

Résistance des Matériaux — Notes de Cours

NICOLAS RANC · GUILLAUME MARTIN · ENSAM
ESFF



Résistance des matériaux : notes de cours

Nicolas Ranc, Guillaume Martin

Ecole Supérieure de Fonderie et de Forge

2023-2024



Trouver les documents de cours



<https://pimm.artsetmetiers.fr/resistance-des-materiaux-1ere-annee-esff>



INTRODUCTION



Introduction

Objectifs de l'ingénieur en mécanique des structures :

Dimensionnement d'une pièce mécanique ou d'un ouvrage d'art pour qu'ils résistent aux actions extérieures permanentes et accidentelles pendant toute la durée de vie.

- Exemple en construction métallique

- Ancienne



Viaduc de Garabit, Auvergne.

- Récente



Gare SNCF, Aéroport Charles de Gaulle. ▶



Introduction

- Exemples en construction bois ou en béton armé et précontraint
- Charpente traditionnelle bois
- Structure industrielle en béton armé et précontraint



Introduction

Exemple d'une pièce mécanique

- Arbre de turbine



- Exemple de structure que l'ingénieur doit et devra dimensionner



Piston de moteur thermique fabriqué par impression 3D métallique (source Oerlikon)

L'ensemble de ces structures comportent des pièces élancées



Définition du dimensionnement - étapes d'un calcul de structure

Pourquoi dimensionner une structure ?

- Déterminer la géométrie de la structure pour assurer
 1. la résistance mécanique (État Limite Ultime, ELU)
 2. une déformation limitée (Etat Limite de Service, ELS)
- Optimiser la structure afin de réduire les quantités de matière et les coûts

Nécessité de faire des calculs pour prédire le comportement de la structure et assurer sa **résistance** et son **bon fonctionnement**.



Définition du dimensionnement - étapes d'un calcul de structure

Comment dimensionner une structure ?

- Définition d'un **cahier des charges** spécifiant :
 1. la **géométrie** globale de la structure
 2. les **charges extérieures** (permanentes, accidentelles, climatiques (neige et vent)...))
 3. le choix d'un **matériau** et identification de son **comportement**
- **Modélisation** de la structure :
 1. définir les variables caractérisants l'état de la structure (contraintes internes, déplacements, déformations...)
 2. écrire des relations reliant ces variables (équations d'équilibre...)
- **Résolution** analytique ou numérique des équations du modèle
- **Vérification** de la tenue de la structure
 1. déplacement et déformation limitées (État limite de service),
 2. contraintes internes inférieures aux contraintes maximale de résistance du matériau (État limite ultime)

Modélisation - MMC - Résistance des matériaux

- Le calcul de structures s'accompagne donc toujours d'une **modélisation** définissant les variables qui décrivent le système et les équations qui les relient.
- Le résistance des matériaux s'appuie sur une théorie plus générale, la **mécanique des milieux continus (MMC)**, qui permet de décrire la déformation des milieux déformables (solides, fluides, matériaux granulaires...)

La MMC est basée sur plusieurs hypothèses fondamentales :

- ▶ **Continuité** : à l'échelle de la structure, la matière semble continue, c'est à dire que les variables qui décrivent son état varient continûment par rapport à l'espace
- ▶ **Représentativité** : à l'échelle de la structure, un volume de matière peut être considéré comme homogène et représentatif : notion de volume élémentaire représentatif.

En général un problème de MMC est complexe et ne peut se résoudre analytiquement, on a souvent recours à des méthodes numériques et des simplifications (géométriques,...)



Résistance des matériaux

- La résistance des matériaux est une théorie plus simple basée sur la MMC
- La résistance des matériaux est un outil pour dimensionner certaines structures constituées de composants élancés (ayant une dimension plus grande que les deux autres). Elle est également appelée **théorie des poutres**.
- Elle suppose donc un certain nombre d'hypothèses simplificatrices
 - ▶ Géométrie,
 - ▶ Comportement mécanique du matériau,
 - ▶ Cinématique de déformation,
 - ▶ Application des efforts et des conditions de liaison.
- **Remarque** : il existe également des théories décrivant des géométries où une dimension est plus petite que les deux autres : la théorie des plaques et des coques.



HYPOTHÈSES DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX



HYPOTHÈSES DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Hypothèses géométriques

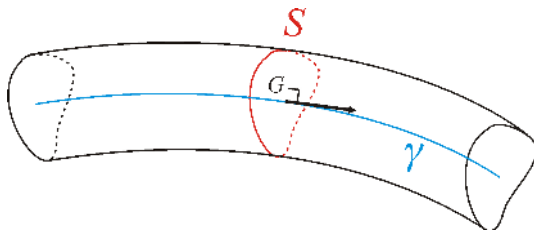


Notion de poutre

Les hypothèses géométriques de la RdM sont en partie associées à la notion de poutre.

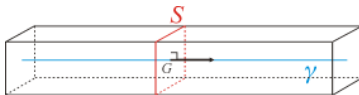
Définition d'une poutre

Une poutre est un solide généré par une surface plane, appelée **section droite**, dont le centre de gravité décrit une courbe γ , appelée **fibre moyenne**, telle que la normale à S et le tangente à γ soient colinéaires.

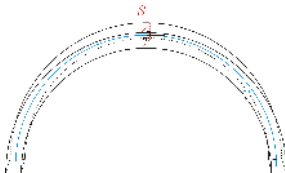


Exemple de poutre particulières

- Poutre droite à section rectangulaire : la courbe γ est alors un segment de droite et la section droite S un rectangle.



- Arc circulaire à section rectangulaire : la courbe γ est alors un arc de cercle et la section droite S un rectangle.



Arche de Saint-Louis (USA)

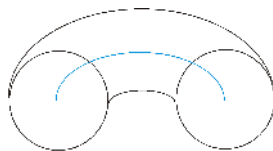


Hypothèses géométriques supplémentaires

1. La longueur de la poutre doit être grande devant les dimensions de la sections : $L \gg b, h$. On dit que la poutre est élancée.
2. Le rayon de courbure de la poutre doit être grand devant les dimensions de la section.



OUI

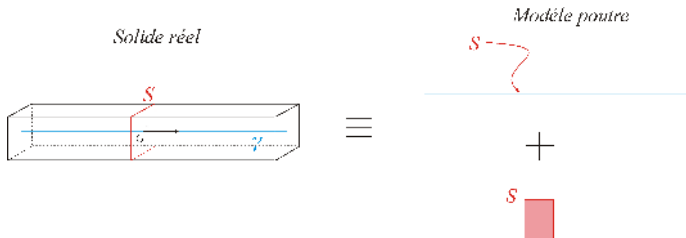


NON

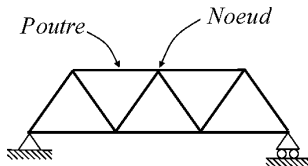


Modélisation d'une poutre

On représente alors schématiquement une poutre par sa ligne moyenne γ à laquelle on affecte une section S en tout point.



- exemple d'une structure treillis : ensemble de poutres liées par des noeuds (traités ponctuellement)

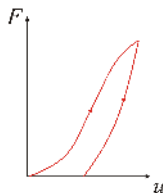


HYPOTHÈSES DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

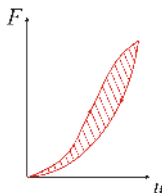
Hypothèses sur le comportement du matériau



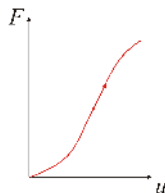
Comportement du matériau



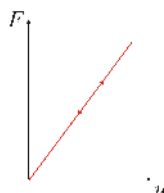
Comportement
non recouvrable,
non réversible,
non linéaire.



Comportement
recouvrable,
non réversible,
non linéaire.



Comportement
recouvrable,
réversible,
non linéaire.

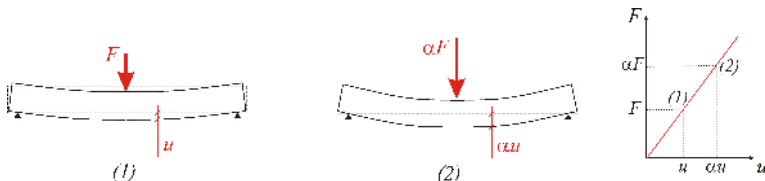


Comportement
recouvrable,
réversible,
linéaire.

- Un comportement recouvrable, réversible et linéaire est qualifié d'élastique linéaire.
- La résistance des matériaux fait l'hypothèse d'un comportement **élastique linéaire**.



Conséquence du comportement élastique linéaire : le principe de superposition



- Si l'on multiplie par α la force appliquée, le déplacement est également multiplié par α
- La relation entre la force appliquée et le déplacement est linéaire.



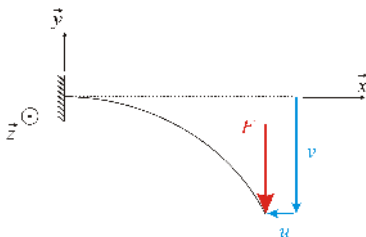
HYPOTHÈSES DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Hypothèses sur la cinématique de déformation

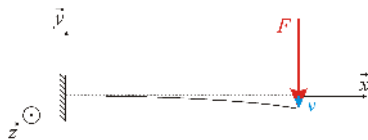


Hypothèse des petits déplacements

Configuration déformée :



Grands déplacements



Petits déplacements

- La configuration déformée est très proche de la configuration initiale,
- Les déplacements des points matériels restent faibles devant les dimensions de la structure : $v \ll L, h, b$,
- Les déplacements dans une direction transverse à la direction de sollicitation sont négligeables : $u \ll v$ ou $u \approx 0$.

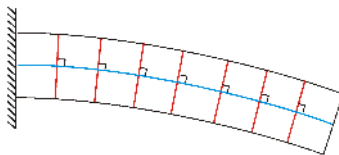
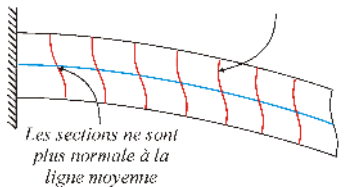
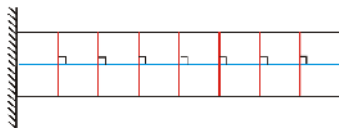
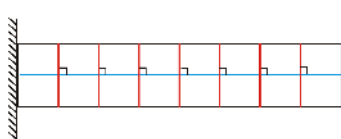
La résistance des matériaux suppose **des petits déplacements**



Hypothèses de Navier Bernoulli

Hypothèses de Navier Bernoulli

Les sections normales à la ligne moyenne restent planes et normales à la ligne moyenne pendant la déformation.



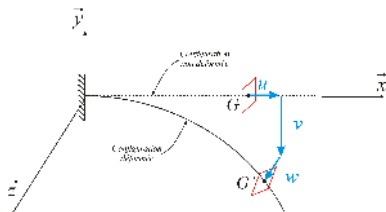
Hypothèses de Navier Bernoulli

La résistance des matériaux suppose **les hypothèses de Navier Bernoulli**



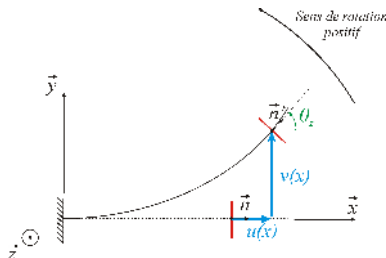
Description de la cinématique de déformation

- Déplacement de la ligne moyenne



- $\vec{GG'} = u\vec{x} + v\vec{y} + w\vec{z}$.
- Attention** : u , v et w sont des grandeurs scalaires algébriques.
- dans le cas d'un problème plan : $w = 0$

- Rotation des sections (cas de la poutre droite)



- Rotation de la section : θ_z .
- $\theta_z(x) = \frac{dv}{dx} = v'(x)$
- Attention** : θ_z est une grandeurs algébriques.

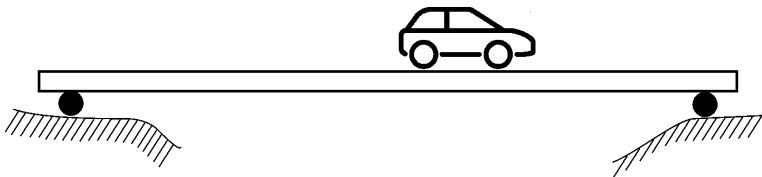


HYPOTHÈSES DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Hypothèses sur les sollicitations extérieures



Différents types de sollicitations extérieures

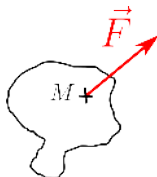


- Action mécanique : tend à déplacer, déformer ou maintenir au repos un solide
 - ▶ Action à distance : poids propre structure (action extérieure)
 - ▶ Action de contact : générée par le contact entre deux solides (action de liaison, action extérieure)
- Modélisation d'une action : force et/ou moment, torseur
 - ▶ Force : provoque ou s'oppose à un mouvement de translation
 - ▶ Moment (ou couple de force) : provoque ou s'oppose à un mouvement de rotation
 - ▶ En règle générale l'action mécanique exercée sur un solide est modélisée par un torseur

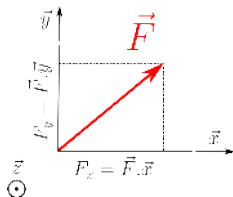


Rappel force - calcul algébrique

- Une force est une action mécanique particulière qui tend à déplacer un point matériel.
- Une force est modélisée par un vecteur $\vec{F}$ et un point d'application M .



- Si l'on choisit un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on peut représenter le vecteur $\vec{F}$ par ces trois composantes F_x , F_y et F_z telles que $\vec{F} = F_x \vec{x} + F_y \vec{y} + F_z \vec{z}$ ($F_x = \vec{F} \cdot \vec{x}$, $F_y = \vec{F} \cdot \vec{y}$, $F_z = \vec{F} \cdot \vec{z}$)



Rappel force - calcul algébrique

- On utilise également la représentation suivante de $\vec{F}$ dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

- Si l'on choisit $\vec{i}$ un vecteur unitaire ayant la direction de la force $\vec{F}$ on pose en général : $\vec{F} = F\vec{u}$


$$\vec{F} = F\vec{i} \quad \equiv \quad \vec{i} \quad F$$

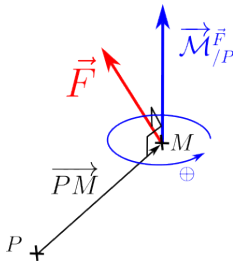
Attention, F_x, F_y, F_z et F sont des grandeurs algébriques !



Rappel moment d'une force

- Le moment d'une force par rapport à un point M est une grandeur vectorielle qui caractérise la capacité de cette force à faire tourner autour du point M .
- Le moment de la force $\vec{F}$ s'appliquant en M par rapport au point P est défini par le produit vectoriel suivant :

$$\vec{\mathcal{M}}_{/P}^{\vec{F}} = \overrightarrow{PM} \wedge \vec{F}$$



- Le moment d'une force $\vec{F}$ possède la propriété de transport suivante :

$$\vec{\mathcal{M}}_{/B}^{\vec{F}} = \vec{\mathcal{M}}_{/A}^{\vec{F}} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$$



Rappel moment d'une force

- Si l'on considère un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on peut déterminer les composantes de $\vec{\mathcal{M}}_{/M}^{\vec{F}}$:

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M - x_P \\ y_M - y_P \\ z_M - z_P \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_M - y_P)F_z - (z_M - z_P)F_y \\ (z_M - z_P)F_x - (x_M - x_P)F_z \\ (x_M - x_P)F_y - (y_M - y_P)F_x \end{pmatrix}$$

- Dans un problème plan, la force est dans le plan de la structure ainsi que le vecteur $\vec{PM}$ et le moment est donc normal au plan.
- Si l'on choisit un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et que l'on considère un problème dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$, on pose le scalaire M_z tel que

$$\vec{\mathcal{M}}_{/M}^{\vec{F}} = M_z \vec{z}$$

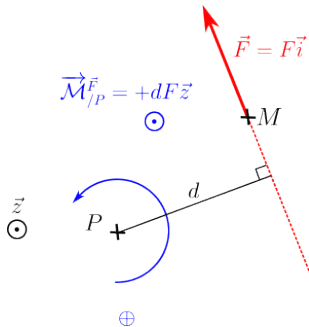


Rappel - moment d'une force

- Dans un problème plan, on peut alors estimer rapidement le moment de la force $\vec{F} = F\vec{i}$ par rapport au point M en utilisant le bras de levier d (distance entre le point P et la droite passant par M et de vecteur directeur $\vec{F}$) :

$$M_z = \pm dF$$

Le signe étant déterminé en regardant dans quels sens fait tourner la force.



Rappel - torseur des actions mécaniques

- Un torseur est un champ de vecteurs $\vec{\mathcal{M}}(A)$ particulier (A étant un point de l'espace $\mathcal{E}$) pour lequel il existe un vecteur $\vec{\mathcal{R}}$ tel que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2 \quad \text{on a} \quad \vec{\mathcal{M}}(B) = \vec{\mathcal{M}}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\mathcal{R}}$$

- Un torseur, noté $\{\mathcal{T}\}$, peut être représenté au point P par sa résultante, $\vec{\mathcal{R}}$ et son moment en P , $\vec{\mathcal{M}}_{/P}$:

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \vec{\mathcal{R}} \mid \vec{\mathcal{M}}_{/P} \right\}_P$$

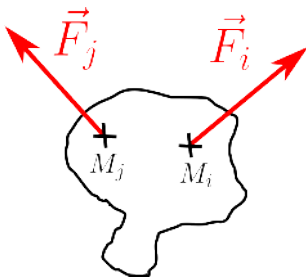


Rappel - torseur des actions mécaniques

- L'action mécanique associée à un ensemble de forces $\vec{F}_i$ appliquées en M_i sur un solide peut être modélisée par un torseur appelé le **torseur des actions mécaniques** noté $\{\mathcal{F}\}$. Sa résultante et son moment en P s'écrivent

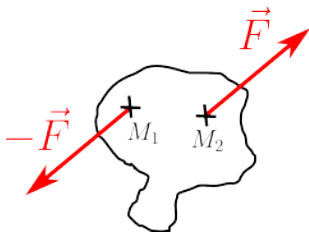
$$\vec{\mathcal{R}} = \sum_i \vec{F}_i \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_P = \sum_i \overrightarrow{PM_i} \wedge \vec{F}_i$$

- La donnée de la résultante $\vec{\mathcal{R}}$ et de du moment en un point $\vec{\mathcal{M}}_P$ permet de définir complètement l'action mécanique appliquée sur le solide.



Rappel - torseur des actions mécaniques

- Torseur de résultante nulle : le moment est alors le même en tout point (on dit que c'est un invariant). C'est l'exemple d'un couple de force.



- Torseur de moment nul en un point : c'est par exemple le cas quand d'une force ponctuelle au niveau de son point d'application.



Modélisation des actions extérieures en RdM

Hypothèse de Saint Venant

les résultats de la **résistance des matériaux** ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des efforts intenses (typiquement 2 à 3 fois la largeur de la section normale).

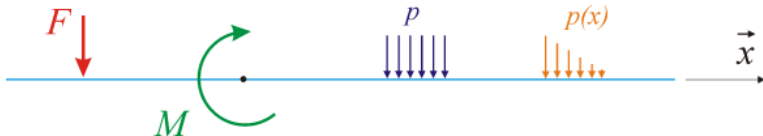
- **Conséquence** : par approximation, on considère uniquement les actions appliquées sur la ligne moyenne.



Modélisation des actions extérieures

Différents type d'actions extérieures :

- Force ponctuelle F , en N (*action exercée par un essieu, appui d'une autre poutre...*)
- Moment ou couple de force M , en N m (*excentrement de force, moteur tournant...*)
- Force répartie uniforme p , en N/m (*Poids propre, charge d'exploitation, sollicitation de neige ou vent...*)
- Force répartie non uniforme $p(x)$, (*pression hydrostatique : distribution triangulaire*).

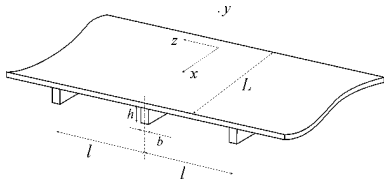


Exemple de calcul de forces réparties

- Poids propre d'une poutre rectangulaire de densité ρ :



- Descente du poids propre d'une dalle sur une poutre de densité ρ et d'épaisseur e :



Actions de liaison - liaison parfaite

- Une liaison est caractérisée par le contact entre deux solides. Ce contact impose
 - ▶ des conditions cinématiques (conditions sur le mouvement relatif des solides) ; on dit que la liaison bloque certains degrés de liberté
 - ▶ des actions mécaniques entre les deux solides (Force ou moment)
- Hypothèses :
 - ▶ Cas des liaisons parfaites (sans jeu ni frottement)
 - ▶ Cas des structures planes se déformant dans le plan
- Trois liaisons différentes
 - ▶ **Appui simple**
 - ▶ **Articulation**
 - ▶ **Encastrement**

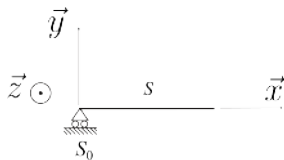


La liaison appui simple

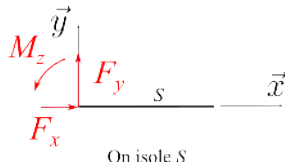
Réal



Modélisation



Actions associées



$$\begin{cases} u_x = \\ u_y = \\ \theta_z = \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = \\ F_y = \\ M_z = \end{cases}$$

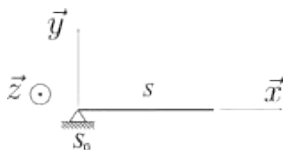


La liaison articulation

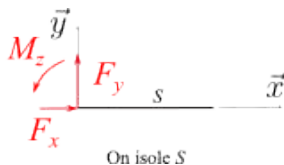
Réel



Modélisation



Actions associées



$$\begin{cases} u_x = \\ u_y = \\ \theta_z = \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = \\ F_y = \\ M_z = \end{cases}$$

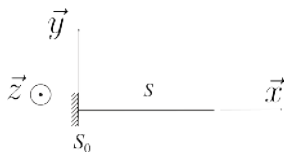


La liaison encastrement

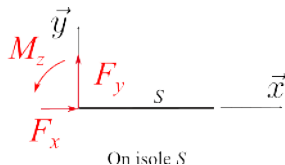
Réel



Modélisation



Actions associées



$$\begin{cases} u_x = \\ u_y = \\ \theta_z = \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = \\ F_y = \\ M_z = \end{cases}$$



ÉQUILIBRE D'UNE STRUCTURE DÉTERMINATION DES EFFORTS DE LIAISON



ÉQUILIBRE D'UNE STRUCTURE

Principe fondamentale de la statique



Principe fondamental de la statique

Principe fondamental de la statique

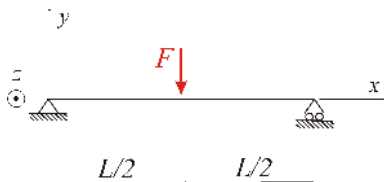
Un solide ou un système de solide est en équilibre s'il existe un référentiel Galiléen tel que dans ce référentiel, le torseur des sollicitations extérieures exprimé en un point quelconque O est nul.

$$\{\mathcal{T}^{ext}\} = \left\{ \sum \vec{F}_{ext} \mid \sum \vec{\mathcal{M}}_{ext/O} \right\}_O = \left\{ \vec{0} \mid \vec{0} \right\}$$



Méthodologie

1. On isole un solide ou un ensemble de solides
 2. On fait le bilan des actions (efforts extérieurs, efforts de liaison)
 3. On fait le bilan des inconnues
 4. On écrit l'équilibre dans la **configuration non déformée**
- **Un exemple** : la poutre sur deux appuis



Exemple de la poutre sur deux appuis : bilan des actions

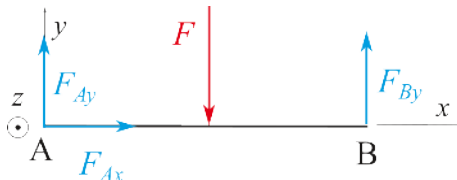
- On isole la poutre et on fait le bilan des actions



- Bilan des actions :
- Bilan des inconnues :



Exemple de la poutre sur deux appuis : écriture de l'équilibre



- **Écriture de l'équilibre :**

- ▶ $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$:
 - ▶ Projection suivant $\vec{x}$:
 - ▶ Projection suivant $\vec{y}$:
- ▶ $\sum \vec{\mathcal{M}}_{ext/A} = \vec{0}$:
 - ▶ Projection suivant $\vec{z}$:



Exemple de la poutre sur deux appuis : système d'équation et résolution

On obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} F_{Ax} = 0 \\ F_{Ay} + F_{By} = F \\ F_{By}L = \frac{FL}{2} \end{cases}$$

Ce système peut se résoudre afin d'obtenir les inconnues de liaison :

$$\begin{cases} F_{Ax} = \\ F_{Ay} = \\ F_{By} = \end{cases}$$



ÉQUILIBRE D'UNE STRUCTURE

Notion de structure isostatique et hyperstatique

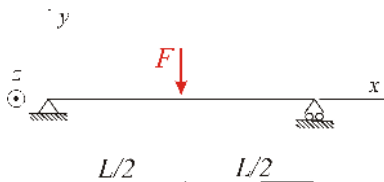


Structure isostatique

Définition d'une structure isostatique

Une structure est dite **isostatique** si le nombre d'inconnues de liaison I est égal au nombre d'équations d'équilibre N : $I = N$

- Exemple :



$I =$

$N =$

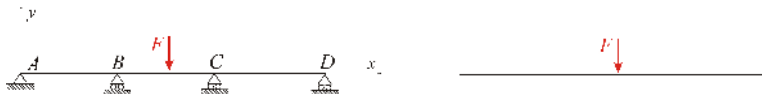


Structure hyperstatique

Définition d'une structure hyperstatique

Une structure est dite **hyperstatique** si le nombre d'inconnues de liaison I est supérieur au nombre d'équations d'équilibre N : $I > N$. On définit $H = I - N$, le degré hyperstaticité.

- Exemple :



$$I =$$

$$N =$$

$$H = I - N =$$



EFFORTS DE COHÉSION



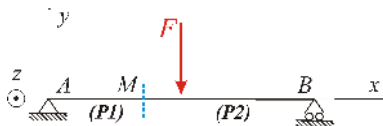
EFFORTS DE COHÉSION

Définition



Définition des efforts de cohésion

- Exemple de la poutre sur deux appuis



- Nous cherchons à caractériser les efforts internes assurant la cohésion de la poutre en un point M choisi de manière arbitraire et repéré par son abscisse x .
- Le choix du point M permet de décomposer la poutre en deux tronçons de poutre
 - Le tronçon $(P1)$ situé à gauche du point M
 - Le tronçon $(P2)$ situé à droite du point M
- Si l'on isole le tronçon $(P1)$ et que l'on fait le bilan des actions extérieures sur $(P1)$ on a :
 - Les actions de liaison en A
 - Les actions exercées par le tronçon $(P2)$ sur $(P1)$ que l'on appelle par définition **les efforts de cohésion**



Modélisation des efforts de cohésion

- Les efforts de cohésion exercés par le tronçon (P2) sur le tronçon (P1) peuvent être modélisés par un torseur (torseur de cohésion) :

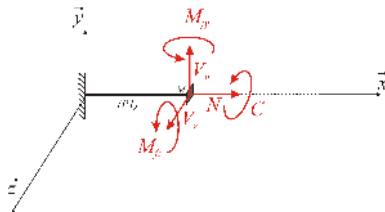
$$\{ \mathcal{T}^{\text{Cohesion}} \} (M)$$

- Ce torseur se décompose en une résultante et un moment exprimé en M :

$$\{ \mathcal{T}^{\text{Cohesion}} \} (M) = \left\{ \vec{R}_{\text{Cohesion}}(M) \mid \vec{M}_{\text{Cohesion}/M}(M) \right\}_M$$



Modélisation des efforts de cohésion



- La résultante et le moment du torseur de cohésion peuvent être projetés dans le système d'axe $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\vec{R}_{\text{Cohesion}}(M) = N\vec{x} + V_y\vec{y} + V_z\vec{z}$$

$$\vec{M}_{\text{Cohesion}/M}(M) = C\vec{x} + \mathcal{M}_{fy}\vec{y} + \mathcal{M}_{fz}\vec{z}$$

avec

- ▶ N l'effort normal
- ▶ V_y et V_z les efforts tranchants
- ▶ C le couple de torsion
- ▶ $\mathcal{M}_{fy}$ et $\mathcal{M}_{fz}$ les moments fléchissants



Cas d'un problème plan : poutre sur deux appuis

- Exemple de la poutre sur deux appuis : on découpe et on isole le tronçon (P1)
 - Dans le cas d'un problème plan les efforts de cohésion se réduisent à : N , V_y et M_{fz}
- 1^{er} cas : $x \in [0; L/2]$



Équilibre de (P1) :

- $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$:
 - Projection suivant $\vec{x}$:
 - Projection suivant $\vec{y}$:
- $\sum \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}/M} = \vec{0}$:
 - Projection suivant $\vec{z}$:



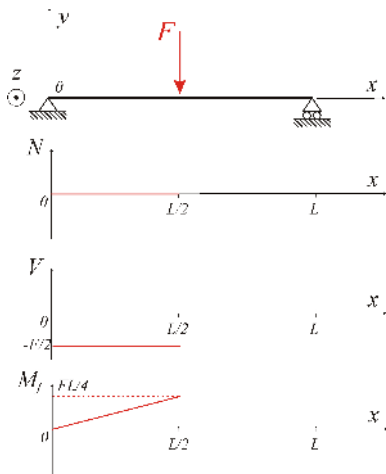
Cas d'un problème plan : poutre sur deux appuis

- On obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} N = 0 \\ \frac{F}{2} + V = 0 \\ -x \frac{F}{2} + \mathcal{M}_f = 0 \end{cases}$$

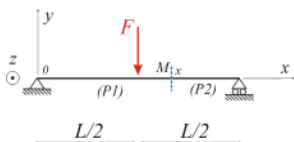
- Ce système peut se résoudre afin d'obtenir les efforts de cohésion :

$$\begin{cases} N = \\ V = \\ \mathcal{M}_f = \end{cases}$$

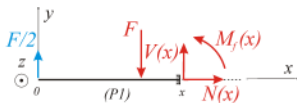


Cas d'un problème plan : poutre sur deux appuis

- 2^{ème} cas : $x \in [L/2; L]$



On isole le tronçon (P1)



Équilibre de (P1) :

- $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$:
 - ▶ Projection suivant $\vec{x}$:
 - ▶ Projection suivant $\vec{y}$:
- $\sum \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}/M} = \vec{0}$:
 - ▶ Projection suivant $\vec{z}$:



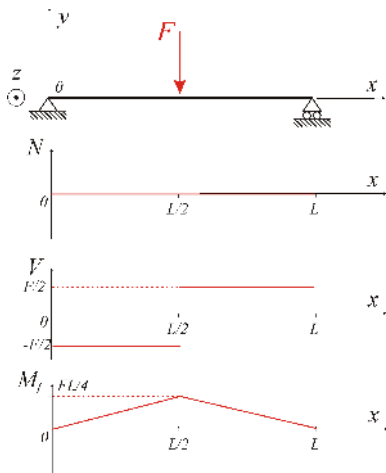
Cas d'un problème plan : poutre sur deux appuis

- On obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} N = 0 \\ \frac{F}{2} - F + V = 0 \\ -x \frac{F}{2} + \left(x - \frac{L}{2}\right) F + \mathcal{M}_f = 0 \end{cases}$$

- Ce système peut se résoudre afin d'obtenir les efforts de cohésion :

$$\begin{cases} N = \\ V = \\ \mathcal{M}_f = \end{cases}$$

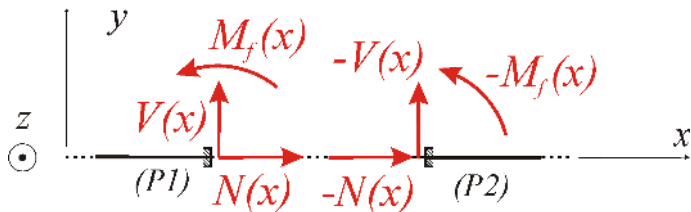


EFFORTS DE COHÉSION

Propriétés



Propriétés des efforts de cohésion : action - réaction

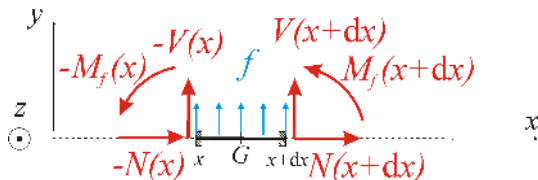


- Les efforts de cohésion exercés par le tronçon de poutre (P2) sur le tronçon (P1) est l'opposé des efforts exercés par le tronçon (P1) sur le tronçon (P2).



Équations locales d'équilibre

- Équilibre d'un tronçon de poutre de longueur dx :



- Équilibre des forces suivant $\vec{x}$:

$$N(x + dx) - N(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{dx} = 0$$

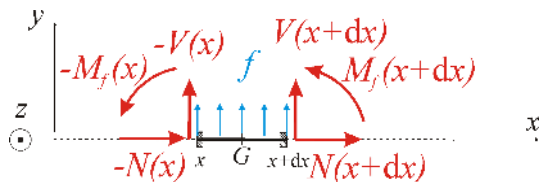
- Équilibre des forces suivant $\vec{y}$:

$$-V(x) + f dx + V(x + dx) = 0$$

$$\frac{dV}{dx} dx = -f dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dx} = -f$$



Équations locales d'équilibre



- Équilibre des moments suivant $\vec{z}$ par rapport à G :

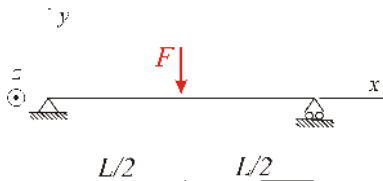
$$\mathcal{M}_f(x + dx) - \mathcal{M}_f(x) + \frac{dx}{2} V(x + dx) + \frac{dx}{2} V(x) = 0$$

$$\frac{d\mathcal{M}_f}{dx} dx + V(x) dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathcal{M}_f}{dx} = -V(x)$$



Équations locales d'équilibre

- Cas de la poutre sur deux appuis :



- On avait trouvé pour $x \in [0; L/2]$:

$$N(x) = 0 \quad V(x) = -\frac{F}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_f = x \frac{F}{2}$$

- Vérification des équations locales d'équilibre :

► $\frac{dN}{dx} =$

► $\frac{dV}{dx} =$

► $\frac{d\mathcal{M}_f}{dx} =$



NOTIONS DE CONTRAINTE ET DE DÉFORMATION



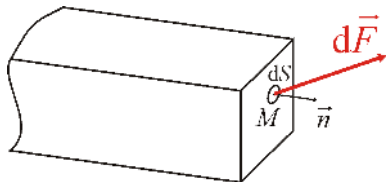
NOTIONS DE CONTRAINTE ET DE DÉFORMATION

Définition des contraintes



Définition des contraintes

- Les efforts de cohésion ne renseignent pas sur la **distribution de la sollicitation dans une section**
- Notion de contrainte :

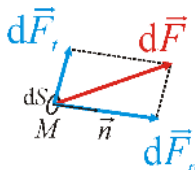


- Notations :

- ▶ dS : surface infiniment petite
 - ▶ $\vec{n}$: normale à la surface dS
 - ▶ M : centre de dS
- La partie de la poutre retirée exerce sur la surface dS de la section une force $d\vec{F}$ infiniment petite.



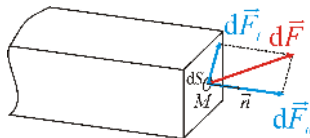
Composantes normale et tangentielle



- La force $d\vec{F}$ se décompose en une **composante normale** et une **composante tangentielle** à la surface : $d\vec{F} = d\vec{F}_n + d\vec{F}_t$:
 - ▶ $d\vec{F}_n = dF_n \cdot \vec{n}$ est appelée **composante normale** ou **composante d'élongation**
 - ▶ $d\vec{F}_t = dF_t \cdot \vec{t}$ est appelée **composante tangentielle** ou **composante de cisaillement** ($\vec{t}$ vecteur tangent unitaire).



Notion de contrainte normale et de cisaillement



- Si la surface dS est *doublée*, la force appliquée sur celle ci est également *doublée*
- Cependant le niveau de sollicitation de la matière est le même.
- Pour caractériser le niveau de sollicitation de la matière, on définit donc les **contraintes normale** et **de cisaillement** :

$$\sigma = \frac{dF_n}{dS} \quad \tau = \frac{dF_t}{dS}$$



Propriétés des contraintes

- Les contraintes sont **indépendantes de la géométrie**, elles caractérisent la sollicitation interne de la matière.
- Les contraintes sont des **grandeurs algébriques** : une contrainte normale **positive** resp. **négative** caractérise un état de **traction** resp. **compression**



$$\sigma > 0$$



$$\sigma < 0$$

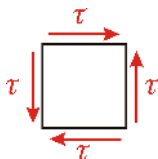
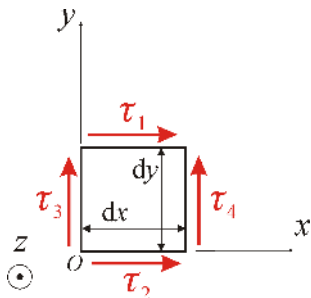
- L'unité des contraintes est le Pascal Pa. Le MPa = 10^6 Pa



Propriétés des contraintes

- Réciprocité des contraintes de cisaillement :

On considère un petit cube $dx \times dy \times dz$ soumis à du cisaillement dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$:



- Équilibre des forces suivant x :

$$\tau_1 dx dz + \tau_2 dx dz = 0$$

$$\tau_1 = -\tau_2$$

- Équilibre des forces suivant y :

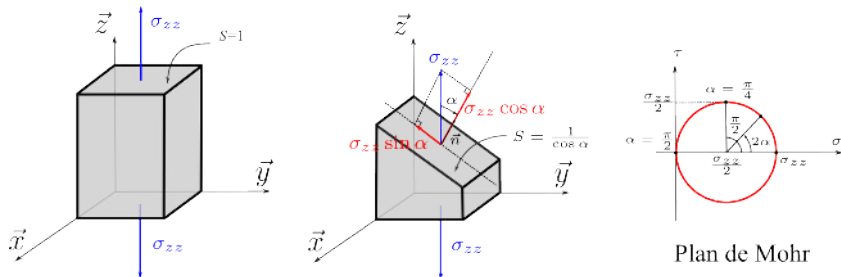
$$\tau_3 dy dz + \tau_4 dy dz = 0$$

$$\tau_3 = -\tau_4$$

- Équilibre des moments /O suivant z :

$$(\tau_4 dy dz) dx - (\tau_1 dx dz) dy = 0$$

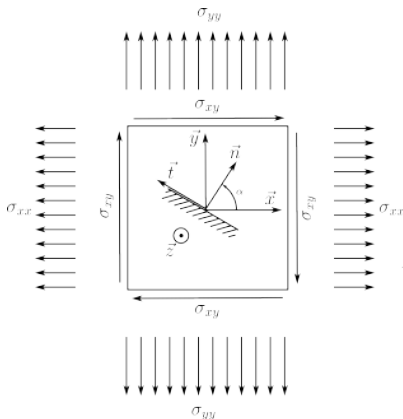
Représentation de l'état de contrainte plan - le cercle de Mohr



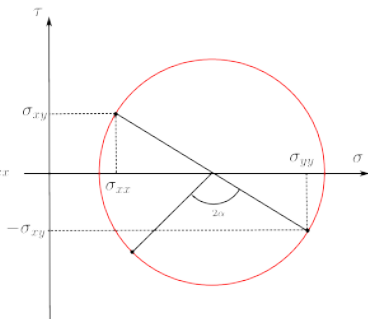
- Composante normale : $\sigma = \sigma_{zz} \cos^2 \alpha$, composante tangentielle : $\tau = \sigma_{zz} \cos \alpha \sin \alpha$
- L'état de contrainte en un point est représenté par un **cercle centré sur l'axe des abscisses** dans le plan de Mohr (composante tangentielle τ , composante normale σ).



Cercle de Mohr - cas général d'un problème plan



Plan réel



Plan de Mohr

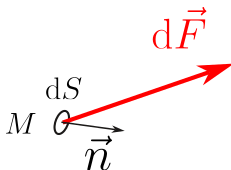
- $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{z})$ directs.
- le sens de rotation dans le plan de Mohr est inversé par rapport au plan réel.



Description de l'état de contrainte, **tenseur des contraintes**

- L'état de contrainte en un point M d'un matériau est caractérisé par un **tenseur d'ordre 2**, le tenseur des contraintes, noté σ (en caractère gras). **Le tenseur des contraintes** permet de déterminer la force $d\vec{F}$ appliquée sur une surface dS de normale $\vec{n}$:

$$d\vec{F} = \sigma \cdot \vec{n} dS$$



- La relation précédente est l'analogue de celle utilisée en mécanique des fluides définissant la pression p :

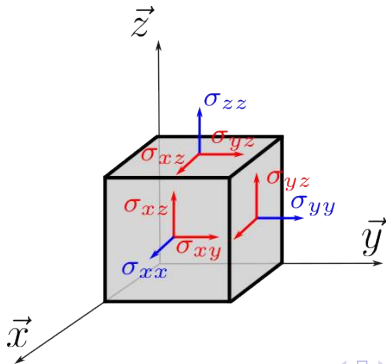
$$d\vec{F} = -p\vec{n}dS$$



Description de l'état de contrainte, **tenseur des contraintes**

- Dans un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le tenseur des contraintes est représenté par une **matrice symétrique** :

$$\{\sigma\}_{(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

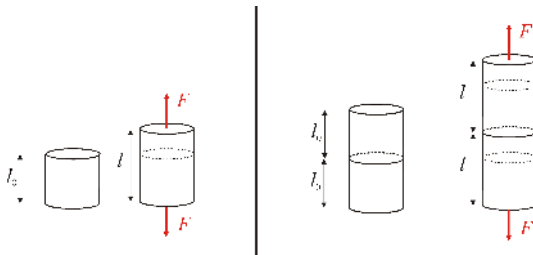


NOTIONS DE CONTRAINTE ET DE DÉFORMATION

Définition des déformations



Déformation de cisaillement



- On sollicite un cylindre avec une **contrainte normale** $\sigma = \frac{F}{S}$
- Augmentation de la longueur : $\ell > \ell_0$
- La variation de longueur dépend de la longueur initiale :
 - ▶ Dans le premier cas $\Delta\ell = \ell - \ell_0$
 - ▶ Dans le deuxième cas $\Delta\ell_{\text{tot}} = 2\ell - 2\ell_0 = 2\Delta\ell$
- Pour avoir une grandeur qui ne dépend pas de la longueur initiale, on définit donc la **déformation d'élongation** ou **déformation longitudinale** par :

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0} = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$$



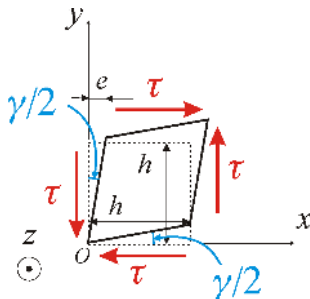
Propriétés de la déformation d'élongation

- Une **augmentation de la longueur** correspond à une **déformation positive** (traction).
- Une **diminution de la longueur** correspond à une **déformation négative** (compression).
- La déformation ε est sans unité.
- Si l'on considère $\ell_0 = 0.1 \text{ m}$ et $\Delta\ell = 0.05 \text{ m}$ alors

$$\varepsilon = \frac{0,05}{0,1} = 0,5 \quad \text{soit} \quad 50\%$$



Déformation de cisaillement



- Si l'on applique des contraintes de cisaillement τ on obtient une déformation de cisaillement
- La déformation de cisaillement est caractérisée par l'angle $\frac{\gamma}{2}$:

$$\varepsilon_{cis.} = \frac{\gamma}{2}$$

- Si les déformations sont faibles :

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{e}{h} \approx \frac{\gamma}{2}$$

- Une déformation de cisaillement conserve le volume.



Description de l'état de déformation, **tenseur des déformations**

- L'état de déformation d'un matériau est représenté par un tenseur d'ordre 2, le tenseur des déformations, noté ϵ .
- Dans un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le tenseur des déformations est représenté par une **matrice symétrique** :

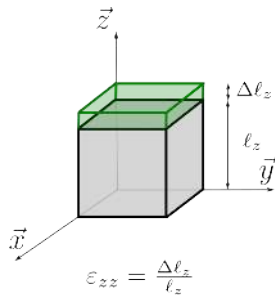
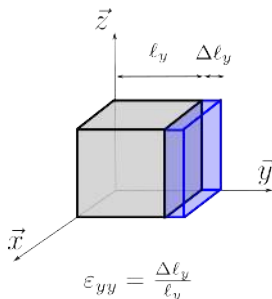
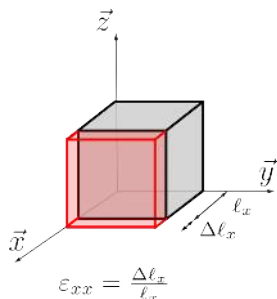
$$\{\epsilon\}_{(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$



Matrice des déformations - composantes d'élongation

- Composantes d'élongation :

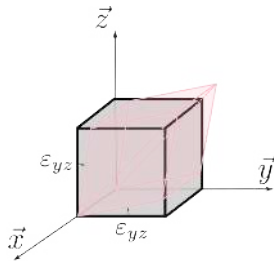
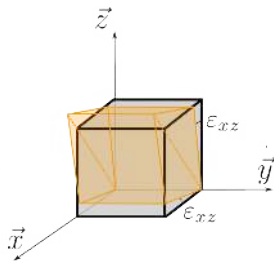
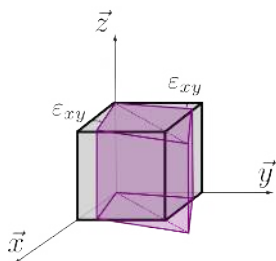
$$\{\epsilon\}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$



Matrice des déformations - composantes de cisaillement

- Composantes de cisaillement :

$$\{\epsilon\}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$



NOTIONS DE CONTRAINTE ET DE DÉFORMATION

Relations contrainte - déformation



Relations de comportement

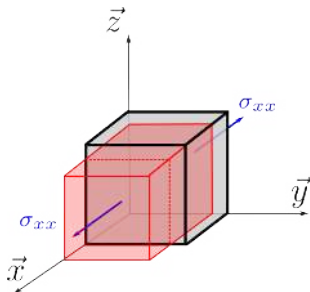
On suppose une relation linéaire entre les contraintes et les déformations (comportement élastique linéaire) :

- $\sigma = E\varepsilon$ (Élongation)
 - ▶ E : module de Young ou module élastique
 - ▶ Pour l'acier $E = 210 \text{ GPa} = 210 \times 10^9 \text{ Pa}$
- $\tau = G\gamma$ (Cisaillement)
 - ▶ G : module de cisaillement
 - ▶ Pour l'acier $E = 80 \text{ GPa}$



Effet Poisson

- On applique un état de contrainte uniaxial suivant $\vec{x}$ d'intensité σ_{xx}
- La déformation d'élongation vaut : $\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$
- Les déformations transverses valent : $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\sigma_{xx} \frac{\nu}{E}$
- ν est appelé le **coefficient de Poisson** et défini par :
$$\nu = - \frac{\varepsilon_{\text{transverse}}}{\varepsilon_{\text{longitudinale}}} .$$
- On peut montrer que : $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$



Élasticité linéaire isotrope - cas général

- État de contrainte :

$$\{\sigma\}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

- État de déformation associé pour un comportement élastique linéaire isotrope :

$$\{\epsilon\}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz} & \frac{\sigma_{xy}}{2G} & \frac{\sigma_{xz}}{2G} \\ \frac{\sigma_{xy}}{2G} & -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz} & \frac{\sigma_{yz}}{2G} \\ \frac{\sigma_{xz}}{2G} & \frac{\sigma_{yz}}{2G} & -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} + \frac{\sigma_{zz}}{E} \end{pmatrix}$$

- Relation tensorielle : $\epsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}(\text{tr } \sigma)\mathbf{1}$



Élasticité linéaire - cas général

- On peut également déterminer l'état de contrainte à partir de l'état de déformation en utilisant les **coefficients de Lamé** λ et μ :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1}$$

- On a les relations suivantes entre E , ν , μ et λ :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad E = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}$$



SOLLICITATIONS ÉLÉMENTAIRES : CONTRAINTES ET DÉFORMÉE



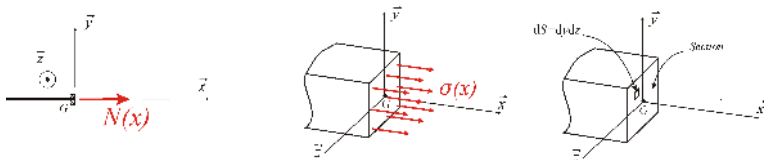
SOLLICITATIONS ÉLÉMENTAIRES : CONTRAINTES ET DÉFORMÉE

Cas de la traction



Traction - contraintes normales

On considère une poutre sollicitée en traction : le seul effort de cohésion est l'effort normal



- L'effort normal est la résultante des contraintes normales appliquée à la section :

$$N(x) = \iint_{\text{Section}} \sigma(x, y, z) dS$$

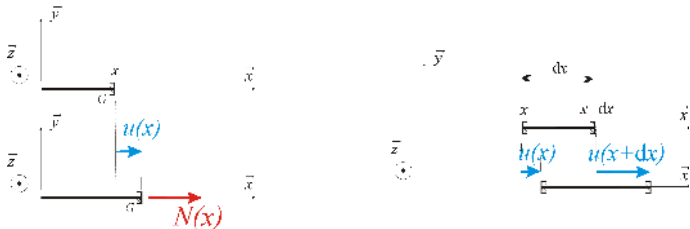
- On suppose que la contrainte normale est homogène dans la section : $\sigma(x, y, z) = \sigma(x)$

$$N(x) = \sigma(x) \underbrace{\iint_{\text{Section}} dS}_S = \sigma(x) S \quad \text{donc} \quad \sigma(x) = \frac{N(x)}{S}$$



Traction - déformée

Calcul de la déformée associée à une traction :



- Déformation d'un tronçon de poutre :

$$\varepsilon(x) = \frac{\Delta \ell}{\ell_0} = \frac{u(x + dx) - u(x)}{dx} = \frac{du}{dx} = u'(x)$$

- en utilisant la relation de comportement $\sigma(x) = E\varepsilon(x)$ et la définition de la contrainte $\sigma(x) = N(x)/S$:

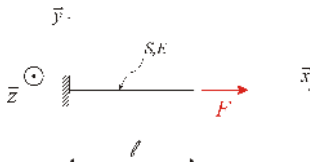
$$N(x) = S\sigma(x) = SE\varepsilon = SEu'(x)$$

$$N(x) = SEu'(x)$$



Traction - déformée - exemple

Exemple d'une poutre encastrée sollicitée en traction :



- Effort normal : $N(x) = F$ avec $x \in [0, \ell]$.
- Calcul du déplacement des point de la poutre (déformée) :

$$u'(x) = \varepsilon(x) = \frac{N(x)}{ES} = \frac{F}{ES}$$

- Intégration par rapport à x :

$$u(x) = \frac{F}{ES}x + C^{ste}$$

- Identification de la constante :

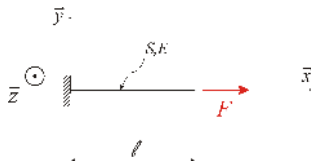
$$\text{en } x = 0, \quad u(0) = 0 \quad \text{donc} \quad C^{ste} = 0$$

$$u(x) = \frac{F}{ES}x$$



Traction - déformée - exemple

Exemple d'une poutre encastrée sollicitée en traction :



- Déplacement de l'extrémité :

$$u(\ell) = \frac{F\ell}{ES}$$



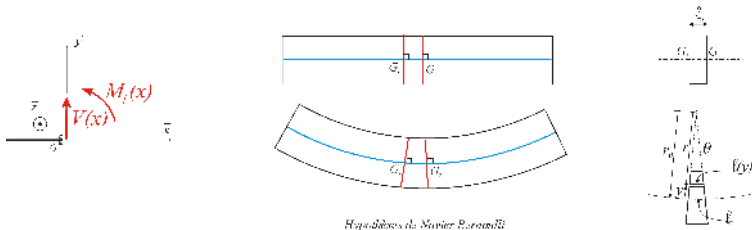
SOLLICITATIONS ÉLÉMENTAIRES : CONTRAINTES ET DÉFORMÉE

Cas de la flexion



Flexion - déformation et contrainte longitudinales

Hypothèse de Navier Bernoulli :



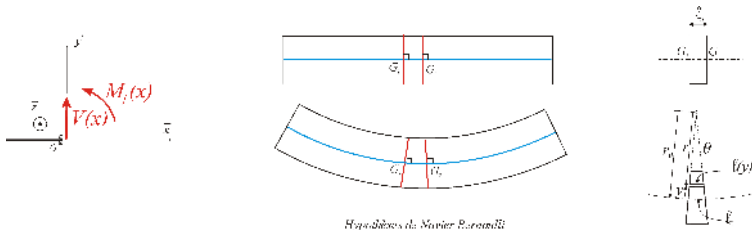
- Déformation de l'élément situé en y :

$$\varepsilon(y) = \frac{\ell(y) - \ell_0}{\ell_0} = \frac{r\theta - r_0\theta}{r_0\theta} = \frac{r - r_0}{r_0} = \frac{r - r_0}{r_0} = -\frac{y}{r_0}$$

- En notant $\chi = \frac{1}{r_0}$ la courbure, on a $\varepsilon(y) = -\chi y$
- La déformation est **linéaire par rapport à y**



Flexion - déformation et contrainte longitudinales



Hypothèses de Navier-Bernoulli

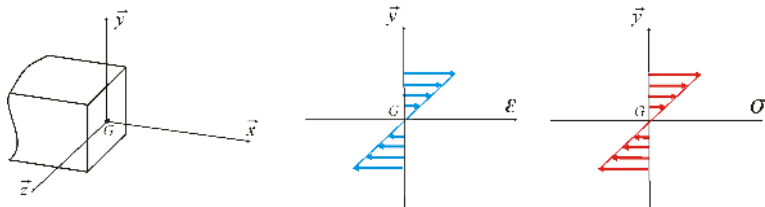
- Déformation de l'élément situé en y :

$$\varepsilon(y) = \frac{\ell(y) - \ell_0}{\ell_0} = \frac{r\theta - r_0\theta}{r_0\theta} = \frac{r - r_0}{r_0} = \frac{r - r_0}{r_0} = -\frac{y}{r_0}$$

- En notant $\chi = \frac{1}{r_0}$ la courbure, on a $\varepsilon(y) = -\chi y$
- La déformation est **linéaire par rapport** à y



Flexion - déformation et contrainte longitudinales



- La déformation est linéaire par rapport à y

$$\varepsilon(y) = -\chi y$$

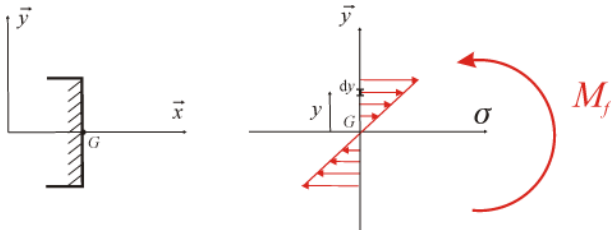
- La loi de comportement $\sigma(y) = E\varepsilon(y)$ donne

$$\sigma(y) = -E\chi y$$



Flexion - relation moment fléchissant/contrainte

Le moment fléchissant est le moment résultant par rapport à G des contraintes longitudinales appliquées sur la section par la partie de poutre située à droite.

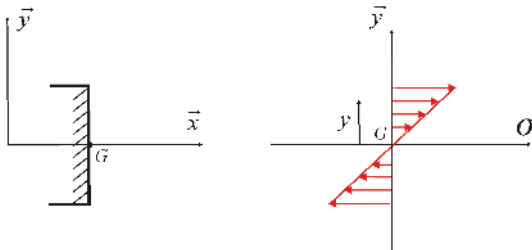


$$\mathcal{M}_f = - \iint_{\text{Section}} y \sigma(y) dS = \iint_{\text{Section}} E \chi y^2 dS = E \chi \underbrace{\iint_{\text{Section}} y^2 dS}_{\text{Inertie : } I}$$

$$\mathcal{M}_f = EI \chi \quad \text{et donc} \quad \sigma(x, y) = - \frac{\mathcal{M}_f(x)}{I} y$$



Flexion - relation moment fléchissant/contrainte



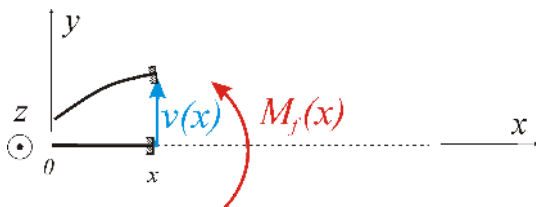
$$\sigma(x, y) = -\frac{\mathcal{M}_f(x)}{I}y$$

- Remarques :

- ▶ si $\mathcal{M}_f > 0$, la fibre supérieure est en compression et la fibre inférieure est en traction
- ▶ l'augmentation du moment fléchissant augmente les contraintes
- ▶ l'augmentation de l'inertie diminue les contraintes
- ▶ Inertie : unité m^4 ; section rectangulaire : $I = \frac{bh^3}{12}$ (b largeur, h hauteur)



Flexion - Déformée associée au moment fléchissant



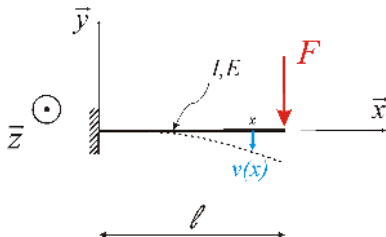
- $v(x)$ déplacement suivant $\vec{y}$ des point matériel de la ligne moyenne de la poutre
- On a $\mathcal{M}_f = EI\chi$
- La courbure χ est la dérivée seconde de $v(x)$: $\chi = v''(x)$ donc

$$\mathcal{M}_f = EIv''(x)$$



Flexion - Déformée - exemple

Exemple d'une poutre encastrée sollicitée en flexion :



- Efforts de cohésion :

$$\begin{cases} N = 0 \\ V = -F \\ \mathcal{M}_f = F(x - \ell) \end{cases}$$



Flexion - Déformée - exemple

- Calcul de la déformée :

$$\mathcal{M}_f(x) = F(x - \ell) = EIv''(x)$$

$$v''(x) = \frac{F}{EI}(x - \ell)$$

$$v'(x) = \frac{F}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - \ell x \right) + C^{st1}$$

$$v(x) = \frac{F}{EI} \left(\frac{x^3}{6} - \ell \frac{x^2}{2} \right) + xC^{st1} + C^{st2}$$

- Identification des constantes

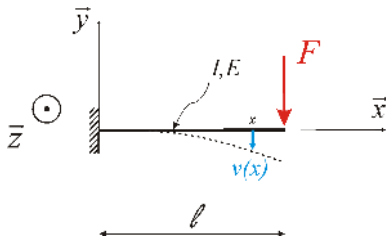
- ▶ Déplacement vertical nul en $x = 0$: $v(0) = 0$ d'où $C^{st2} = 0$
- ▶ Rotation nulle en $x = 0$: $v'(0) = 0$ d'où $C^{st1} = 0$

- Expression de l'équation de la déformée :

$$v(x) = \frac{F}{EI} \left(\frac{x^3}{6} - \ell \frac{x^2}{2} \right)$$



Flexion - Déformée - exemple



- Expression de l'équation de la déformée :

$$v(x) = \frac{F}{EI} \left(\frac{x^3}{6} - \ell \frac{x^2}{2} \right)$$

- Flèche en $x = \ell$:

$$v(\ell) = -\frac{F\ell^3}{3EI}$$



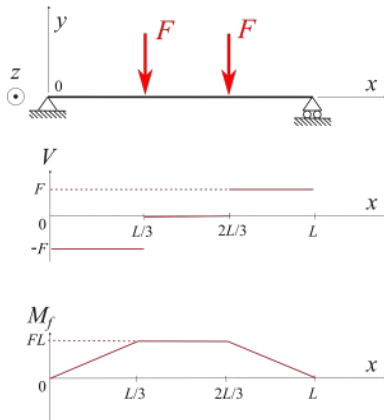
Flexion : déformation et contrainte de cisaillement

- Le moment fléchissant et l'effort tranchant sont liés : $\frac{dM_f}{dx} = -V(x)$

► **Flexion pure :**

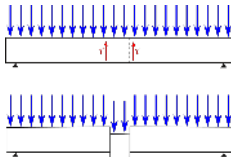
► **Flexion simple :**

- Exemple de la flexion 4 points

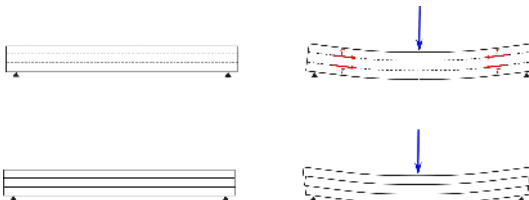


Flexion : mise en évidence des contraintes de cisaillement

- Contraintes de cisaillement transversales :

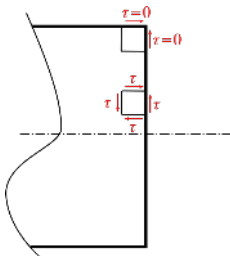


- Contraintes de cisaillement longitudinales :



Relation entre contraintes de cisaillement

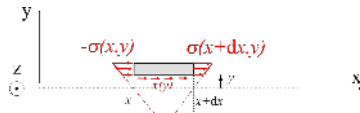
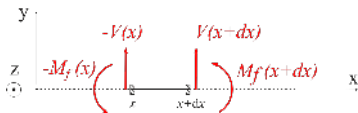
Soit deux petits éléments de poutre :



- Réciprocité des contraintes de cisaillement : les contraintes de cisaillement longitudinales et transversales sont égales
- Aux extrémités ($y = \pm \frac{h}{2}$), les contraintes de cisaillement sont nulles : **les contraintes de cisaillements ne sont pas constantes dans une section droite $\tau(y)$.**



Distribution des contraintes de cisailement



Equilibre des forces appliquées sur la partie supérieure du tronçon suivant $\vec{x}$:

$$\int_y^{\frac{h}{2}} \sigma(x+dx)dS - \int_y^{\frac{h}{2}} \sigma(x)dS + bdx\tau(y) = 0$$

Or

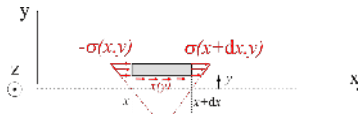
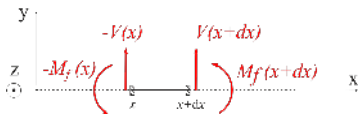
$$\sigma(x+dx) = -\frac{\mathcal{M}_f(x+dx)}{I}y, \quad \sigma(x) = -\frac{\mathcal{M}_f(x)}{I}y \quad \text{et} \quad dS = bdy$$

et donc

$$-\int_y^{\frac{h}{2}} \frac{\mathcal{M}_f(x+dx)}{I}ybdy + \int_y^{\frac{h}{2}} \frac{\mathcal{M}_f(x)}{I}ybdy + bdx\tau(y) = 0$$



Distribution des contraintes de cisailement



$$-\int_y^{\frac{h}{2}} \frac{\mathcal{M}_f(x+dx)}{I} y b dy + \int_y^{\frac{h}{2}} \frac{\mathcal{M}_f(x)}{I} y b dy + b dx \tau(y) = 0$$

D'où

$$-\frac{\mathcal{M}_f(x+dx) - \mathcal{M}_f(x)}{I} \underbrace{\int_y^{\frac{h}{2}} y b dy}_{\Sigma(y)} + b dx \tau(y) = 0$$

$\Sigma(y)$ est appelé le moment statique de la section.

Et donc

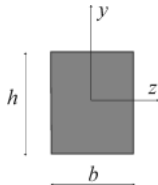
$$\frac{d\mathcal{M}_f}{dx} \frac{\Sigma(y)}{I} + b \tau(y) \implies \tau(y) = -V(x) \frac{\Sigma(y)}{I b}$$



Contraintes de cisaillement : section rectangulaire

$$\tau(y) = -V(x) \frac{\Sigma(y)}{Ib}, \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

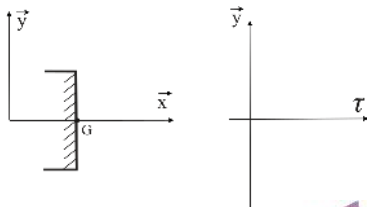
$$\Sigma(y) = \int_y^{\frac{h}{2}} y b dy =$$



$$\tau(y) =$$

$$\tau_{max} =$$

avec $S_r = \frac{S}{\alpha}$ la section réduite de cisaillement.



Déformée associée au cisaillement

On a $\tau = G\gamma$ et $\tau = \frac{V(x)}{S}$ et donc

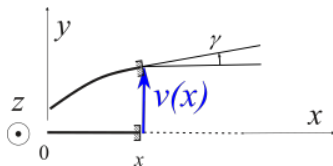
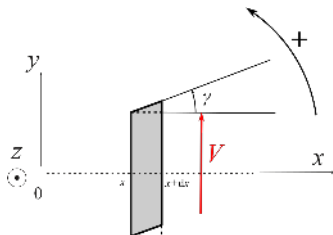
$$\gamma = \frac{V}{GS}$$

Pour prendre en compte le fait que τ n'est pas constant dans la section, on remplace S par la section corrigée :

$$S_1 = \frac{I^2}{\int_{\text{Section}} \frac{(\Sigma(y))^2}{b} dy}$$

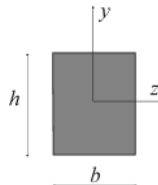
Comme $\gamma = \frac{dv}{dx} = \frac{V}{S_1 G}$, on alors :

$$V(x) = GS_1 v'(x)$$



Section corrigée d'une poutre rectangulaire

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{I^2}{\int_{Section} \frac{(\Sigma(y))^2}{b} dy} \\ &= \frac{\left(\frac{bh^3}{12}\right)^2}{\frac{1}{b} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{b^2 h^4}{8^2} \left(1 - 4\frac{y^2}{h^2}\right)^2 dy} \\ &= \dots \\ &= \frac{5}{6}bh = \frac{5}{6}S \end{aligned}$$



Calcul de la déformée de cisaillement de la poutre console

Effort tranchant : $V(x) = -F$

$$v'(x) =$$

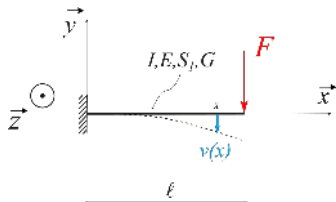
$$v(x) =$$

Condition limite : $v(0) =$

$$v(x) =$$

Flexion : $v_{max} = -\frac{\ell^3 F}{3EI}$

Pour L grand :



SOLLICITATIONS ÉLÉMENTAIRES : CONTRAINTES ET DÉFORMÉE

Bilan



Bilan

	N	V	$\mathcal{M}_f$
Contrainte	$\sigma = \frac{N}{S}$	$\tau(y) = -V(x) \frac{\Sigma(y)}{Ib}$	$\sigma(y) = -\frac{y\mathcal{M}_f}{I}$
Contrainte max	$\sigma_{max} = \sigma$	$\tau_{max} = -\alpha \frac{V}{S}$ avec $\alpha = \frac{3}{2}$ (section rectangulaire)	$\sigma_{max} = \pm \frac{h\mathcal{M}_f}{2I}$
Déformée	$N(x) = ESu'(x)$	$V(x) = GS_1v'(x)$ avec $S_1 = \beta S$	$\mathcal{M}_f(x) = Elv''(x)$



APPROCHE ÉNERGÉTIQUE



Introduction

Ecriture d'un équilibre mécanique d'un solide :

- Bilan des efforts et des moments :

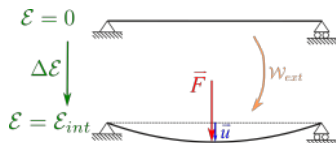
$$\begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \\ \sum \vec{\mathcal{M}}_{ext/O} = \vec{0} \end{cases}$$

- Bilan énergétique (*théorème de l'énergie cinétique par exemple*)

-
- Travail des forces extérieures :

$$\mathcal{W}_{ext} = \vec{F} \cdot \vec{u}$$

- Energie de déformation : $\mathcal{E}_{int}$



Bilan énergétique lors de la déformation : $\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_{int} = \mathcal{W}_{ext}$



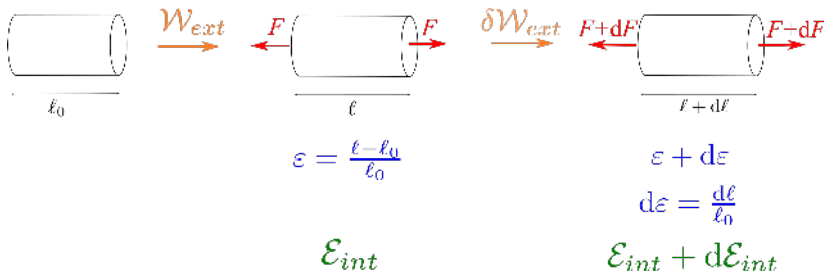
APPROCHE ÉNERGÉTIQUE

Energie de déformation d'un solide déformable



Energie de déformation d'un solide déformable

Cylindre déformable sollicité en traction uniaxiale



$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_{int} &= \delta W_{ext} = (F + dF)d\ell \approx Fd\ell = \sigma S \ell_0 d\epsilon \\ &= \underbrace{S \ell_0}_{\text{Volume : } \mathcal{V}} \sigma d\epsilon \end{aligned}$$

Energie de déformation volumique : $\frac{d\mathcal{E}_{int}}{\mathcal{V}} = \sigma d\epsilon$



Energie de déformation : cas du comportement élastique

Pour une unité de volume :

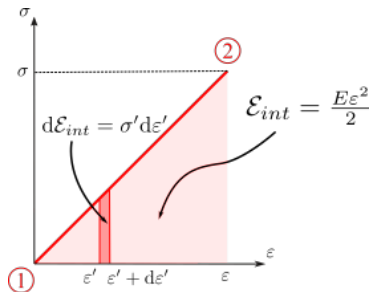
$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{int}^{① \rightarrow ②} &= \int_{①}^{②} d\mathcal{E}_{int} = \int_0^{\varepsilon} \sigma' d\varepsilon' \\ &= \int_0^{\varepsilon} E\varepsilon' d\varepsilon' = \frac{E\varepsilon^2}{2}\end{aligned}$$

d'où l'énergie élastique en utilisant la loi de Hooke ($\sigma = E\varepsilon$) :

$$\mathcal{E}_{int} = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}$$

Et de même en cisaillement :

$$\mathcal{E}_{int} = \frac{G\gamma^2}{2} = \frac{\tau\gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G}$$



APPROCHE ÉNERGÉTIQUE

Energie de déformation d'une poutre



Energie de déformation d'une poutre : cas de l'effort normal

Distribution des contraintes normales :

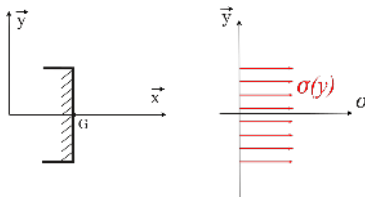
$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{S}$$

Energie de déformation de la poutre :

$$\mathcal{E}_{int} = \int_A^B \frac{\sigma(x)^2}{2E} \underbrace{S dx}_{Volume}$$

Et donc

$$\mathcal{E}_{int} = \int_A^B \frac{(N(x))^2}{2ES} dx$$



Energie de déformation d'une poutre : cas du moment fléchissant

Distribution des contraintes normales :

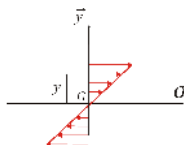
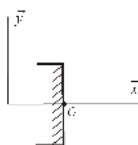
$$\sigma(x, y) = -\frac{y \mathcal{M}_f(x)}{I}$$

Energie de déformation de la poutre :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{int} &= \int_A^B \int_{Section} \frac{\sigma(x, y)^2}{2E} b(y) dy dx \\ &= \int_A^B \frac{(\mathcal{M}_f(x))^2}{2EI^2} \underbrace{\left(\int_{Section} y^2 b(y) dy \right)}_I dx\end{aligned}$$

Et donc

$$\mathcal{E}_{int} = \int_A^B \frac{(\mathcal{M}_f(x))^2}{2EI} dx$$



Energie de déformation d'une poutre : cas de l'effort tranchant

Distribution des contraintes de cisaillement :

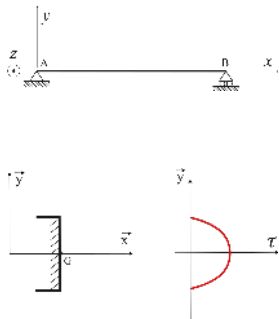
$$\tau(x, y) = -V(x) \frac{\Sigma(y)}{I b(y)}$$

Energie de déformation de la poutre :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{int} &= \int_A^B \int_{Section} \frac{\tau(x, y)^2}{2G} b(y) dy dx \\ &= \int_A^B \frac{(V(x))^2}{2G} \underbrace{\left(\int_{Section} \frac{(\Sigma(y))^2}{I^2 b^2} b(y) dy \right)}_{\frac{1}{S_1}} dx\end{aligned}$$

Et donc

$$\mathcal{E}_{int} = \int_A^B \frac{(V(x))^2}{2GS_1} dx$$



Energie de déformation d'une poutre

Dans le cas général l'énergie de déformation d'une poutre s'exprime :

$$\mathcal{E}_{int} = \int_A^B \left(\frac{N^2}{2ES} + \frac{\mathcal{M}_f^2}{2EI} + \frac{V^2}{2GS_1} \right) dx$$



APPROCHE ÉNERGÉTIQUE

Application du théorème de Castigliano



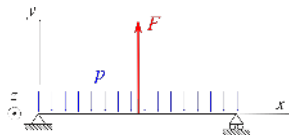
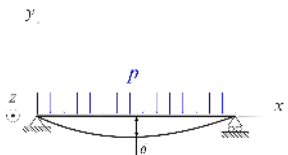
Théorème de Castigliano

- **Théorème de Castigliano**

La dérivée partielle de l'énergie interne par rapport à une action quelconque F_k est égale au déplacement δ_k du point d'application de cette action mesurée algébriquement sur la ligne d'action :

$$\delta_k = \frac{\partial \mathcal{E}_{int}}{\partial F_k}$$

- **Application au calcul de flèche**

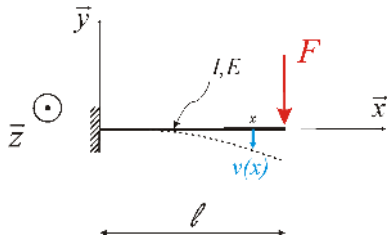


- ▶ Application d'une force fictive F au point où l'on cherche à calculer la flèche
- ▶ et donc $\delta = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{int}(p, F)}{\partial F} \right) (p, F = 0)$



Théorème de Castigliano, exemple de calcul de flèche

Exemple d'une poutre encastrée sollicitée en flexion :



• Efforts de cohésion :

$$\begin{cases} N = 0 \\ V = -F \\ \mathcal{M}_f = F(x - \ell) \end{cases}$$



Théorème de Castigliano, exemple de calcul de flèche



Théorème de Castigliano, exemple de calcul de flèche

