{s}$; $D_0 = 0,2 \text{ m}$; $D_1 = 0,05 \text{ m}$; $P_a = 10^5 \text{ Pa}$;
 $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ (eau); $\mu = 10^{-3} \text{ Pa.s}$



L'objectif est de déterminer la force ($\vec{F}_t$) subie par la tuyère quand il y a de l'eau qui s'écoule à l'intérieur. Cette information est utile, ne serait-ce que pour savoir comment il faut fixer la tuyère au sol pour éviter qu'elle ne bouge...

- Calculer les vitesses V_0 et V_1 .
- Calculer le nombre de Reynolds dans le plan 0 de la conduite. Qu'en déduire à propos de la nature de l'écoulement ?
- Définir un volume de contrôle approprié au problème.
- Ecrire le théorème d'Euler sur ce volume de contrôle. Dire pourquoi on peut se limiter à sa projection sur l'axe. Préciser ce que représente $\vec{F}$ dans ce théorème.
- Indiquer quelles sont les différentes forces qui s'exercent sur le fluide de ce volume de contrôle.
- Définir un nouveau volume qui ressemble beaucoup au volume de contrôle, mais qui enveloppe la tuyère. Quelle égalité sur les pressions pouvez-vous écrire si vous plongez ce volume dans un endroit où la pression est uniformément égale à la pression atmosphérique ?
- Utiliser les deux égalités écrites précédemment pour trouver une expression de la force totale subie par la tuyère ($\vec{F}_t$), aussi bien de la part du fluide que de la part de la pression atmosphérique.
- Quelle relation peut-on écrire entre les pressions P_0 et P_a ? Qu'est-ce qui autorise à écrire cette relation ? En déduire la valeur de P_0 .
- Calculer la valeur numérique de la force ($\vec{F}_t$)

Corrigé :

- a) $q_v = V_0 \cdot A_0 \Rightarrow V_0 = 0,2 / (\pi \cdot (0,1)^2) = 20 / \pi = 6,37 \text{ m/s} ; V_1 = 16 \cdot V_0$
- b) $Re = \rho \cdot V_0 \cdot D_0 / \mu = 10^3 \cdot 6,37 \cdot 0,2 / 10^{-3} = 1,27 \cdot 10^6$. Les forces d'inertie l'emportent largement devant les forces visqueuses et l'écoulement est turbulent.
- c) Volume de contrôle = volume de liquide contenu entre les plans 0 et 1.
- d) $\vec{F} = \dot{m} (\vec{V}_1 - \vec{V}_0)$. $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_0$ sont colinéaires à l'axe, donc $\vec{F}$ l'est aussi. Tout se passant sur l'axe, on ne perd aucune information en ne s'intéressant qu'à la projection sur l'axe. $\vec{F}$ est la résultante des forces qui s'appliquent au fluide contenu dans le volume de contrôle.
- e) $F = P_0 \cdot A_0 - P_a \cdot A_1 + F_{\text{tuyère/fluide}}$. On remplacera $F_{\text{tuyère/fluide}}$ par $F_{\text{fluide/tuyère}} = - F_{\text{tuyère/fluide}}$ (loi de l'action et de la réaction pour la tuyère immobile)
- f) Théorème du gradient (en projection sur l'axe) sur un volume qui enveloppe la tuyère : $P_a \cdot A_0 - P_a \cdot A_1 + F_{\text{atmosphère/tuyère}} = 0$
- g) En combinant les équations qui résultent de d), e) et f), on obtient :
 $(P_0 - P_a) \cdot A_0 - [F_{\text{fluide/tuyère}} + F_{\text{atmosphère/tuyère}}] = \rho \cdot q_v (V_1 - V_0)$
ou : $F_{\text{tuyère}} = (P_0 - P_a) \cdot A_0 - \rho \cdot q_v (V_1 - V_0)$
- h) En assimilant par approximation l'écoulement turbulent réel à l'écoulement d'un fluide parfait, on peut appliquer le théorème de Bernoulli : $P_0 + \rho \cdot V_0^2 / 2 = P_a + \rho \cdot V_1^2 / 2$
d'où : $P_0 - P_a = \rho / 2 \cdot (V_0^2 - V_1^2) = 255 \cdot \rho \cdot V_0^2 / 2 ; P_0 = 52,7 \text{ bar} !$
- i) $F_{\text{tuyère}} = 225 \cdot \rho \cdot V_0^2 / 2 \cdot A_0 = 143 \cdot 10^3 \text{ N} = 14,6 \text{ tonnes-force} !$

Exercice 29

Deux cylindres pleins, de même masse et de même diamètre, l'un en aluminium, l'autre en plomb, flottent dans du mercure (axe vertical). Lequel est le plus profondément immergé ? Justifier.

Corrigé :

Il s'agit d'un problème d'hydrostatique : la résultante des forces de pression qu'exerce le mercure sur chaque cylindre est égale et opposée au poids de ces cylindres. Or cette résultante est la même que si on remplaçait les cylindres par du mercure. Cette résultante est donc égale au poids du mercure déplacé (nous avons ainsi redémontré le théorème d'Archimède).

Si la masse des deux cylindres (et donc leur poids) est identique, le volume déplacé est le même : les deux cylindres (Pb et Al) sont immergés à la même profondeur. Par contre, à poids égal, le volume du cylindre d'aluminium est plus élevé et il dépasse plus au dessus du mercure.

Remarque : si on tenait compte de la poussée d'Archimède exercée par l'air, on conclurait que le cylindre en plomb s'enfonce un tout petit peu plus (infime).

Exercice 30

Les portes d'écluses sont utilisées pour réguler le niveau d'eau (ou le débit) dans des écoulements à surface libre. La figure représente une porte positionnée de telle façon que la profondeur en amont soit h_1 . La profondeur h_2 en aval est mesurée. Les grandeurs suivantes sont donc constantes et connues : h_1, h_2, ρ et g .

On suppose qu'elles déterminent le problème, c'est à dire que toutes les autres grandeurs sont des fonctions de ces quatre grandeurs.

Remarque: les 3 questions peuvent être traitées de façon indépendante.

1) Utiliser l'analyse dimensionnelle pour former les nombres sans dimension des 3 problèmes suivants (combien de variables, combien sont dimensionnellement indépendantes, combien de nombres adimensionnels ?) :

$$V_1 = f_1(h_1, h_2, \rho, g)$$

$$V_2 = f_2(h_1, h_2, \rho, g)$$

$$F/l = f_3(h_1, h_2, \rho, g)$$

V_1 et V_2 : vitesses en amont et en aval

F/l : force horizontale par unité de largeur l requise pour maintenir la porte d'écluse en place.

Dans les questions 2 et 3, vous allez expliciter les fonctions f_1, f_2 et f_3 .

2) a) Exprimer les vitesses en amont et en aval V_1 et V_2 , ainsi que le débit volumique Q par unité de largeur l de l'écoulement. On suppose pour cela qu'on a à faire à l'écoulement sans dissipation d'un fluide parfait (sans viscosité).

b) A.N. : $h_1 = 6 \text{ m}$ $h_2 = 3 \text{ m}$

c) Expliciter soigneusement la démarche qui conduit à formuler les hypothèses simplificatrices ci-dessus.

d) Vérifier que V_2 approche $\sqrt{2 g h_1}$ quand h_2 tends vers 0.

3) a) Calculer la force horizontale par unité de largeur l F/l requise pour maintenir la porte d'écluse en place. Préciser les volumes de contrôle utilisés.

b) Vérifier que cette expression conduit à des résultats cohérents :

- lorsque $h_2 = h_1$

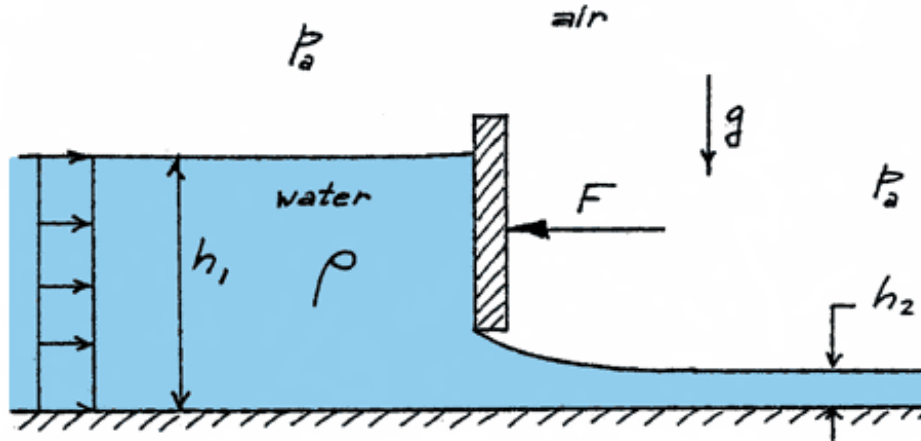
- lorsque $h_2 = 0$

c) A.N. : quelle force par unité de largeur de l'écoulement pour :

- $h_1 = 6 \text{ m}$, $h_2 = 3 \text{ m}$

- $h_1 = 6 \text{ m}$, $h_2 = 0 \text{ m}$

4) Peut-on négliger $F_{\text{atm/surface}}$ libre ?



Quelques propriétés de l'eau à 20°C

Pression de vapeur saturante	P_v	$\sim$	2500 Pa
Enthalpie de vaporisation	h_{lg}	$\sim$	$2,5 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$
Capacité calorifique (vapeur)	C_{p_v}	$\sim$	1900 J/kg .°C
Capacité calorifique (liquide)	C_{p_l}	$\sim$	4200 J/kg .°C
Masse volumique	ρ	$\sim$	1000 kg/m ³
Tension superficielle	σ	$\sim$	$7 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$
Viscosité dynamique (vapeur)	μ_v	$\sim$	10^{-5} Pa.s
Viscosité dynamique (liquide)	μ_l	$\sim$	10^{-3} Pa.s

Corrigé :

1) V_1 et V_2 mettent chacune en jeu une longueur (nous choisirons h_1), une vitesse et $\square$, qui permet de construire une énergie cinétique volumique (rang 3). Nous disposons donc des trois échelles caractéristiques classiques en mécanique des fluides. Avec ces échelles nous pouvons adimensionner les deux variables qui restent, soit h_2 et g , ce qui conduit à :

$$\frac{V_1^2}{g h_1} = g_1 \left(\frac{h_2}{h_1} \right) \text{ et } \frac{V_2^2}{g h_1} = g_2 \left(\frac{h_2}{h_1} \right)$$

Dans le problème de force n'apparaît aucune vitesse, mais il est facile de vérifier que h , g et ρ sont dimensionnellement indépendantes (L , LT^{-2} , ML^{-3}), d'où rang 3. Ce qui permet d'adimensionner les deux variables qui restent : F/l et h_2 :

$$\frac{F/l}{\rho g h_1^2} = g_3 \left(\frac{h_2}{h_1} \right)$$

2) a) A cet écoulement parfait, nous pouvons appliquer le théorème de Bernoulli en supposant qu'il existe une ligne de courant qui relie la surface libre en amont à la surface libre en aval :

$$Pa + \rho \frac{V_1^2}{2} + \rho g h_1 = Pa + \rho \frac{V_2^2}{2} + \rho g h_2$$

Le débit est le même en amont et en aval (pas d'accumulation, problème stationnaire) :

$$V_1 h_1 = V_2 h_2$$

D'où : $V_2^2 = \frac{2 g h_1}{1 + \frac{h_2}{h_1}}$ et : $Q = V_2 h_2$

$$v_2 \approx 9 m/s$$

2) b) AN : $v_1 \approx 4.5 m/s$
 $Q \approx 27 (m^3/s)/m$

2) c) Justification des hypothèses :

Parfait : utilisons le nombre de Reynolds pour comparer l'ordre de grandeur de l'énergie

cinétique et des contraintes visqueuses : $Re = \frac{\rho V^2}{\mu V/h}$; $Re_1 = Re_2 \sim 27 \cdot 10^6$

L'écoulement considéré, en amont comme en aval, est indirectionnel sans changement de section. Le seuil de transition laminaire/turbulent est donc sans doute élevé, probablement du même ordre que dans le cas des conduites cylindriques ($\sim 10^3$ à 10^4). Mais la valeur du nombre de Reynolds est ici suffisamment élevée pour être certain que l'écoulement est pleinement turbulent et que les effets dissipatifs y sont donc négligeables devant les effets inertiels. Cet écoulement peut être approximé par un écoulement parfait avec vitesse uniforme sur une section. Cette approximation qui peut être grossière, en particulier au passage de la porte d'écluse proprement dite. Cette dernière constitue une singularité géométrique qui peut tout à fait occasionner une perte de charge singulière. Seules la mesure expérimentale et la simulation de la turbulence peuvent indiquer l'importance de ce phénomène.

2) d) $V_2 \approx \sqrt{2 \rho h_1}$ quand h_2 voisine de 0.

Quand le débit est faible, le fluide en amont est quasi immobile et l'on retrouve la formule de Toricelli pour la vitesse à la sortie d'un réservoir.

3) a) Force requise pour maintenir la porte en place (par unité de largeur) :

Pour calculer une force, utilisons le théorème d'Euler (notre problème est stationnaire) :

Volume de contrôle = volume d'eau entre une section 1 en amont et une section 2 en aval.

$$\vec{F} = - \int_A \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \dot{m} (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\int_0^{h_1} (Pa + \rho g z) l dz - \int_0^{h_2} (Pa + \rho g z) l dz + F_{atm/surfacelibre} + F_{écluse/eau} = \dot{m}(V_2 - V_1)$$

Dans le calcul des pressions ci-dessus, z est la profondeur sous le niveau local de l'eau. Dans le calcul du membre de droite, on a supposé la vitesse identique quelle que soit la profondeur (cf 2)a)).

Nous ne savons pas calculer directement la force exercée par l'atmosphère sur la surface libre. Pour nous en sortir, envisageons un second volume qui subirait la même force : le même que précédemment auquel nous ajoutons l'espace occupé par la porte d'écluse. Supposons encore que nous ayons détourné le cours d'eau (quelle n'est pas la force de l'imagination !). Nous aurions alors un volume fermé sur lequel s'applique partout la pression atmosphérique. Si nous considérons que la pression est uniforme tout autour de ce volume, le théorème du gradient (en annexe dans le poly) nous indique que la résultante des forces est nulle (le théorème d'Archimède tient compte des variations de P_a avec l'altitude et nous dit que cette résultante est la poussée d'Archimède qui s'exerce sur ce volume, égale au volume d'air déplacé. Nous le négligerons).

$$P_a h_1 l - P_a h_2 l + F_{atm/surfacelibre} + F_{atm/écluse} \approx 0$$

En retranchant les équations membre à membre, l'action de l'atmosphère disparaît, ce qui était notre objectif :

$$\rho g l \frac{h_1^2 - h_2^2}{2} + F_{écluse/eau} - F_{atm/écluse} \approx \dot{m}(V_2 - V_1) \text{ que l'on peut encore écrire :}$$

$$(F_{/écluse})/l = (F_{eau/écluse})/l + (F_{atm/écluse})/l = \rho g \frac{h_1^2 - h_2^2}{2} - \frac{\dot{m}}{l} (V_2 - V_1)$$

Il est alors possible d'éliminer $\dot{m}$, V_1 et V_2 en utilisant les résultats de la question 2 pour obtenir :

$$(F_{/écluse})/l = \frac{\rho g h_1^2}{2} \frac{\left(1 - \frac{h_2}{h_1}\right)^3}{1 + \frac{h_2}{h_1}}$$

3) b) $h_2 = h_1$ (et donc $V_2 = V_1$) correspond au cas où l'on a retiré la porte hors de l'eau. On obtient bien : $F_{\text{écluse}} = 0$

$h_2 = 0$, la porte interrompt le courant ($V_2 = 0$, $m = 0$) :

$$((F_{\text{écluse}})/l = \frac{\rho g h_1^2}{2}, \text{ ce qui correspond bien à la pression hydrostatique.}$$

Attention : Le problème n'est plus stationnaire et il faut remonter au bilan instationnaire. Mais le terme d'accumulation ne se manifeste que dans la direction verticale, ce qui ne change pas la formulation finale.

$$3)c) \quad h_1 = 6m, \quad h_2 = 3m : \quad F/l = \frac{\rho g h_1^2}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^3 / \left(\frac{3}{2} \right) \approx 1.5 \cdot 10^4 \text{ N/m} \quad (\approx 1500 \text{ kgf/m})$$

$$h_1 = 6m, \quad h_2 = 0 : \quad F/l = \frac{\rho g h_1^2}{2} = 18 \cdot 10^4 \text{ N/m} \quad (\approx 18\,000 \text{ kgf/m})$$

La pression hydrostatique sur la porte fermée est très élevée. La force requise pour maintenir la porte décroît très vite quand on l'ouvre.

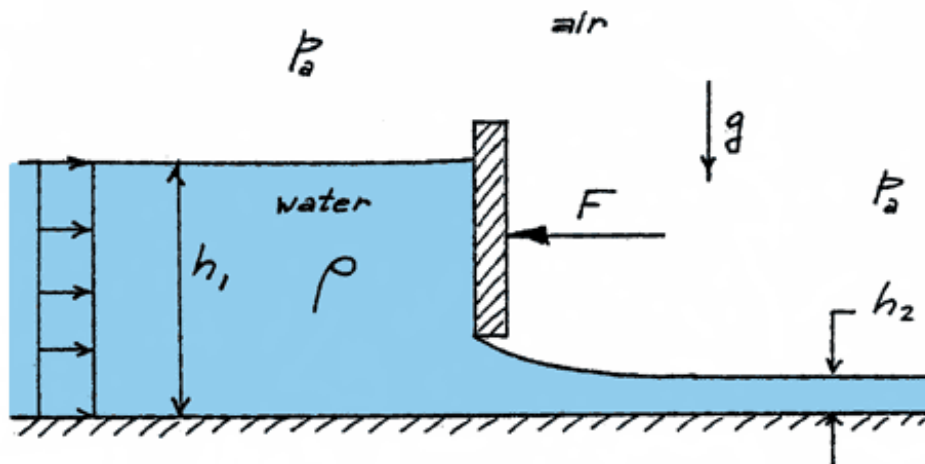
4) Nous avons vu que le théorème du gradient appliqué à un volume qui englobe la porte de l'écluse s'écrit :

$$P_a h_1 l - P_a h_2 l + F_{\text{atm/surfacelibre}} + F_{\text{atm/écluse}} \approx 0$$

Que nous pouvons réécrire : $F_{\text{atm/surfacelibre}} + F_{\text{atm/écluse}} \approx -P_a l (h_1 - h_2)$

Ou encore : $F_{\text{atm/surfacelibre}} \approx -P_a l (h_1' - h_2)$

Cette force n'est donc négligeable que si $(h_1' - h_2)$ est négligeable devant la hauteur utile de la porte d'écluse $(h_1 - h_2)$.



Exercice 31

On s'intéresse ici aux vagues à la surface libre d'un canal (ou d'une rivière, ou d'un océan...), qui résultent aussi de l'interaction entre inertie et pesanteur.

Dans ce qui suit, nous considérons un liquide de masse volumique ρ , contenu dans un canal horizontal de section rectangulaire, de largeur uniforme a , aux parois verticales, de profondeur h . Le liquide est soumis à l'action de la pesanteur g . Les vagues s'y déplacent avec la célérité (vitesse d'onde) c .

A) Partant de l'idée précédente (interaction entre inertie et pesanteur), on négligera l'effet de la viscosité de l'eau. Par contre, on utilisera le constat que les vagues sont plus rapides quand la profondeur du canal h est plus grande, mais que leur célérité est indépendante de la largeur du canal a . Déterminer par *analyse dimensionnelle* la forme de l'expression pour la vitesse de propagation de ces ondes (combien de variables, combien d'échelles caractéristiques, justifier et les choisir, combien de nombres adimensionnels, lesquels ?).

B) On recherche maintenant l'expression de la vitesse de propagation des vagues en utilisant les *bilans macroscopiques*. Pour représenter schématiquement le phénomène à l'origine de la vague, considérons un panneau (P) disposé en travers du canal. Ce panneau se déplace vers la droite à la vitesse v constante tout en assurant une séparation étanche. Du côté droit, le niveau du liquide monte, du côté gauche, il baisse. Nous supposons que, du côté droit, le niveau présente une discontinuité de hauteur dans le plan (P_0) et que cette discontinuité se propage dans l'eau à la célérité c constante (qui est différente de la vitesse à laquelle l'eau se déplace). Soit $h + \Delta h$ la hauteur du liquide, supposée constante, entre (P) et (P_0) . On suppose que ce liquide est uniformément poussé par (P) à la vitesse v . On suppose que le liquide au-delà de (P_0) n'a pas encore subi l'influence du déplacement de (P) : il est immobile et sa hauteur est h .

On se place dans le repère (R_0) lié à (P_0) , qui se déplace donc à la vitesse c par rapport au canal, et l'on considère deux plans $(P1)$ et $(P2)$, à une distance fixe de part et d'autre de (P_0) . Ils délimitent le volume de contrôle sur lequel nous travaillerons.

Remarque : le schéma à l'instant $t + dt$ aide à comprendre ce qui se passe. Il n'est pas nécessairement utile à la résolution.

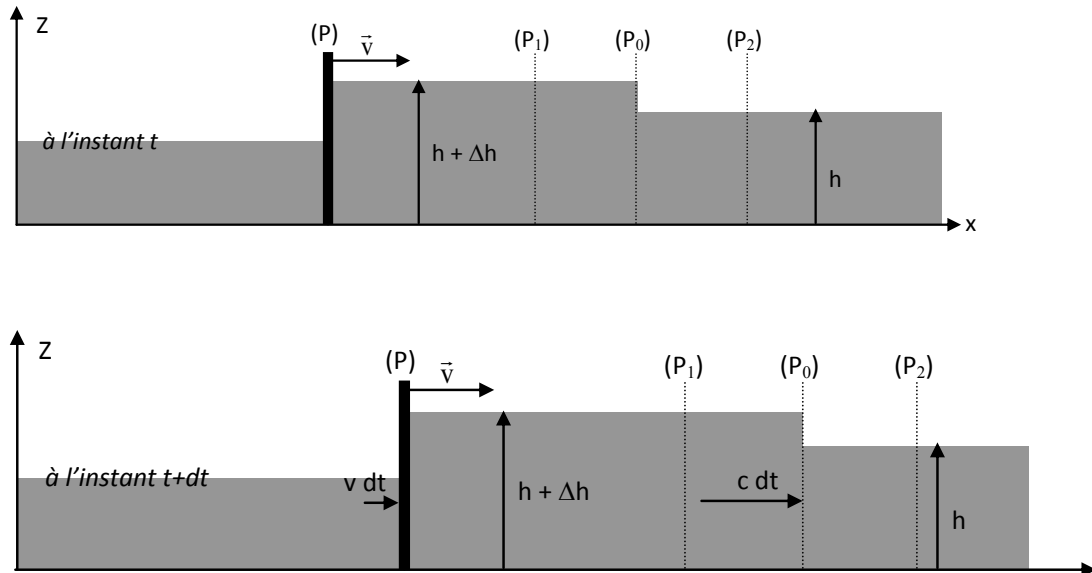
1) Dire pourquoi la pression à la profondeur z dans l'eau au niveau des plans $(P1)$ et $(P2)$ obéit à la loi de l'hydrostatique. L'expliciter.

2) Effectuer un bilan de matière sur le volume de contrôle défini précédemment pour relier v , c , h , et Δh . Pour cela, bien préciser les vitesses de l'eau en $(P1)$ et $(P2)$ dans le repère lié à (P_0) . Montrer que cette relation devient : $v/c \approx \Delta h/h$ quand $\Delta h \ll h$.

3) Ecrire le bilan macroscopique de quantité de mouvement (théorème d'Euler). Expliciter la raison principale qui permet d'utiliser ce théorème dans ce cas. Montrer que ce bilan devient : $c.v \approx g. \Delta h$ quand $\Delta h \ll h$.

4) Calculer c quand $\Delta h \ll h$.

A.N. : déterminer c pour $h = 2,5$ m et pour $h = 4000$ m.



Corrigé :

A) analyse dimensionnelle :

La célérité c des ondes dépend de ρ , g et h . On a donc 4 grandeurs (en comptant c). h , g et ρ sont dimensionnellement indépendantes (L , L/T^2 , M/L^3). Le problème peut donc s'écrire sous la forme d'une relation entre $4-3 = 1$ nombre adimensionnel, autrement dit : $\Pi = cnste$.

On vérifie immédiatement que ρgh et ρc^2 sont des énergies volumiques (potentielle et cinétique ou inertielle), donc de même dimension : $(ML^{-1}T^{-2})$.

La célérité des vagues vérifie donc : $\Pi = \frac{c}{\sqrt{gh}} = cnste$

B) bilans macroscopiques :

1) En (P2) le liquide est *immobile* par rapport au repère fixe lié à la terre. En (P1) le liquide est en *translation* horizontale *uniforme* à la vitesse v , ou immobile par rapport à un repère en translation uniforme à la vitesse v . D'où possibilité d'utiliser la loi de l'hydrostatique.

2) Bilan matière : $(h + \Delta h)(c - v) = hc$, d'où : $\Delta h / (h + \Delta h) = v / c$. Et $\Delta h / h \approx v / c$ quand $\Delta h \ll h$.

3) Le théorème d'Euler (bilan de quantité de mouvement en régime permanent) nécessite que le système soit dans un état stationnaire. C'est le cas du volume de contrôle *dans le repère mobile* (R_0). On ne s'intéresse qu'à la composante horizontale. Les forces qui s'appliquent

sont dues à la pression en (P_1) et (P_2) ainsi que sur le ressaut en (P_0) . Les débits de quantité de mouvement ont lieu en (P_1) et (P_2) .

Dans le repère (R_0) le liquide se déplace vers la gauche. On orientera l'axe dans ce sens (plus simple mais pas nécessaire).

Résultante des forces (par unité a de largeur) :

$$F = \int_0^h (Pa + \rho g z) dz + Pa \Delta h - \int_0^{h+\Delta h} (Pa + \rho g z) dz = -\rho g \Delta h \left(h + \frac{\Delta h}{2} \right)$$

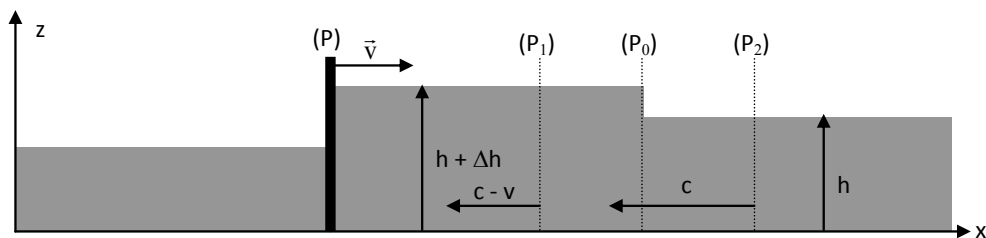
Débit net de quantité de mouvement entrant :

$$\dot{m} (v_1 - v_2) = \dot{m} [(c-v) - c] \text{ avec, mesuré côté } P_2, \dot{m} = \rho c h, \text{ d'où : } \dot{m} (v_1 - v_2) = -\rho v c h$$

Et finalement : $g \Delta h \left(1 + \frac{\Delta h}{2h} \right) = c v$. Et : $g \Delta h \approx c \cdot v$ quand $\Delta h \ll h$.

4) En divisant $c \cdot v$ (question 3) par v/c (question 2), on obtient : $c \approx \sqrt{g h}$. L'analyse par les bilans macroscopiques confirme que les variables pertinentes sont bien celles qui ont été envisagées lors de l'analyse dimensionnelle. De plus elle précise que la constante est égale à l'unité.

6) Pour $h = 2,5 \text{ m}$, on obtient : $c \approx 5 \text{ m/s}$ ou 18 km/h . Pour $h = 4\,000 \text{ m}$, on obtient : $c \approx 200 \text{ m/s}$ ou 720 km/h . Cette vitesse impressionnante correspond à ce qui se passe lorsqu'un tsunami se propage dans un océan : il le traverse en quelques heures seulement.



Exercice 32

On s'intéresse au problème de la cuisson d'une dinde dans un four de cuisine.

1) On fait l'analyse dimensionnelle du problème, que l'on admettra complètement décrit par les variables dimensionnées suivantes :

k : conductivité thermique de l'objet

ρ : masse volumique de l'objet

C_p : capacité calorifique massique de l'objet

L : dimension caractéristique de l'objet

t_c : temps de cuisson

Préciser la dimension de k et celle de C_p . Ecrire la matrice dimensionnelle. Combien d'échelles caractéristiques ? Lesquelles ? Combien de nombres sans dimensions ? En déduire l'expression du temps de cuisson en fonction des autres variables du problème.

2) Application : sur un livre de cuisine, on trouve les indications suivantes relatives à la cuisson de la dinde :

Masse de la dinde en kg	Temps de cuisson par kg (en minutes)
3 à 5	10 à 12
5 à 8	9 à 10
9 à 12	7 à 9

Ces indications confirment-elles les résultats de la question 1 ?

Rappels :

- Le symbole de la dimension de la grandeur température est θ .
- L'énergie Q (en Joules) nécessaire pour échauffer une masse de liquide de ΔT est :
 $Q = m.C_p.\Delta T$
- La puissance thermique $\dot{Q}$ (W) qui traverse par conduction une plaque de surface A et d'épaisseur e est : $\dot{Q} = k.A. \Delta T/e$.

Corrigé :

1) Sachant qu'une énergie est le produit d'une force par une longueur, les rappels fournis permettent d'établir la dimension de k et celle de C_p . D'où la matrice dimensionnelle :

	t_c	L	ρ	C_p	k		k/C_p	$k/(\rho C_p)$	$kt_c/(\rho C_p)$	$kt_c/(\rho C_p L^2)$
M			1		1		1	0		
L		1	-3	2	1		-1	2	2	0
T	1			-2	-3		-1	-1	0	
θ				-1	-1		0			

Il est clair que les vecteurs colonne associés aux 4 premières variables (t_c , L , ρ , C_p) génèrent un espace de dimension 4. Ces 4 quantités peuvent être choisies comme échelles caractéristiques du problème. Cela conduit à un seul nombre adimensionnel : $K = kt_c/(\rho C_p L^2)$. Ce nombre n'est fonction de rien, d'aucun autre nombre adimensionnel, il est donc constant.

Le temps de cuisson obéit donc à : $t_c = (K/k). \rho C_p L^2$. La masse m est en L^3 ($m \propto L^3$). t_c/m est donc en L^{-1} , ou en $m^{-1/3}$.

2) Si le temps de cuisson est de 11 min/kg pour une dinde de 4kg, il doit être de $11.(4/6.5)^{1/3} = 9.4$ min/kg pour une dinde de 6.5 kg, et de $11.(4/10.5)^{1/3} = 8$ min/kg pour une dinde de 10.5 kg. C'est à peu de chose près ce que nous indique le livre de cuisine.

BIBLIOGRAPHIE

- S. Chaussedent, Travaux dirigés de Mécanique des Fluides, UFR sciences, Université d'Angers.
- J.M. Brébec, Mécanique des fluides, Hprépa, Hachette, 1998.
- M. Cournil & J.P. Bigot, Mécanique des Fluides et Thermo-hydraulique, Ecole Nationale Supérieure des Mines, Saint-Etienne, 2010.

Exercices et examens résolus : Mécanique des Fluides

M. BOURICH

Ce recueil d'exercices et problèmes examens résolus de mécanique du fluide est un support pédagogique destiné aux étudiants de la deuxième année de l'école National des Sciences Appliquées de Marrakech. Ces exercices couvrent les cinq chapitres du polycopié de cours de la mécanique des fluides:

-  Etude phénoménologique des fluides.
-  Cinématique des fluides.
-  Bilans dynamique et thermodynamique
-  Dynamique locale des fluides parfaits.
-  Fluides visqueux incompressible

L'ensemble des exercices et examens résolus devrait permettre aux étudiants :

-  de consolider leurs connaissances,
-  un entraînement efficace afin de s'assurer que le cours est bien assimilé,
-  d'acquérir les outils et techniques nécessaires à leur formation,
-  d'initier leurs cultures scientifique en mécanique des fluides.

Comme pour tous les exercices auto-correctifs, les solutions profitent plus aux étudiants qui fournissent l'effort nécessaire pour réfléchir et essayer de résoudre les exercices proposés. Je dois souligner que ce document ne remplace en aucun cas le TD en présentiel.

M. BOURICH, Docteur ès Sciences, Enseignant chercheur à l'École Nationale des Sciences Appliquées-Marrakech, Spécialité : Énergétique, membre du laboratoire Mécanique des Fluides et Énergétique de la Faculté des Sciences Semlalia-Marrakech.

Un des plus grands avantages qu'on tire de notre théorie, c'est de pouvoir démontrer que la fameuse loi de mécanique appelée la conservation des forces vives a lieu dans le mouvement des fluides comme dans celui des corps solides

Citation **J.R. D'Alembert**